CONTRIBUTION À LA RÉORGANISATION DES SAVOIRS PRÉ-NUMÉRIQUES ET NUMÉRIQUES

Joël Briand

CONTRIBUTION À LA RÉORGANISATION
DES SAVOIRS PRÉ-NUMÉRIQUES ET NUMÉRIQUES

ÉTUDE ET RÉALISATION D'UNE SITUATION
D'ENSEIGNEMENT DE L'ÉNUMÉRATION
DANS LE DOMAINE PRÉ-NUMÉRIQUE

Joél Briand [1]

ABSTRACT

Several research works, since more than fifty years, have been dedicated to the construction by children of the concept of number, in particular whole numbers.
Many aspects regarding the manipulation of collections and operations on these collections have been studied. Yet, paradoxically, enumeration has hardly ever been considered as a fundamental component of counting up activity or measurement of discrete quantities, for the construction of first numbers, as well as for arithmetical operations or combinatorics.
This paper is based on the part of our research in relation with pre-numerical activities and construction of first numbers. The first part shows the reasons why enumeration remained absent in pre-numerical knowledge and the consequences of this absence on children' s numerical intellectual attainments. In the second part we present a teaching design adapted for the learning of enumeration by 4-5 year old children. In this part, we raise micro-didactical questions concerning the organization of the experimental apparatus, the necessary vigilance of the teacher and language difficulties.

RESUMEN

Numerosos trabajos se han dedicado, desde hace más de cincuenta años, a la construcción de la noción de número por el niño y, de manera particular, a la noción de número natural. En estos estudios, gran número de aspectos asociados a las manipulaciones de colecciones y a las operaciones sobre estas colecciones han sido objeto de importantes investigaciones. Paradójicamente, la enumeración prácticamente nunca ha sido considerada como un componente fundamental de la actividad de recuento y medida de cantidades discretas, tanto para la construcción de los primeros números, como para la construcción de las operaciones aritméticas o para el análisis combinatorio.

[1] Maître de Conférences, Directeur d'Études à l'I.U.F.M. D'Aquitaine. Laboratoire DAEST Université Victor Ségalen.

Este artículo se basa en la parte de mi investigación relativa a los dorninios de lo pre-numérico y de los primeros números. La primera parte muestra las razones por las cuales la enumeración ha permanecido ausente de los saberes numéricas de los niños. La segunda parte propone una ingeniera adaptada a los alumnos de 4-5 años con relación al aprendizaje de la enumeración. En esta segunda parte se abordan cuestiones de micro-didáctica relativas a la organización del dispositivo, la necesaria vigilancia del profesor, asf como a las dificultades lingüísticas encontradas.

RÉSUMÉ :

De très nombreux travaux ont été consacrés, depuis plus de cinquante ans, à la construction de la notion de nombre chez l'enfant et, tout particulièrement, à la notion de nombre entier. Au cours de ces études, un très grand nombre d'aspects associés aux manipulations des collections et aux opérations sur ces collections ont fait l'objet de recherches importantes. Paradoxalement, l'énumération n'a pratiquement jamais été considérée comme une composante fondamentale de l'activité de dénombrement et de mesure des quantités discrètes, que ce soit d'ailleurs pour la construction des premiers nombres, pour la construction des opérations arithmétiques ou pour l'analyse combinatoire.

L'article qui suit se fonde sur la partie de ma recherche relative aux domaines du pré-numérique et des premiers nombres. La première partie montre les raisons pour lesquelles l'énumération est restée absente des savoirs pré-numériques et les conséquences de cette absence sur les acquisitions numériques des enfants. La deuxième partie propose une ingénierie adaptée à des élèves de 4-5 ans en vue de l'apprentissage de l'énumération. Au cours de cette deuxième partie, sont abordées des questions de micro-didactique touchant à l'organisation du dispositif, la nécessaire vigilance de l'enseignant, ainsi que les difficultés langagières rencontrées.

INTRODUCTION :

Traditionnellement, la question du partage des responsabilités entre le professeur et l'élève relativement à une situation d'enseignement donnée porte sur l'ordre selon lequel les savoirs doivent être enseignés, sur ce que l'élève devrait savoir des enseignements déjà reçus et sur ce qu'il devrait pouvoir apprendre. Une fois que les savoirs à enseigner sont définis, le professeur organise une progression en fonction de ses attentes (savoirs antérieurs et possibilités d'apprentissages nouveaux). Or, dans certaines situations, l'élève a besoin de connaissances qui ne lui sont pas enseignées, mais qu'il doit pourtant mettre en œuvre pour apprendre ou pour utiliser ce qu'il a appris.

La question se pose alors de repérer ces connaissances, d'en faire éventuellement des objets de savoir, donc de construire des situations d'apprentissage productrices de ce savoir. Cette interrogation a permis que se développent des recherches dans le domaine du raisonnement [Oruz P. 1992], de la géométrie [Berthelot- Salin 1992]. Pour ma part, je me suis intéressé à la construction des premiers nombres, des opérations arithmétiques ainsi qu'à l'enseignement de l'analyse combinatoire. Dans ces domaines, il s'agit de toujours de mesurer, (par leur cardinal), des collections finies. Or, dans les activités de mesurage, l'élève doit avoir une idée de l'objet qu'il traite (la collection), il doit organiser les rapports à cet objet, il doit produire ou reconnaître des structures et faire des choix dictés par des raisons ergonomiques, temporelles, spatiales.

L'objet de cet article est de prolonger la recherche conduite lors de ma thèse vers la construction d'une ingénierie d'apprentissage dans le seul domaine des connaissances pré-numériques. J'ai donc repéré dans le domaine du comptage, des tâches qui nécessitent des connaissances non enseignées. En particulier j'ai défini « l'énumération » comme une connaissances nécessaire à la tâche d'inventaire d'une collection finie. J'ai montré en quoi cette connaissance n'était pas simplement un savoir-faire : pour cela, je me suis appuyé sur la méthodologie développée par Ratsimba-Rajhon H. [Ratsimba Rajohn H. 1982] permettant de mettre en évidence des modèles implicites d'action (au sens de Brousseau) que je rapproche de conceptions (au sens de Vergnaud) [Briand 1993 p. 129-132].

L'étude qui suit est composée de deux parties :

La première partie retrace les évolutions des savoirs pré-numériques, tente d'expliquer l'origine de leur organisation et propose les résultats, relatifs à la construction des premiers nombre, issus de ma recherche.

La deuxième partie développe une ingénierie d'apprentissage du contrôle des collections finies simples et de l'énumération comme savoir nécessaire à la réalisation de tâches d'inventaire. Dans cette deuxième partie, je mets en évidence des questions de didactique qui se sont fait jour en cours d'expérimentation. Enfin, je propose un plan pour un enseignement de l'énumération à conduire auprès d'élèves de 4-5 ans.

PREMIERE PARTIE

1. Historique de l'enseignement pré-numérique :

Dans les années 80-85, il était convenu d'évoquer le « double aspect de la représentation numérique » [Saxe G.-Posner J. 1983] : d'une part un produit culturel « déjà là », d'origine socio-historique : les signes collectifs, les noms des nombres , les noms entendus, les noms lus, les signes écrits, les signes lus qui renvoient, pour l'adulte, à la numération et d'autre part, une structuration fondée sur des relations logico-mathématiques (classifications, sériations, itération). Dans un article de synthèse.[Fayol M. 1985] sur le nombre la numération et le dénombrement, Fayol M. commentait alors : *« Cette distinction n'aurait qu'un intérêt relativement mineur si elle ne rendait pas compte de l'existence de deux problématiques différentes en ce qui concerne l'abord de la genèse du nombre et de la numération »* Et de placer la question du côté des chercheurs en déclarant que certains *« mettent plutôt l'accent sur l'acquisition de la chaîne numérique* » et d'autres *« insistent surtout sur le développement des fondements logiques* ».

Ce double aspect de la représentation numérique est perceptible dans l'organisation des enseignements : une rapide exploration des programmes de l'école maternelle de 1880 à nos jours montre que la mission assignée à l'institution jusqu'en 1977 fut d'enseigner, entre autre, la récitation de la suite des nombres (produit culturel), alors qu'à partir de 1977, date de nouvelles orientations ministérielles, l'accent fut mis sur l'acquisition de « savoirs faire » qui se fondent à la fois sur le renouveau des contenus mathématiques et sur les travaux de Piaget, fortement influencés eux-mêmes par cette nouvelle organisation des mathématiques (relations logico-mathématiques). Les modifications ultérieures des programmes n'ont pas réellement bouleversé le paysage pré-numérique et son approche dans l'enseignement.

Nous sommes encore dans cette double approche, même si on s'accorde sur le principe qu'il n'est pas suffisant d'enseigner les nombres en en faisant répéter le nom, l'écriture, dans un ordre immuable et rituel, les activités de rangement, classement directement issues de la représentation logico-mathématique du nombre sont-elles des réponses suffisantes à la problématique de la construction du nombre chez l'enfant ?

Revenons sur les raisons historiques de cette organisation des savoirs pré-numériques : l'hypothèse théorique de Piaget concernant la construction du nombre fut la suivante : *"L'hypothèse dont nous sommes partis est, il va de soi, que cette construction (du nombre NDLR) est corrélative du développement de la logique elle-même et qu'au niveau prélogique correspond une période pré-numérique. Et le résultat obtenu a été qu'effectivement le nombre s'organise, étape par étape, en* *solidarité étroite avec l'élaboration graduelle des systèmes d'inclusions (hiérarchie des classes logiques) et des relations asymétriques (sériations qualitatives), la suite des nombres se constituant ainsi en tant que synthèse opératoire de la classification et de la sériation. Les opérations logiques et arithmétiques nous sont donc apparues comme un seul système total et psychologiquement naturel, les secondes résultant de la généralisation et de la fusion des premières, sous leurs deux aspects complémentaires de l'inclusion des classes et de la sériation des relations, mais avec élimination de la qualité."*[2] [J.Piaget & A.Szeminska 1941 ed. 1967 p.6]

Ces résultats eurent pour conséquence, dans le milieu des enseignants, qu'ils renforcèrent une présentation des savoirs conforme à l'organisation du moment des mathématiques, en même temps qu'ils les justifiaient. L'utilisation des théories psychologiques et pédagogiques d'alors aboutissait, en s'appuyant sur les travaux de Piaget :

- à penser que, justement l'épistémologie génétique montrait l'apparition non pas de connaissances élémentaires mais de structures entières et, cela dans une genèse qui procédait du général au particulier ;
- à conclure que l'activité des sujets et leur développement naturel conduisaient aux appropriations fondamentales visées, à condition que l'on n'y fasse pas obstacle par une didactique normative intempestive.

En 1962, un premier virage s'effectua : les travaux de Gréco [Gréco P.& Morf A. 1962] mirent en évidence une différence sur les jugements se référant à la quotité[3] par rapport à ceux se référant à la quantité[4]. Gréco donna alors à la quotité le statut de « quasi-nombres » et non pas seulement de rite verbal. Il étudia alors le rôle de la comptine numérique « *d'abord pratique aveugle et cadeau que la société nous transmet* » qui devient composante d'une procédure permettant des réussites locales et pas toujours argumentées. L'enfant est dans un bain culturel dont il va retirer des pratiques de comptages précoces, souvent rituelles, mais dont il s'avère qu'elles peuvent être un outil permettant certaines réussites alors que l'accès plus tardif à la conservation des quantités finies constitue un obstacle à l'élaboration finale du nombre.

Mais la réforme de l'enseignement des mathématiques intervint en France en 1970. Cette réforme s'appuya essentiellement sur une transposition de la théorie des ensembles dans l'enseignement. Cette théorie permettait au départ d'unifier et de réorganiser les savoirs mathématiques. La réforme des « maths modernes » a donc proposé, pour la première fois, des contenus d'enseignement préparatoires à la

---

[3] « réponse à la question « combien de ».

[4] « où y en a-t-il le plus ? »

construction du nombre à l'école élémentaire. Par exemple, il s'agissait pour les élèves de reconnaître si deux ensembles étaient identiques ou non, puis de concevoir des ensembles à partir d'autres ensembles, et le contrôle des ensembles s'y fasait à partir du contrôle logique, prédictif. Les promoteurs se préoccupèrent de définir les ensembles. Ils utilisèrent pour cela des présentations telles que les diagrammes de Venn, de Carroll, etc.. Voici ce qu'écrit [Robert M. 1972] à propos de l'enseignement des entiers naturels : *"au départ, rien ne paraît changé (NDLR par rapport aux programmes de 1947). On a toujours présenté les naturels à partir de collections d'objets. Même si on remplace le mot de collection par celui d'ensemble, le sens reste le même. Mais déjà nous voyons que les objets de l'ensemble doivent être distincts, qu'ils n'ont pas à être tous pareils, de même nature, et qu'il est souhaitable d'utiliser des ensembles d'objets bien différents et point trop intéressants affectivement[p.17]."* Plus tard, à propos de la numération : *"Il faut partir d'une collection d'objets, faire des groupements par 3, 5, 10, des groupements de groupements pour obtenir l'écriture du naturel dans un système de numération*".

La notion de collection passa du langage méta-mathématique dans le langage mathématique en prenant parfois le nom d'ensemble. Son enseignement ne tarda donc pas. Mais on n'y apprend pas les collections, celles-ci sont présentées : *"Nous ne donnerons pas de définition du mot "ensemble" ; nous considérons ce concept comme une notion première. En nous plaçant du point de vue intuitif, nous dirons avec A.REVUZ que "c'est la mathématisation de la notion concrète de collection"* [Ziglon 1971]. Par conséquent, les élèves de maternelle et de cours préparatoire effectueront des opérations sur les ensembles « déjà là », opérations préparatoires à la construction du nombre. Les classification et les rangements, savoirs eux aussi directement issus de la théorie des ensembles, devinrent donc, à leur tour, objets de savoirs pré-numériques. Comme, à l'époque, le souci du système était de faire correspondre l'activité du sujet et les notions mathématiques "sous-jacentes", l'organisation des savoirs à enseigner, y compris les savoirs de formation trouvait sa logique dans l'organisation des « savoirs savants ».[5] Prenons exemple dans un ouvrage de formation des maîtres [Granney Ch. & Perrot G. 1970 p.23] : Voici le tableau proposé :

ACTIVITE	**NOTIONS MATHEMATIQUES SOUS JACENTES**
Ensembles.	Ensemble.Partition. Relation

[5] Aujourd'hui encore, les « notions mathématiques sous jacentes » constituent bien souvent le moyen de fixer les objectifs d'une séquence de classe pour cautionner une activité banale.

Familles d'ensembles. Tas d'ensembles qui se ressemblent...autant que... Mise en ordre des tas.	d'équivalence.Correspondance terme à terme. Cardinal. Relation d'ordre. Ordinal.
Nombre naturel	

2. Recherches des années 70 à 80 :

Parallèlement à cela, plusieurs chercheurs reprirent la question de la construction des premiers nombres et les travaux de Gréco[Gréco & A.Morf 1962]. La numération et le comptage firent alors l'objet de recherches approfondies. [Fuson KC, Richard J., Briars D.J.1982], [Gelmann & Gallistel 1978], [Meljac 1979].

- Fuson & Briars étudièrent et caractérisèrent le rapport du sujet à la chaîne verbale numérique. Ils établirent des types de comportements : la chaîne peut être :

a) une portion conventionnelle et stable équivalente à celle de l'adulte.
b) une portion stable pour un sujet donné, mais ne correspondant pas aux normes (nombres sautés).
c) une portion où des mots se suivent, qui sont prises dans le champ des mot-nombres, mais qui n'est ni stable, ni conventionnelle.

Ils étudièrent aussi les lieux de ruptures de cette chaîne : exemple des enfants qu'il faut aider pour « repartir » après 29, 39.

- Gelman et Gallistel développèrent l'approche empiriste de l'acquisition du nombre. Selon eux, l'activité de comptage est gouvernée par cinq principes (perçus au niveau comportemental) :

1°) La mise en correspondance un à un de chaque objet décompté avec une et une seule « étiquette verbale ».

2°) L'ordre stable : la suite des étiquettes verbales suit une séquence fixe.

3°) La cardinalité d'une collection est obtenue directement par la dernière étiquette verbale formulée.

4°) l'abstraction : l'hétérogénéïté des entités d'une collection n'a aucun impact sur leurt dénombrement.

5°) La non pertinence de l'ordre : l'amorce du comptage à un endroit ou à un autre de la collection n'a pas d'incidence sur les résultats.

Ces cinq principes ne sont pas tous assumés en même temps. Certains, comme le suggérait Gréco, permettent d'envisager des activités d'apprentissage.

C.Meljac, dans le cadre de consultations hospitalières, conduisit des études sur le dénombrement spontané chez l'enfant. Nous reprenons un extrait de ses conclusions

: *« L'essentiel de notre contribution porte en résumé sur les multiplicités de sens que peut revêtir chez l'enfant le simple fait de dénombrer et sur les différences entre exécution d'un ordre arbitraire provenant de l'adulte et libre réalisation par le sujet agissant. En fait, un des problèmes clés de l'enseignement se situe sans doute à ce point précis. L'apprentissage en tant que tel ne doit probablement pas être continuellement improvisé ; mais peut-on considérer qu'il ait été mené à son terme tant que l'enseigné n'est pas capable de mettre en œuvre de lui-même les connaissances transmises par l'enseignant ? »* [Meljac 1979 p.222-223].

On peut saluer cette analyse très fine. Toutefois, C.Meljac ne fit qu'effleurer les questions relatives aux conditions effectives dans lesquelles le dénombrement pourrait être mis en œuvre : par exemple, tout en remarquant que *« absence et présence de collections modèles provoquent des effets d'ampleur et de sens inégaux suivant la tâche à accomplir »*, elle n'en tira aucune conclusion nette sur l'organisation possible de séquences d'apprentissage. Elle construisit cependant une expérimentation (les poupées) pour la différencier de l'épreuve des jetons : l'épreuve « E » (des jetons) consiste à produire une collection équipotente à une collection de référence toujours visible. L'épreuve des poupées se réfère au cas « Jean Pierre » très finement étudié par Gréco [Meljac 1979 p.46]. Dans cette épreuve, l'enfant doit aller chercher des robes pour 4, 6 ou 9 poupées. La distance entre les poupées et les robes est étudiée comme variable de la situation [Meljac 1979 p.86].

Ces nouvelles approches ouvrirent la voie à des recherches sur l'élaboration de situations d'apprentissage des premiers nombres et de la numération

- Habiba el Bouazzaoui [El Bouazzaoui H.1982] reprît les conclusions de C.Meljac concernant l'épreuve des poupées et celle des jetons et conclut à une sous-estimation de l'influence des rétro-actions (pourtant voulues par C.Meljac) sur les différences de résultats entre les deux épreuves. [El Bouazzaoui H. 1982 p. VI et VII]. Partant du principe que les savoirs mathématiques prennent du sens dans les problèmes qu'ils permettent de résoudre efficacement, elle proposa alors une première analyse détaillée de la situation fondamentale du nombre (au sens de la théorie des situations) et étudia alors les influences significatives de variables de cette situation sur les acquisitions numériques des enfants de cours préparatoire.

Dès lors, l'école maternelle commença à revenir sur les contenus à donner aux activités pré-numériques. Une première attitude fut de mettre en œuvre des versions simplifiées de la situation fondamentale du nombre, en particulier en grande section de maternelle, voire en moyenne section. Perès [Perès J. 1986 et 87] et une équipe d'enseignants[6] travaillèrent sur une autre voie : l'élaboration de codes écrits communs à un groupe d'élève, comme réponse à des problèmes de contrôle de

[6] Il s'agit des enseignants de l'école maternelle Jules Michelet de Talence en Gironde .

collections, reprenant en cela le schéma classique développé dans la théorie des situations.

3. les nouveaux outils de la didactique pour redéfinir le champ des activités pré-numériques :

Vergnaud montre que quelles que soient les conditions dans lesquelles les élèves apprennent, il existe des régularités [Vergnaud G. 1991] qui caractérisent l'appropriation d'une connaissance donnée chez des catégories de sujets. Les travaux sur les rapports entre connaissances et savoirs [Centeno J. (1992)], [Conne J. (1993)] montrent que l'élève doit, parmi les connaissances nécessaires à l'apprentissage d'un savoir mathématique visé, mettre en œuvre des connaissances qui ne sont pas enseignées bien que l'on attende de lui qu'il les utilise.Le professeur se fonde souvent sur des savoir-faire, des connaissances diffuses qu'il ne peut prendre en charge. Les réponses fournies à cette observation de manques dans l'enseignement renvoient parfois à des tentatives d'enseignement direct de ce que l'on appelle des métaconnaissances. Or « *Le problème posé n'est pas celui de métaconnaissances, mais bien le problème didactique de raccordement entre savoirs constitués et connaissances, problème face auquel le maître se trouve fort démuni, obligé qu'il est par le contrat didactique envers une certaine description du savoir.* »[Brun J. 1994]. Pour montrer que certains domaines non pris en charge par le système enseignant constituent bien plus que des savoir-faire, mais plutôt de véritables connaissances qui pourraient être enseignées, il faut mettre au point une méthodologie de reconnaissance des conceptions des élèves relativement à ce domaine. Ce travail méthodologique fut abordé chez Ratsimba Rajohn H. [Ratsimba Rajohn H. 1982] à propos de conceptions des nombres rationnels. En utilisant la même méthodologie [Briand J. 1993 p.129-132] j'ai conduit ma recherche, dans le cas du pré-numérique, à propos des tâches d'inventaire nécessaires au comptage d'une collection. Dans ce domaine, cette façon d'orienter la recherche oblige alors à relire la tâche d'un sujet dans une situation ou le nombre est en oeuvre, à étudier les connaissances qui y sont mobilisées, voir si elles peuvent constituer un objet de savoir (repéré ou non actuellement) , et ainsi, identifier d'autres contenus pré-numériques.

3.1. Des connaissances nécessaires : l'exemple de la conception des collections

La production d'une collection est souvent confondue avec la manipulation qui permet le regroupement d'objets.

> Par exemple : lorsqu'un observateur voit un enfant prendre des objets et les mettre dans une boîte, il peut dire qu'une collection a été constituée. Mais il ne peut pas affirmer que l'enfant a conçu une collection.

Le doute subsiste puisque la situation prend en charge, la réalisation effective de la collection. C'est seulement la manipulation qui est collectivisante. Nous partirons d'une phrase souvent entendue dans les classes et lue dans les manuels : *"Compte le nombre d'éléments de cette collection*" Apparemment, il n'y a pas de mystère dans cette injonction. Cette phrase induit pourtant un fait important : la conception de la collection ne fait pas l'objet d'un enseignement. La collection est montrée. Dès lors, le système ne dispose d'aucun moyen pour contrôler si la collection est effectivement objet pour le sujet ou si la collection n'existe que du point de vue de l'enseignant ou de l'observateur. Tout ce passe comme si cela allait de soi. Or, construire les entiers naturels, c'est mesurer cet objet « collection », mais "la collection" n'est pas un objet matériel. C'est en soi un objet de la structure mathématique et le domaine de ces objets est ce qui permet d'assigner une structure d'espace mesurable. Nous dirons que si le sujet ne dispose pas de moyen de déterminer l'objet "collection", il ne peut en concevoir un mesurage.

La construction effective d'une collection par l'élève avait été étudiée par Pérès [Pérès J. 1986 et 87] qui en avait proposé une situation fondamentale. La détermination de l'objet "collection" entre en jeu lorsqu'il s'agit d'identifier une collection, c'est à dire de la trouver identique (ou non) après transformations. L'exemple suivant précise notre propos : des objets sont mis dans une boîte sans couvercle. Ils sont tous visibles. La boîte est alors soustraite au regard des enfants, puis elle réapparaît. Nous disons qu'un enfant a déterminé la collection s'il dispose de moyens de s'assurer que les objets qu'il voit après cette transformation sont tous bien les mêmes ou non. Pour reconnaître l'objet "collection", le sujet doit donc disposer d'un système autre que l'objet lui-même. Nous dirons que la reconnaissance de l'objet collection (qui est tout sauf réel) met en oeuvre un système sémiotique qui produit la collection (chez l'élève) comme signe identificateur de la collection (proposée par le milieu).

A l'époque, Pérès s'intéresse à la production de signes puis de listes. Il travaille sur la situation suivante : retrouver le contenu exact d'une boîte (trésor) en se souvenant de tous les objets qui y sont enfermés. En travaillant sur les variables qui commandent cette activité (en particulier en utilisant les travaux de Digneau J.M. sur le saut informationnel [Digneau J.M. 1985], Pérès construit des situations qui provoquent, chez les enfants de grande section, le besoin de constituer des listes. Ce jeu des listes a, pour lui, un objectif précis : [Pérès 1987 p.3]."*Nous avons dit qu'au cours de cet apprentissage, les enfants amélioraient leur désignation en la complexifiant, en les rendant plus aptes à désigner efficacement les objets, en réduisant les incertitudes ou confusions. Cette amélioration, il faut la comprendre comme le symptôme d'un travail d'élaboration de la part des enfants et c'est cela qui est le véritable objet de notre apprentissage. Autrement dit, nous ne visons pas essentiellement l'apparition de désignations correctes mais plutôt ce qui les rend possible, c'est à dire les processus constructifs internes mis en oeuvre par l'enfant.*

C'est dans cette perspective que sont élaborés les obstacles auxquels ils sont confrontés."

Dans ma recherche, j'examine alors ce qui constitue deux formes différentes de reconnaissance d'une collection : l'identification par la désignation et l'identification par dénomination, avec pour but de montrer en quoi la tâche d'inventaire est le moteur de l'identification de l'objet collection. Pour étudier les instruments de la détermination des objets (donc des collections à mesurer dans le comptage), je propose deux définitions :

- désigner consiste à attribuer à un objet un signe par un moyen qui ne permet pas la construction a priori de noms pour d'autres objets différents. Le système de désignation ne structure pas l'univers des objets. (Par exemple, montrer un objet c'est le désigner.)

- dénommer consiste à attribuer un nom à chaque objet, c'est à dire produire un signe dans un système qui permet la construction de noms pour des objets différents. Ce système permet en général d'attribuer à d'autres objets un autre nom. La conséquence est que le système de dénomination choisi induit souvent une structuration de la collection. Le nom est interne au système qui permet de fabriquer d'autres noms ; cela induit une structure. Dénommer peut alors impliquer la production d'une structure sur un ensemble.

> Prenons un exemple pour illustrer : soit une collection composée des objets suivants : 8 roues, 2 plaques LEGO, 4 tiges métalliques, deux bonhommes LEGO assis. Pour contrôler cette collection, par exemple pour s'assurer que cette collection est restée inchangée après transformation, il est possible d'en faire une liste en dessinant chaque objet : chaque objet est désigné ou dénommé ; la liste constitue une désignation de la collection. Mais il est aussi possible de mettre en jeu une connaissance qui structure la collection : par exemple le sujet y reconnaît l'ensemble des objets nécessaires à la réalisation de deux voitures simples (voiture simple dénommant la collection : une plaque, 4 roues, 2 axes et le chauffeur). Cette dénomination facilite grandement le contrôle de la collection.

Il est facile d'imaginer que plusieurs dénominations sont possibles et qu'elles ne mobilisent pas les mêmes connaissances. La désignation et la dénomination sont donc concurrentes. Le rapport entre la désignation et la dénomination peut, par exemple permettre de générer une exploration à l'aide de partitions : selon que dans une collection, le sujet dispose ou non de connaissances lui permettant de classer dans une même catégorie (les ronds jaunes, etc.), il explorera l'ensemble d'une façon ou d'une autre.

C'est en partant de ces constats qu'il nous est apparu nécessaire d'étudier les conditions de réalisation d'une liste dans les conditions vues précédemment.

3.2. Faire un inventaire :

Pour être efficace, une liste suppose d'abord qu'à un seul objet corresponde un symbole et un seul, ensuite que tous les objets de la collection soient désignés. Autrement dit, il est nécessaire de mettre en correspondance rigoureuse les objets et leur désignation. Or, à l'âge des enfants intéressés par cette activité, les opérations bijectives ne sont pas encore spontanément réussies. Pérès précise bien l'objet de l'apprentissage visé : *"Autrement dit, nous ne visons pas essentiellement l'apparition de désignations correctes mais plutôt ce qui les rend possible*" [Pérès J. (1986) déjà cité]. Par exemple, les élèves peuvent réaliser les dessins des objets sans avoir un projet d'inventaire. Il leur faut du temps pour s'affranchir de répétitions ou d'oublis. Les enfants peuvent d'ailleurs produire une bonne liste, mais au hasard de la prise des objets. (Par exemple, prise des objets et pose à côté, peuvent permettre de produire une bonne liste à l'insu des enfants).

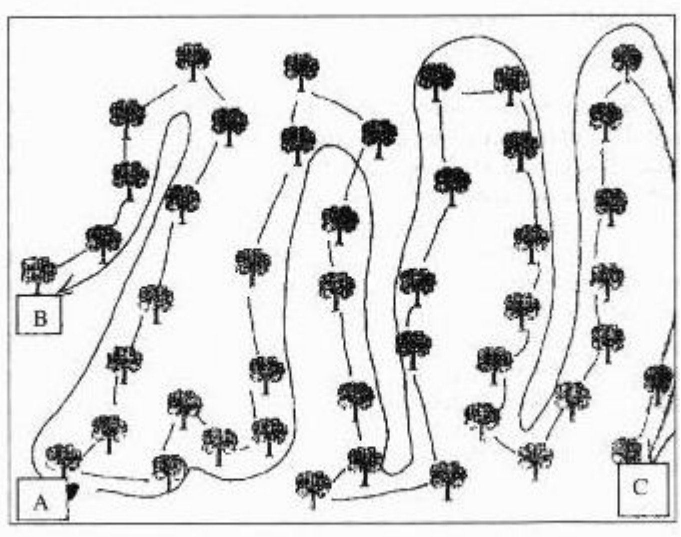
Le projet effectif de contrôle de l'exhaustivité afin de reconnaître ou de reproduire l'ensemble n'est pas, dès le début, le moteur de l'action, encore moins de la formulation. La découverte de la connaissance de l'énumération devient petit à petit un projet effectif (en réponse aux erreurs décelées dans la situation) et ce projet se construit en même temps que se construisent des processus de dénomination des objets. C'est cette connaissance que nous étudions maintenant.

3.3. L'énumération comme exemple de connaissance nécessaire à la construction du nombre et des opérations arithmétiques :

J'ai montré [Briand J. (1993)] que, pour contrôler une situation de comptage, l'enfant doit faire fonctionner une connaissance (l'énumération) qui se réfère à l'exploration de la collection et qui conditionne complètement le bon déroulement de l'activité.

Prenons un exemple :

Voici le travail d'un élève que nous avons observé en cours préparatoire (5-février). Il s'agissait de compter le nombre d'éléments de la collection qui lui était présentée sous cette forme. L'élève était invité à écrire sur la feuille si il le jugeait utile. Il fait des gestes mais n'écrit pas. Nous lui proposons d'écrire ses gestes (il effectue deux parcours orientés représentés (par nous) par les deux chemins fléchés qui partent de l'arbre noté ultérieurement A (par nous) en bas à gauche). Il commence par cet arbre pour compter et dit : « je ne sais pas faire le rang ». Il échoue. Il ne parvient pas, en fait, à réorganiser les deux chemins en un seul. Pour cela, il faudrait décider de compter à partir d'une extrémité (B ou C) du chemin, ou bien partir de A, mais effectuer une rupture, pour repartir de A après avoir couvert un parcours. C'est ce que généralement, on appelle une « mauvaise organisation du comptage »[7]



Quelle est la nature du problème qui se pose à cet élève? Ce ne sont pas les connaissances relatives au nombre qui sont en cause. L'enfant échoue alors qu'il dispose de la suite numérique et d'un procédé d'exploration relativement bien organisé (deux chemins). Il s'agit donc d'une absence de connaissance (l'énumération) qui se manifeste par une absence de synchronisation effective entre une connaissance numérique et une organisation conjointe de la collection et qui empêche l'inventaire de la collection.

Examinons l'activité en détail : pour compter le nombre d'éléments d'une collection finie montrée, l'élève doit nécessairement :

1- Etre capable de distinguer deux éléments différents d'un ensemble donné.
2- Choisir un élément d'une collection.
3- Enoncer un mot nombre. (« un » ou le successeur du précédent dans une suite de mot-nombres).
4- Conserver la mémoire de la collection des éléments déjà choisis.
5- Concevoir la collection des objets non encore choisis.

---

[7] I.N.R.P. « un deux beaucoup passionnément » p.18

6- Recommencer (pour la collection des objets non encore choisis) 2-3-4-5 tant que la collection des objets à choisir n'est pas vide.
7- Savoir que l'on a choisi le dernier élément.
8- Enoncer le dernier mot nombre.

Les étapes en italiques (1,2,4,5,6,7) constituent une tâche que nous appellerons tâche d'inventaire, au cours de laquelle il s'agit de passer en revue tous les éléments d'une collection finie une fois et une seule. Cette tâche (d'inventaire) caractérise donc une connaissance non enseignée que j'ai appelé énumération, faute d'un autre nom.[8]

Précisons, selon le champ dans lequel nous nous plaçons, plusieurs définitions de l'énumération en nous fondant sur un exemple : soient deux listes (L et A) de noms : quels sont, parmi les noms de la liste L ceux qui sont membres de la liste A ?

L'ensemble cherché est $A \cap L$.

- Si l'on s'en tient à une description mathématique, tout ordre total sur un ensemble fini détermine une permutation, c'est à dire un inventaire déjà là. Nous avons une énumération résultat. (sens 1).
- Si l'on étudie ce travail toujours d'un point de vue mathématique, mais cette fois ci pour tenter de modéliser l'algorithme producteur de cette permutation, nous devons faire une hypothèse sur ce qui a conduit le sujet à passer d'un élément au suivant. Là interviennent beaucoup de variables.

> Ici, par exemple, la constitution effective de l'ensemble fait appel à au moins un algorithme. Par exemple, (en ayant rangé les deux listes) :
>
> Soit a=card(A), l=card(L). A(i) le ième terme de A et L(i) le ième terme de L. Une procédure sera :
>
> *Pour i allant de 1 à a*
>   *Prendre le i° élément de A*
>   *pour j allant de 1 à l*
>   *si A(i)=L(i) alors E devient* $E \cup \{A(i)\}$
>   *jusqu'à l*
> *jusqu'à a*

---

[8] PETIT LAROUSSE :Enumérer : Enoncer successivement les parties d'un tout, passer en revue. LAROUSSE Dictionnaire étymologique 1992 p.267 : du latin enumeratio, action de compter complètement. Dans l'étymologie même du nom, le comptage paraît nécessaire, alors que la définition du petit Larousse ne fait pas référence au comptage.

Cet algorithme modélise une procédure possible de l'élève. Il mobilise le produit cartésien AxL. La maîtrise des connaissances logiques est indispensable pour comprendre la situation, mais cette maîtrise s'acquiert en bonne partie par l'énumération des ensembles et moins qu'on ne l'a cru directement par les opérations logiques. Nous dirons qu'entre les opérations logiques et les opérations sur les énumérations il y a des correspondances mais pas identité[9].
Dans le cas simple du comptage, c'est le plus souvent la proximité qui conditionne le choix de l'élément qui succède, mais dans les cas plus complexes (en analyse combinatoire), la détermination de la collection passe par un changement de conception des objets, changement qui permettra de mieux organiser l'exploration exhaustive (les élèves de terminale se trompent fréquemment sur la nature des objets qui entrent dans le calcul des éventualités). L'énumération d'un ensemble fini est alors un algorithme producteur d'une permutation de cet ensemble.(sens 2)

- Enfin, du point de vue didactique, l'énumération est la connaissance mise en jeu lorsqu'un élève effectue un inventaire. L'énumération est la connaissance productrice d'inventaires (sens 3). C'est à ce moment, un modèle implicite d'action, un ensemble de procédés locaux mis en oeuvre par l'élève pour réaliser concrètement une énumération au sens (2).

En étudiant alors l'énumération auprès d'enfants de cours préparatoire, j'ai montré :

- que dans des situations de comptage, les enfants se répartissent en au moins deux catégories selon deux conceptions de l'énumération. Ce sont les énumérations directes qui mettent en jeu un rangement de la collection et les énumérations fondées sur un partitionnement de celle-ci. Pour cela, je m'appuie sur des analyses de correspondances, et montre que ces deux conceptions s'adaptent différemment au comptage. [p.165-180].
- que les conditions de l'énumération influent sur le comptage [p. 81, 134, 197]
- que des variables modifient significativement les conditions de l'énumération.
- que des difficultés dans le comptage relèvent de l'énumération.
- que les pratiques scolaires induisent des énumérations qui rendent non compétitives des énumérations qui seront pourtant fécondes plus tard.

[9] C'était pourtant une hypothèse retenue lors de la réforme des mathématiques des années 70. L'enseignement des ensembles et des opérations ensemblistes devait faire progresser l'enseignement du nombre.

Remarque : bien que dans le cadre de cet article, je n'explore que le champ pré-numérique, j'ai montré que l'énumération est mobilisée sous d'autres formes à d'autres moments dans des apprentissages mathématiques, en particulier :

- le domaine des opérations arithmétiques et par exemple l'enseignement de la multiplication : selon que l'enfant concevra un tableau de a lignes et de b colonnes comme un ensemble constitué de cases ou de lignes formant partition, il disposera de moyens différents de dénommer cet ensemble. La conséquence sera qu'il déterminera ou non l'ensemble d'une façon propice à l'émergence du message axb comme signe du cardinal. Le recours aux opérations apprises pour mesurer une collection n'est donc pas suffisant pour réussir le dénombrement d'une telle collection dès que les conditions deviennent a-didactiques. [p.141-156]
- dans des situations d'analyse combinatoire, l'impossibilité à changer de conception relativement aux objets à dénombrer constitue un obstacle didactique à l'énumération [p.218-222 & p.199-218]. Pour un exercice simple d'analyse combinatoire, nous avons dénombré, sur 100 copies, 14 familles de résultats différents [p.207], sans erreur de calcul. L'erreur venant toujours d'une conception inadaptée des objets à dénombrer. Nous avons aussi montré en quoi des questions introductives posées (sujet Baccalauréat série D année 1992) [p .213,214], loin d'aider les lycéens, renforcent cette difficulté et contribuent à rendre les résultats étonnamment mauvais.

Ayant identifié l'énumération comme une connaissance, je présente maintenant une famille de situations d'apprentissage de l'énumération auprès de jeunes élèves (4 à 6 ans). L'étude porte sur la façon dont les élèves sont conduits à produire des inventaires dans un processus où la connaissance visée n'est pas directement enseignée par le maître mais peut progressivement apparaître chez l'élève à partir de multiples remaniements des stratégies utilisées, ceci étant le résultat des confrontations avec un certain type d'obstacles rencontrés au cours de l'activité. Il s'agit là, de la caractéristique des situations d'apprentissage par adaptation, telles qu'elles ont été théorisées et formulées par G. Brousseau dans la théorie des situations.

DEUXIEME PARTIE[10]

Nous venons de voir que, pour que l'élève apprenne ou utilise les savoirs scolaires, il doit mettre en oeuvre des connaissances que le professeur ne peut lui enseigne pas. Il ne suffit donc pas de se servir de l'organisation des savoirs « déjà là » pour organiser l'enseignement. L'observation des élèves montre que ceux-ci mettent en œuvre des connaissances qui ne s'identifient pas au savoir repéré par l'institution.

Comment alors mettre en place des situations dans lesquelles l'énumération d'une collection soit seule (indépendemment du nombre) la solution à un problème posé ?

Au cours de la recherche déjà citée, plusieurs dispositifs de mise en œuvre de la situation fondamentale de l'énumération (dans le cadre de collection finies d'objets visibles) ont été mis au point. En particulier une modélisation à l'aide de l'outil informatique a été réalisée [Briand J., Brousseau G., Oyallon J.L. 1995]. Les expérimentations ont déjà été rédigées [Briand J. 1985].

Nous proposons ici l'étude d'une ingénierie plus large dans une classe, avec, en particulier :

- un exemple d'organisation d'une situation d'apprentissage de l'énumération dans le cadre de la classe de moyenne section de l'école maternelle[11],
- l'étude d'effets produits par de légères modifications du dispositif, souvent à l'insu des enseignants.
- Les questionnements restés en suspend, en particulier dans des domaines connexes de savoirs tels que l'argumentation.

4. Une modalite de la situation fondamentale de l'enumeration : Analyse du champ de contraintes.

4.1 Présentation du dispositif et analyse a priori :

Le dispositif s'adresse à des élèves de 4-5 ans. Un élève dispose devant lui (sur une table) d'un tas de boites d'allumettes identiques percées sur le côté d'un petit

[10] Un grand remerciement à l'équipe de collègues de l'école maternelle Jules Michelet, et en particulier à Michèle Hervouet et Marie José Lacave-Luciani pour leur collaboration précieuse.

[11] élèves de 4-5 ans.

trou permettant le passage d'une allumette. Des bâtonnets (sans le phosphore) sont les allumettes. Ces bâtonnets, en grand nombre, sont dans une boite plastique. Il s'agit de placer une allumette et une seule dans chaque boite sans l'ouvrir, de savoir lorsque l'on a terminé, puis de s'assurer si l'on a réussi ou échoué en ouvrant les boites. S'il y a une seule allumette dans chaque boite et si aucune boite n'est vide, alors l'élève a réussi.

Nous avons souhaité intégrer ce travail dans une pratique de classe habituelle : en collectif, la maîtresse présente l'activité en l'appelant « jeu des boîtes d'allumettes ». Elle ne fait pas travailler les élèves. Puis, après avoir lancé d'autres ateliers autonomes, la maîtresse appelle trois enfants : un va jouer et deux observent. Ils joueront après.

Le rythme de travail choisi est de faire passer environ 6 élèves par séance, ce qui demande donc 4 à 5 séances pour que les élèves aient effectué le même type de travail. Cette expérimentation s'est déroulée de début novembre 96 à la mi-février 97.

Caractéristiques de cette situation a-didactique :

Nous analysons quel peut être l'enjeu de cette situation pour l'élève, en fonction en particulier des possibilités d'action, de choix, de décision, de contrôle et de validation dont il dispose. Nous prévoyons les champs de comportements possibles.

Les variables que nous avons repérées sont :

V1- Le type d'espace dans lequel l'élève va travailler. Ici, nous avons choisi de fixer cette variable. Il s'agit du micro-espace du plan de travail de la table. Chaque enfant travaille sur une table 120x80.

V2- Le nombre de boîtes.

V3- Le fait que les objets (boîtes d'allumettes) soient effectivement déplaçables ou non.

V4- La possibilité de déplacer les boîtes dans un espace restreint ou plus large. (liée à v1 et v3)

Remarque : le marquage des boites n'est ni suggéré, ni institué.

Analyse de la tache, Familles de stratégies attendues :

L'élève a devant lui des boîtes. Sa tâche consiste à constituer une collection nouvelle d'éléments « boîte-allumette » en distinguant en permanence cette nouvelle collection de la collection des boîtes « encore » vides.

Les stratégies possibles (gagnantes ou non) peuvent être les suivantes :

- L'élève prend une boîte, une allumette, met l'allumette dans la boîte, pose la boîte « à distance » des boîtes non encore remplies.
- L'élève prend une boîte, une allumette, mets l'allumette dans la boîte, pose la boîte parmi les autres boîtes non encore remplies.
- L'élève associe une allumette à chaque boîte, puis met les allumettes dans chaque boîte. (Cette stratégie a peu de chances d'apparaître.)

Variantes prévues de la situation

Première variante : 8 boîtes déplaçables sur une table 120x80.
Deuxième variante : 20 boîtes déplaçables sur une table 120x80
Troisième variante : (pour faire construire le marquage). 20 boîtes fixées sur un support.

Auxquelles nous avons ajouté deux variantes :

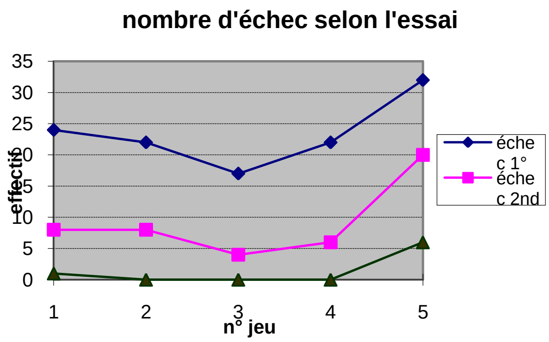
- Lors du deuxième jeu, nous avons constaté que les élèves secouaient les boîtes pour contrôler la présence ou l'absence d'allumettes. Nous avons donc décidé de placer une allumette dans les boîtes, la consigne devenant « il faut qu'il y ait deux allumettes par boîte ». Nous allons étudier dans la suite de cet article en quoi cette décision n'était pas utile.
- Une collection de 20 boîtes rend la situation inutilement complexe. Nous l'avons observé dès les premiers élèves. Aussi, nous avons rapidement réduit à 15 le nombre de boîtes.

	Configuration matérielle	**Raisons des choix.**	**Analyses effectuées après l'expérimentation.**
JEU 1	8 boîtes déplaçables		- Stratégies pour remplir des boîtes, élaborer une collection. - Etude d'énumérations induites involontairement.
JEU 2	20 boîtes déplaçables	Changement significatif du nombre de boîtes.	- Influence du passage de 8 à 20 sur les résultats, et sur les stratégies mises en œuvre.
Première phase collective		Faire formuler les stratégies, faire anticiper un résultat	- Passage des propositions aux prédicats puis aux calculs sur prédicats. - Traitement des erreurs par l'enseignant. .
JEU 3 (2)	20 boîtes déplaçables		
JEU 4	15 boîtes déplaçables. Une allumette déjà présente dans la boîte.	Le secouage (deux allumettes) 15 : 20 rend trop long la validation	- Etude détaillée du « secouage ».
Deuxième phase collective	15 boîtes déplaçables. Une allumette déjà présente dans la boîte.	Faire formuler les stratégies Faire anticiper un résultat	- Un savoir et son enseignement possible ou impossible. - Limites de ce type de séances. - Absence d'une situation a-didactique de formulation
JEU 5	15 boîtes non déplaçables. A nouveau une seule allumette.	Enumérer une collection d'objets non déplaçables. Faire des marques.	- Analyse de la complexité de la tâche.

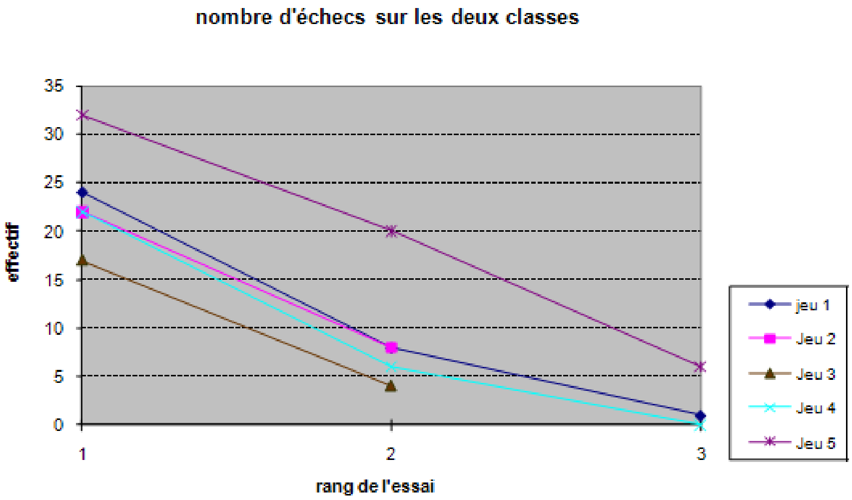
4.2 les résultats observés :

Résultats bruts (voir le tableau des résultats en annexe) .

Echec selon l'essai



Ce schéma montre que, pour chaque situation, les progrès sont évidents. L'enchaînement des jeux 1, 2 , 3 montre qu'à chaque jeu, le nombre d'échecs au premier essai redevient plus important que le nombre d'échecs au dernier essai du jeu précédent, mais en même temps, le progrès réalisé en trois essais par jeu reste très significatif. Le passage à deux allumettes et surtout le blocage des boîtes d'allumettes (jeu 5) vont augmenter le nombre d'échecs à rang d'essai identique. Les variantes informationnelles sont significatives.



Ce deuxième schéma montre que, quelque soit les jeux, il y a progrès. Le progrès ne se mesure donc pas uniquement d'une séquence à l'autre, d'un jeu à l'autre, ce qui serait nier l'apport des modifications de variables significatives, mais à l'intérieur d'une même configuration de jeu.

Remarque : Peu d'élèves échouent après trois tentatives. Pour ceux-ci, nous prenons pour engagement de ne pas les confronter à l'échec répété. Nous proposons qu'ils demandent de rejouer lorsqu'ils en manifesteront le souhait. C'est un rapport, non tendu, à la situation qui doit être maintenu afin que l'élève ait envie de réussir, d'y voir un enjeu le concernant.

5. analyse détaillée du jeu 1 : mise en évidence d'effets didactiques

5.1. Les stratégies repérées :

Les élèves parviennent à réussir au jeu 1 (24 échecs en premier essai, 7 au deuxième (donc 24-7 réussites) et 1 au dernier essai (donc 7-1 réussites))[12].

[12] Les élèves qui ont réussi ne rejouent pas.

Les stratégies mises en œuvre pour réussir sont :

1- mise à l'écart des boîtes remplies.

- Sur la table
- Sur la table et alignées, ou en bordure de table.
- Sur la table et alignées et empilées.

2- Repérage d'un chemin, a priori, permettant une exploration exhaustive de la collection première.

- L'élève replace la boîte remplie à sa place initiale.
- L'élève ne se préoccupe pas de la place de la boîte remplie.

3- Organisation préalable de la collection des boîtes vides.

Remarques :

- Nous mettons le « secouage » à part puisqu'il se greffe sur les stratégies repérées.
- Le rangement, a priori, des boîtes vides (en ligne) afin de mieux contrôler l'exploration future, n'est jamais apparu.
- La consigne empêche la réalisation de la stratégie qui consisterait à placer les allumettes sur les boîtes (une sur chaque boîte) ou des allumettes à moitié enfoncées.

5.2. Deux effets d'ergonomie avec pour conséquences : une collection non construite et une énumération induite.

5.2.1.Premier effet :

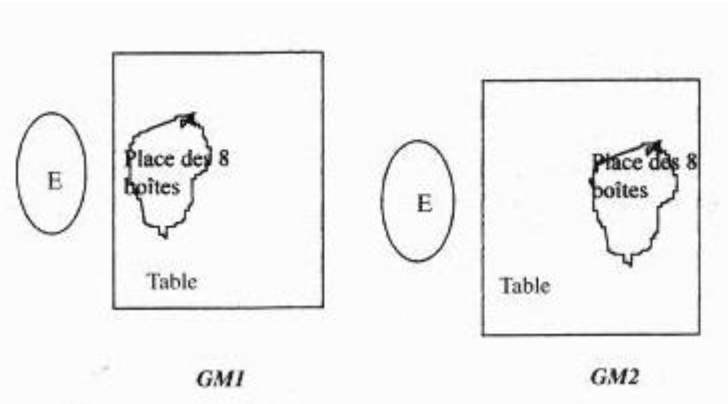
Les résultats décrits sont issus de deux classes que nous nommons GM1 et GM2. Les résultats obtenus en GM1 et GM2 au premier essai sont :

	E	R
GM1	13	11
GM2	11	16

Ils paraissent semblables. Or, nous avons noté, en début d'observation (premiers groupes de 6 élèves) en GM1 puis en GM2, une différence sensible de résultats : (5 échecs sur 6 en GM2, 6 réussites sur 6 en GM1).

Nous nous sommes rendus compte que la situation n'était pas présentée de la même façon aux deux classes, que chaque maîtresse avait travaillé la séquence à sa façon, et que deux interprétations de la séquence s'étaient faites :

- Dans la classe GM2, la maîtresse pose, en vrac, les boîtes d'allumettes loin de l'élève. Pour cela, elle a mis les boîtes dans une grande boîte (à chaussure) qu'elle renverse sur la table. En GM1, les boîtes sont disposées assez proche de celui-ci.



Pour mettre une allumette dans chaque boîte, l'élève doit :
1- Se saisir d'une boîte.
2- prendre une allumette *(ces deux actions peuvent être permutées*).
3-mettre l'allumette dans la boîte.
4- poser la boîte remplie
- Recommencer cette séquence.

Dès la deuxième boîte, la réussite impose la constitution, par énumération, de la collection des boîtes remplies.

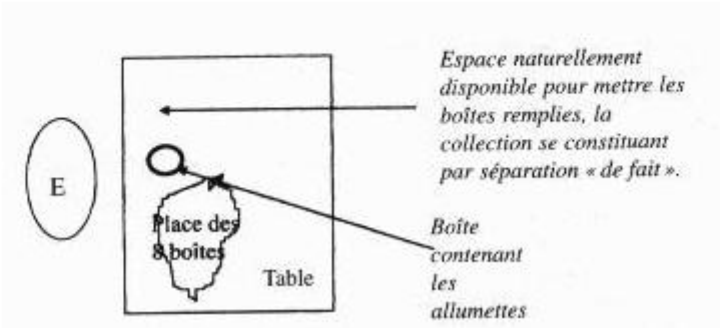
Dans le cas de GM2, l'action 1 impose un déplacement corporel (tendre la main, se lever un peu de sa chaise). L'action 4 sera réalisée au moindre coût en posant la boîte devant soi. Dans le cas de GM1, l'action 1 n'impose aucun déplacement, l'action 4 doit alors s'accompagner d'un geste volontaire (coûteux) de mise à l'écart, geste qui signifiera une intention de constitution de collection.

Dans le premier cas, pour des raisons ergonomiques élémentaires, l'élève n'a pas (ou peu) en charge l'énumération. La deuxième collection (boîtes-allumettes) peut se construire totalement à son insu.

On peut donc faire l'hypothèse que la différence de résultats est largement explicable par cette différence d'organisation.

5.2.2.Deuxième effet :

Une autre contrainte ergonomique a joué comme une variable de la situation : la place de la boîte qui contient les allumettes. Selon la place qu'elle occupait sur la table, elle constituait, ou non, un moyen mis à disposition des élèves pour qu'il n'aient pas à confondre les boîtes remplies et les boîtes à remplir :



Remarque : nous n'avons pris conscience de ces phénomènes qu'après la première observation de 6 élèves dans l'une et l'autre classe. Ensuite, les dispositifs furent identiques : boîtes placées devant l'élève, boîte contenant les allumettes en bord de table.

5.3. Etude détaillee de l'effet du secouage :

A un moment ou à un autre, les enfants secouent pour savoir s'il y a une allumette dans une boîte.
Exemple 1 : Romain place les boîtes pleines avec les vides. Il perd. Au deuxième essai, il écoute le bruit en secouant. Il reprend toute la collection et trie les vides et les pleines.
Exemple 2 :Damien en GM1 prend une boite, déjà remplie. Il découvre le bruit de l'allumette dans la boite. Il secoue une autre, et recommence. Il fait un tri fondé sur le bruit. Secoue mais n'organise pas spatialement (ne conçoit pas) la collection des boîtes remplies. Il met alors deux allumettes dans une boîte.

Constats :

- Le bruit est un événement (qui peut avoir un caractère ludique évident).
- Il peut devenir une propriété qui caractérise un nouvel objet : boîte avec allumette.
- Il peut être un moteur de tri de ces objets afin de constituer une nouvelle collection.
- Il peut, en inter-action avec une organisation spatiale, être une aide au contrôle de l'énumération.

L'élève qui ne se fonde que sur le tri à l'aide du bruit, sans constituer spatialement la nouvelle collection des boîtes remplies, est devant une tâche très coûteuse et non totalement fiable que nous analysons ainsi : soit E tel que card(E)=n. Il s'agit pour l'élève de :

1- prendre un élément de E

2- Construire un nouvel élément (couple (boîte, allumette)), lui attribuer une propriété (bruit) qui caractérise ce nouvel objet. (Et constituer un sous ensemble de R de E)

3- prendre un élément de C(E,A).

4- recommencer 1 jusqu'à ce que E soit vide.

Mais l'exécution de cette boucle ne peut se faire que si l'élève utilise en permanence le contrôle par le bruit afin de ne pas reprendre un élément de R et s'il dispose d'une stratégie pour contrôler l'arrêt de la boucle. Or, nous avons constaté que plusieurs élèves qui utilisaient le bruit, mais pas à chaque boucle, mettaient deux allumettes dans une boîte. Enfin, pour contrôler l'arrêt, il faut être sûr que toutes les boîtes ont eu une allumette, il fait donc les secouer toutes, mais comment contrôler si TOUTES sont secouées alors que la collection « boîtes-allumettes » peut ne pas être la préoccupation de l'élève.

En conclusion, contrairement à une première analyse qui pourrait en être faite, le « secouage » d'une boîte n'est pas suffisant pour réussir. Il ne constitue pas une stratégie permettant totalement l'évitement de l'acquisition du savoir visé (constitution d'une collection par pratique énumérative). Toutefois, par le contrôle même incomplet qu'il permet, il augmente la probabilité de réussir sans avoir de procédure énumérative bien aboutie.

6. Analyse du passage du jeu 1 au jeu 2 (passage à 20 boîtes) :

1°) Nous faisons l'hypothèse que le passage de 8 à 20 boîtes permettra de mieux expliciter les stratégies de contrôle et de constitution de la collection des boîtes pleines.[13] Les résultats examinés plus haut ont montré qu'il n'y avait pas de différence significative sur les résultats si l'on prenait en compte le travail sur deux essais.

2°) Les résultats en GM2 sur les trois essais du premier jeu et les deux du second, sont les suivants :

STRATEGIE	PRECISIONS	Jeu 1	Jeu 2
- Pas de stratégie observée		2	2
- Mise à l'écart, des boîtes remplies.			
	- Sur la table	10	8
	- Sur la table et alignées, ou en bordure de table.	0	1
	- Sur la table et alignées et/ou empilées	8	11

[13] Mais nous n'avons pas préparé les élèves à ce projet : les questions « Est-ce que tu saurais faire avec plus de boîtes », de même que « qu'est-ce qui pense qu'il peut gagner?» n'ont pas été proposées aux élèves.

- Repérage d'un chemin, a priori, permettant une exploration exhaustive de la collection première		2	
	- L'élève replace la boîte remplie à sa place initiale.		
	- L'élève ne se préoccupe pas de la place de la boîte remplie.	5	5
- Organisation préalable de la collection des boîtes vides.			1

6 élèves secouent les boîtes en Jeu1. 12 élèves secouent les boîtes en Jeu2 (à des moments différents de l'activité).

3) Une cause d'erreur repérée est une rupture dans la suite : (B : boîte ; A : allumette).

B-A, B-A, B-A, B-A, etc. ou la suite A-B, A-B, A-B, A-B, etc.

par exemple, une suite :

B-A, B-A, A-B-A, B-A. qui conduit à la mise de deux allumettes dans une boîte ou à l'oubli d'une allumette, selon le moment où se fait la rupture.

Exemple :Tristan organise la deuxième collection par rangées de 4. Effectue un empilage sur un plancher de 4x2 qui délimite l'espace de la deuxième collection. Mais il regarde ce que fait la maîtresse et, à la troisième boite, il place une allumette puis une autre.
C'est le couple (allumette, boite) qui a été rompu. Se greffe le couple (boite, allumette), d'où deux allumettes dans la boite.

4°) Nous remarquons que la phase de validation est un moment au cours duquel les élèves :

- pensent qu'il est nécessaire d'ouvrir les boîtes qui restent même après avoir ouvert une boîte qui ne contenait pas d'allumette ou qui en contenait plus d'une.
- peuvent signifier les conditions de la réussite ou de l'échec.

Conclusions :

- le passage de 8 à 20 boîtes ne modifie pas significativement les résultats des élèves, en terme de réussite échec.
- les nouvelles contraintes ont permis l'émergence de stratégies d'organisation plus marquées (empilages, mises en ligne, bordure de table).
- la phase de validation est très fastidieuse.

7. analyse des phases collectives :

7.1. Questions de logique :

La première phase collective (à la suite du jeu 1) a permis
1°) de formuler une stratégie (« il faut mettre de côté »). Cette stratégie est formulée huit fois au cours de l'entretien.
2°) de prendre conscience de toute la logique en acte qui se développe derrière cette expérience et qui n'a pas été prise en compte au départ ou qui a été sous-estimée. « Perdu», « perdu un peu plus », « gagné », « gagné pour cette boîte ». Les élèves passent de l'énonciation de la valeur de vérité d'une proposition (il y a une allumette dans cette boîte) à l'élaboration conjointe de prédicats : « s'il existe une boîte sans allumette ... » « il y a une allumette dans cette boîte... », ainsi que d'un calcul sur ceux-ci : « donc il a perdu », « pour l'instant c'est juste ».

Il y a là un travail à poursuivre. Nous pensons que cette construction se fait dialectiquement avec la construction du concept de collection. L'hypothèse étant que la formulation de tels prédicats et des calculs sur ces prédicats participe à la constitution de la collection, que cela *« cimente » les objets pour en faire une collection.*

Dans les moments collectifs, nous avons constaté que les termes employés n'avaient pas de statut très clair. Par exemple, les termes « vérifier », « réussir », « échouer », qualifient tantôt une réussite locale (une allumette dans *cette* boîte) tantôt la réussite ou l'échec à l'activité (« tu as échoué »). L'enseignant doit alors improviser un discours qui tourne autour des prédicats sans qu'un contrat précis sur les exigences n'ait été négocié.

Le tableau suivant fait état des comportements attendus, des savoirs visés du point de vue du travail sur les propositions et les prédicats, et du point de vue des interventions du professeur.

moment étudié	**Analyse logique**	**analyse des comportements**	**savoir qui peut être visé**	**intervention possible**
secoue les boîtes (secouer avant l'action , secouer après l'action)	L'information donnée par le bruit permet de savoir s'il y a une (ou plusieurs) allumettes dans la boîte.	Permet de s'assurer de la présence d'une allumette.	Secouer avant permet de contrôler s'il y a présence d'une allumette. Secouer après ne permet pas de contrôler si la boîte était vide.	
Découvrir une boîte vide.	Signifie l'échec au jeu	Peut signifier échec pour cette boîte. (proposition) Peut signifier échec au jeu. (prédicat)	Il suffit.qu'une boîte ne contienne pas d'allumette. Il n'est pas nécessaire de vérifier pour celles qui restent.	« Il suffit » peut être repéré dans l'action (s'interrompt-on lors de la validation au cas où une boîte vidée apparaît). Peut être repéré dans le langage

7.2. Questions de contrat didactique :

Au cours des observations, nous avons constaté deux difficultés rémanantes pour les enseignantes. Nous décrivons ces difficultés, sans pour cela approfondir l'étude :

- Tout d'abord, le déroulement de ces séquences pose la question de l'enjeu. Quelle forme d'enjeu faut-il maintenir pour que les élèves prennent ce problème à leur compte ? La situation permet à l'enfant de savoir s'il a échoué ou réussi. A la suite de l'ouverture d'une boîte, quelle attitude le maître doit-il avoir ? Il faut que celui-ci montre que réussir et échouer ne sont pas deux issues auxquelles il convient d'attribuer la même valeur. Or les enseignants en maternelle rechignent à tenir ce contrat, pensant décourager l'élève.
- Pour conduire cette phase, nous avons constaté que c'est en l'interrogeant sur ce qu'il compte faire la prochaine fois, et non sur ce qu'il vient de faire, que l'élève prend petit à petit le projet à son compte. Cela suppose chez l'enseignant qu'il envisage l'apprentissage se faisant non seulement dans les séquences elles-mêmes, mais aussi d'une séquence à l'autre, y compris chez de jeunes enfants. L'anticipation d'une séance à l'autre nous semble être un élément du contrat didactique.
- La négociation du contrat n'est pas simple : l'enseignant est gêné lorsqu'il s'agit de trancher dans certaines circonstances. Par exemple : l'enseignant n'ose pas dire à T. qu'il a une bonne méthode mais qu'il s'est trompé parce qu'il a été distrait à tel moment.
- L'enseignant est souvent gêné lorsqu'une réponse juste a été donnée : le silence est interprété comme une annonce d'erreur.
- Le traitement des erreurs dans la relation didactique est aussi un point délicat ; certaines erreurs que les élèves font peuvent être traitées en classe, d'autres non. Telle erreur d'un élève peut être difficile à traiter en public. Les niveaux d'explication n'étant pas les mêmes d'un niveau de savoir à l'autre, une explication aisée à donner à un élève s'avérera intenable à entendre pour un autre élève. Le risque, pour l'enseignant, est de se contenter d'une interprétation scolaire, de se ramener au projet scolaire, alors que bien souvent il s'agit de conceptions plus fines en jeu. Il y a donc des erreurs que l'on a intérêt à corriger en public, d'autres qui se règlent avec un seul élève, et d'autres qui ne peuvent même pas être débattues (savoirs absents).

8. Analyse du jeu 4 : vers une situation a-didactique de formulation

Pour des raisons déjà évoquées, nous avons ramené le nombre de boîtes à 15. Les résultats ne sont pas significativement différents des précédentes séances. Le secouage est devenu un rite, certains élèves sourient, d'autres essaient de reconnaître le bruit de deux allumettes par rapport au bruit d'une allumette.

La phase de débat ne provoque pas de formulation interne à la situation : dans notre dispositif, un enfant regardait un autre effectuer le travail. Etait-ce utile? Il nous semble que l'on se fait beaucoup d'illusions à ce sujet. Plusieurs rôles sont possibles pour l'élève observateur. Prenons deux rôles possibles courants : un élève regarde un autre travailler en vue de faire la même tâche, ou bien en vue de prévoir si celui que l'on observe a réussi ou non. Dans le premier cas, certains enfants prennent cette place comme une place dans une file d'attente. Ces enfants n'ont pas d'engagement, pas de responsabilité dans l'action ou dans la formulation. Dans le deuxième cas, bien souvent l'élève observateur ne peut pas expliquer les raisons d'un éventuel échec. Il répète alors une phrase toute faite : « il a oublié une boîte » et donne alors une (sa) méthode pour « mieux réussir ». Il est rare qu'un élève puisse analyser ce qui a échoué dans la méthode de l'autre.

Un autre type de rôle, par une organisation du travail à deux, permettrait de rencontrer un nouveau problème dans lequel la connaissance interviendrait obligatoirement sous forme d'un langage. Il faudrait pour cela que l'équipe soit formée pour résoudre une tâche commune. Exemple de fonctionnement possible : consigne *« vous allez travailler à deux. A un moment donné, je demanderai à celui qui a commencé de laisser sa place à l'autre pour qu'il termine. Vous pourrez vous parler. Qui pense pouvoir réussir ? »*. Dans une perspective de travail sur le marquage (jeu 5 : voir ci-après) , l'interruption du jeu pourrait faire intervenir un marquage (un type de marquage, un repérage). Pour cela, il suffirait de préciser dans la consigne si les consignes de passage de relais peuvent s'effectuer par écrit ou oralement.

9. Analyse du jeu 5 (boîtes bloquées sur un plateau):

La construction du dispositif nécessite que l'on prenne en compte plusieurs problèmes :

- les boîtes sont collées sur un tableau blanc.
- On peut ouvrir les boîtes sans être gêné (en vue de la validation).
- La disposition de la collection est choisie sans structure spatiale évidente.

Nous avons choisi quatre stratégies qui, à leur façon, contribuent à mettre en évidence la complexité d'une énumération. Nous définissons comme rupture le moment de l'activité de l'élève pendant lequel il devra abandonner la collection du regard. Pour réussir l'inventaire de la collection, l'élève doit donc mettre en mémoire la collection déjà constituée (boîtes-allumette).

Elève	Action bouclée	Ruptures visuelles	Charge mémoire	Contrôle
S.	Ai : (rupture), prendre une allumette, choisir une boîte non entourée, mettre l'allumette, (rupture) prendre le stylo, entourer, (rupture) poser le stylo, Ai+1 : prendre une allumette, etc.	3 ruptures par boucle, autant de boucles que d'éléments N de la collection.	à partir de A2, l'élève doit mémoriser la dernière boîte entourée non encore remplie.	Contrôle par une mémorisation spatiale. N contrôles à effectuer
M.	Ai : entoure n boîtes (ne pose pas le stylo) , (rupture) prend n allumettes et met n allumettes. Ai+1 : entoure n boîtes, met n allumettes : à partir de A2,	(n=2) 2 ruptures par boucle. N/2 boucles.	A partir de A2, l'élève doit mémoriser les n (n=2) dernières boîtes entourées non encore remplies.	Contrôle par une mémorisation spatiale. N/2 contrôles à effectuer.
E.	A1 : met une marque au pied de chaque boîte. Ai : met une allumette, efface la marque correspondante. (rupture) Ai+1 : met une allumette, efface la marque correspondante.	Une rupture par boucle	Il n'y a rien à mémoriser.	Aucun contrôle à effectuer.
C.	Ai : (rupture), prendre une allumette, choisir une boîte non entourée, mettre l'allumette, (rupture) prendre le stylo, entourer, (rupture) poser le stylo, Ai+1 : prendre une allumette, etc.	3 ruptures par boucle, autant de boucles que d'éléments N de la collection.	A partir de A2, l'élève doit mémoriser (spatialement) la dernière boîte entourée non encore remplie.	Clément laisse la main sur la boîte. Ou bien il garde les yeux dessus.

Selon les démarches adoptées, le nombre de ruptures (qui contribue à la définition de la complexité de la tâche) varie de 1 à 3 par boucle.

Conséquences sur la complexité, intérêt pour le comptage : reprenons la situation fondamentale de l'énumération, cette fois sous la forme proposée par un logiciel [Briand J., Brousseau G., Oyallon J.L. 1995]. Le logiciel propose à l'élève de parcourir visuellement une collection de quelques objets. Le pointage (mémorisé par la machine) de chacun des objets inventoriés une fois et une seule est la solution du problème posé. Il n'est pas nécessaire d'effectuer une autre action que le seul passage d'un objet à l'autre. A la différence du logiciel, la situation des boîtes d'allumettes, nécessite que l'enfant prenne, à chaque fois, en un lieu précis, les allumettes. Mais les boîtes sont déplaçables. Les élèves mettent ceci à profit pour dépasser la difficulté de la prise des allumettes. Il reste à ne pas commettre d'erreur dans la suite séquentielle allumette-boîte-allumette-boîte, etc. Par contre, la situation des boîtes fixées va créer les ruptures étudiées précédemment. Le marquage ajoute, provisoirement, une difficulté. Dans le cas ou les boîtes sont déplaçables, le contrôle s'exerce par la force des choses puisque la boîte concernée est le plus souvent tenue en main.

On pourrait donc s'interroger sur l'intérêt à rendre la situation aussi difficile, puisque le but est de construire des situations d'énumération qui favorisent ultérieurement le comptage de petites collections. En effet, cette situation met en œuvre des procédures d'inventaire plus complexes que celles qui seront nécessaires au comptage. Le parcours exhaustif d'une collection montrée n'exige pas que l'on quitte des yeux la collection montrée en passant de l'un à l'autre de ses éléments. Dans le travail que nous venons d'étudier, seule la stratégie de C. permet, par un marquage « au préalable » de diminuer la complexité et de la rendre égale à celle qui est rencontrée lors de l'activité de comptage. Nous pensons toutefois que ce travail d'organisation de la tâche constitue en soi une activité cognitive intéressante.

10. Conclusion

La partie de la recherche qui a initié cet article montrait l'existence d'une connaissance non enseignée mais nécessaire à la réalisation d'un inventaire d'une collection finie, l'énumération. Notre étude portait sur les activités relatives aux collections finies à objets visibles (c'est le contexte de l'acquisition des premiers nombres) ainsi que sur les activités relatives aux collections finies dont il faut définir les objets (c'est le cas des opérations arithmétiques puis de l'analyse combinatoire). Nous avions montré à l'époque les influences, sur les pratiques de comptage, des conceptions différentes de l'énumération chez les élèves.

Par la suite, notre souci fut de construire et faire fonctionner des situations a-didactiques adaptées, d'abord dans le contexte de l'acquisition des premiers nombres, afin de transformer l'énumération en objet de savoir. C'est pour cela que nous avons organisé l'ingénierie que nous venons de décrire. Nous pensons avoir réussi dans ce domaine du pré-numérique et contribué à identifier les savoirs qui peuvent être pris en charge par l'école maternelle, sans pour cela « faire du cours préparatoire avant l'heure ».

Les observations conduites ont montré un champ de recherches à effectuer au niveau de l'école maternelle. Cela concerne l'organisation de situations de formulation provoquant des activités spontanées de logique. Il y a là (au moins) deux aspects : la situation elle-même et les modalités de vérification du résultat qui sont accompagnées d'un discours, difficile à mener parce qu'il fait appel à des questions de logique en acte. Dans ce cas, nous avons repéré trois niveaux de discours[14] : celui de l'action (rapport technique), celui du vocabulaire d'action pour parler de l'action (rapport technologique) , celui de l'énonciation de règles de généralités, des déclarations (rapport théorique). Or dans certaines phases, l'enseignant doit agir sur ces différents registres, de façon empiriste. Nous sommes persuadés qu'un travail dans ce domaine pourrait contribuer à faire progresser les élèves dans l'apprentissage de l'argumentation fondée sur des situations qu'ils maîtrisent.

11. Appendice

A la suite de l'étude, décrite plus haut, nous avions décidé d'organiser le travail en moyenne et grande section selon un nouveau plan suivant tenant compte des résultats. Voici le nouveau plan de travail actuel :

	Configuration	**raison des choix.**
JEU 1	8 boîtes déplaçables	
JEU 2	8 boîtes déplaçables. 2 élèves. Un qui observe. Tâche interrompue.	Modifier le rôle de l'observateur.
Première phase collective	- Simuler des phases de validation dans le but de faire formuler plus précisément.	faire formuler les stratégies, faire anticiper un résultat
JEU 3	15 boîtes déplaçables. 2 élèves. Le deuxième n'observe pas. Consigne orale du premier au deuxième au moment de la passation de rôle.	Faire formuler sur l'énumération et la constitution des collections.
JEU 4	15 boîtes déplaçables constituées de boîtes de différentes formes et de couleurs différentes.	Faire travailler sur les classifications croisées.
JEU 5	15 boîtes non déplaçables. Le deuxième n'observe pas. Traces écrites sur tableau pour le récepteur au moment de la passation de rôle.	Faire formuler, instituer des résultats sur l'énumération et les procédures de marquage.

[14] En nous référant à l'organisation praxéologique décrite par Chevallard Y.[Chevallard Y.1997]

BIBLIOGRAPHIE :

BOULE F (1989) *"La construction des nombres*". Armand Colin. Paris.

BRIAND J. (1985) *« logiciels d'enseignement et situations didactiques »* DEA Bordeaux I.

BRIAND J. (1993) *"L'énumération dans le mesurage des collections* » Thèse Bordeaux I

BRIAND J., BROUSSEAU G., OYALLON J.L. (1995) : logiciel *« A nous les nombres* » Profil ed. PARIS.

BRISSIAUD R. (1989) *"Comment les enfants apprennent à calculer ?*" RETZ, Paris.

BRISSIAUD R. (1991) "*Calculer et compter de la petite section à la grande section*" in Grand N, n°49, Grenoble, CRDP, 1991. 37-48.

BROUSSEAU G (1984) "*L'enseignement de l'énumération*" Congrès C.I.A.E.M. Adélaïde.

BROUSSEAU G. (1986) "*Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*". Thèse d'état BORDEAUX .

BRUN J. (1994) « Evolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques ».in *"20 ans de didactique des mathématiques en France*" (Artigue, Gras, Laborde, Tavignot) La pensée sauvage.

CHEVALLARD Y. (1997) "Familière et problématique la figure du professeur". *Revue de didactique des mathématiques* Vol 17- 3

CENTENO J. (1992) "*La mémoire du système didactique*" Texte LADIST Bordeaux I.

CONNE F. (1993) "Savoir et connaissance" *Recherches en didactique des mathématiques* : RDM vol 12/2.3 la pensée sauvage Grenoble.

DIGNEAU J.M. (1985) "*le saut informationnel*". Mémoire de DEA Université Bordeaux I.

EL BOUAZZAOUI H. (1982) *« Etude de situations scolaires des premiers enseignements du nombre et de la numération »* Thèse université Bordeaux I.

FAYOL M. (1990) "*L'enfant et le nombre : du comptage à la résolution de problème*". Delachaux et Niestlé, Paris.

FAYOL M. (1985) "*Nombre, numération et dénombrement, que sait-on de leur acquisition* ?". Revue française de pédagogie, INRP, Paris. 59-77.

FISHER. (1984) "*La dénomination des nombres par l'enfant"* IREM Strasbourg .

FISHER (1984) "*Etude complémentaire sur l'appréhension du nombre*" IREM de Strasbourg. .

FUSON KC, RICHARD J., BRIARS D.J.(1982) *« The acquisition and elaboration of the number word sequence* » BRAINERED.

FUSON K.C. HALL J.W. *1983 « matching, counting and conservation of numerical equivalence* » Ginsburg ed.

GELMANN & GALLISTEL (1978) « *the child understanding of number* » HARVARD University Press.

GELMAN (1983) "Les bébés et le calcul". *La recherche* n° 14.

GRANNEY CH & PERROT G. (1970) « *Mathématiques et apprentissages du calcul* » Delagrave

GRECO P.& MORF A.(1962) *« Structures numériques élémentaires* » Paris P.U.F.

HARRISON.RATSIMBA-RAJOHN (1982) "Deux méthodes de mesures rationnelles" *Recherche en didactique des mathématiques* R.D.M. vol 3-1 P.65 la pensée sauvage Grenoble.

I.N.R.P. *« un deux beaucoup passionnément »*.

MELJAC C. (1979) "*Décrir, agir, compter*" P.U.F.

PERES J. (1986*) "Construction et utilisation d'un code de désignation d'objets à l'école maternelle"*. Bordeaux. thèse.

PERES J. (1987*) "Construction et utilisation d'un code de désignation d'objets à l'école maternelle"*. I.R.E.M. de Bordeaux.

PIAGET J. & SZEMINSKA A. (1941- et éd.67) "*La genèse du nombre chez l'enfant*". Neufchâtel. Paris. Delachaux et Niestlé.

PIAGET J. (1955) "*de la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*" PARIS-

PIAGET J. (1975) "*L'équilibration des structures cognitives*". Paris PU.F.

ROBERT M. (1972) « réflexion sur le programme rénové » in *« La mathématique à l'école élémentaire* » APMEP PARIS.

SAXE G.-POSNER J. (1983) « *The development of numerical cognition* » Ginsburg ed.

VERGNAUD G. (1991) "L'appropriation du concept de nombre : un processus de longue haleine." in Bideaud .J, Meljac C, et Fischer J.P. (eds). *Les chemins du nombre*. Presses universitaires de Lille, Lille, 271-282.

ZIGLON R. (1971) *« mathématiques pour l'élève professeur* ». Hermann. PARIS 1971

ANNEXE

Tableau des résultats : Sont notés 1 les échecs, 2 les réussites.

Enumération (allumettes). GM. 1996-97.

	Jeu 1: 1° essai	*2° essai*	*3°essai*	*Jeu 2 : 1° essai*	*2° essai*	*Jeu 3 :1° essai*	*2° essai*	*Jeu 4 : 1° essai*	*2° essai*	*3°essai*	*Jeu 5 : 1° essai*	*2° essai*	*3°essai*
CAH	2			1	1	1	1	2				1	1
CSL	1	2		1	2	2		1	1	2		2	
GOD	1	1	2	2		2		2			1	2	
LYA	2			2		1	1	2				1	2
PRD	1	2				2		1	2		1	2	
PEM	1	1	2	1		1	1	1	1	2		1	2
SIS	2			1	2	1	2	1	2			1	2
ARO	2			1	1	2		2			1	2	
AED	2			2		2		1	1	2	1	2	
BAY	1	2		2		2							
BUY	2			2		2		2			1	2	
BEJ	2			1	2	1	2					1	2
BOK	1	2		2		2		1	2		2		
CTL	1	2		2		1	2	2			1	2	
DAI	2			1	1	2		2			2	2	
DIN	2			1	1	1	2	1	2		1	1	1
GAR	1	2		2		2		1	2		2	2	
KEN	2			2		2		2			1	1	2
LME	1	2		1	1	2		1	2		2		
MYA	2			2		2		2			1	2	
MMM	2			1	1	2		1	2		1	1	2
MCH	1	1	2	2		2		1	2		1	1	2
MCM	1	1	2	1	2	1		1	2			2	
PDA	1	1	1	1	1	2		2			1	2	2
PIT	2			2		1	2	1	1	2	1	2	
POO	2			2		2		2			1	1	2
REM	1	2		1	1	2		1	2		1	2	
FIR	1	2		2		2		1	1	2	2		
GRM	2			1	2	1	2	1	2	2	1	1	2
HAN	1	2		2		2		1	1		1	2	
HEY	1	2		2		2		1	2		1	1	abs
LCD	1	2		2		2		2			1	2	
SIM	2			1	2	2		2			1	1	1
SKM	1	2		1		1		1	2		1	1	1

BAJ	2			2		2		2			2		
BBN	2			2		2		2			2		
BES	2			2		1	2	1	2		1	1	1
BOM	2			2		2		2			2		
CHI	2			2		1		2			2		
DAE	2			2		2		1			2		
EML	1	1	2	2		1		2			1	1	2
HTR	1	1	2	1	2	1	2	2			1	2	
HUJ	1	2		1	2			2			1	2	
LAA	2			2		2		2			1	1	abs
LDM	2			2		2		2			1	2	
MYG	2			2		2		1	2		2		
MAT	1	1	abs	1		1	2						
RLA	1	2		2		2		2			2		
ROF	2			2		2		2			2		
RAA	1	2		1	2	2		2			1	2	
RVT	2			2		2		2			1	1	1
SKS	2			1		1	1		2		1	abs	abs
SOP	2			1	2			2			1	1	2
VCL	2			2		2		2			1	1	
échecs	24	8	1	22	8	17	4	22	6	0	32	20	6
	Jeu 1			*Jeu 2*		*Jeu 3*		*Jeu 4*			*Jeu 5*		
	1° essai	*2° essai*	*3°essai*	*1° essai*	*2° essai*	*1° essai*	*2° essai*	*1° essai*	*2° essai*	*3°essai*	*1° essai*	*2° essai*	*3°essai*