Double analyse d'un épisode: cercle épistémologique et structuration du milieu

Claire Margolinas, Heinz Steinbring

DOUBLE ANALYSE D'UN ÉPISODE : CERCLE ÉPISTÉMOLOGIQUE ET STRUCTURATION DU MILIEU

CLAIRE MARGOLINAS

HEINZ STEINBRING

1. INTRODUCTION

Ce travail a pour point de départ la mise en correspondance d'une analyse épistémologique à l'aide du cercle épistémologique et d'une analyse didactique utilisant la structuration du milieu.

La notion de cercle épistémologique a émergé tout d'abord dans l'étude historique d'un savoir complexe : les probabilités. Cette étude a fait l'objet d'une thèse et de nombreux articles (voir notamment Steinbring 1989 et 1991). L'étude de la structuration du milieu a été initiée par Guy Brousseau (1986b et 1990) ; de nombreux résultats om déjà été produits grâce à ce type d'analyse (voir notamment Rouchier 1991, Brousseau et Centeno 1991, Berthelot et Salin 1992, Orus-Baguena 1992).

Notre article présente ici les remaniements des concepts initiaux qu'a entraînés une collaboration entre deux chercheurs travaillant dans des paradigmes sensiblement différents. Dans une première partie, nous présenterons les résultats théoriques de notre collaboration. Dans une seconde, nous illustrerons le fonctionnement de nos méthodes par leur mise en œuvre dans l'analyse d'un épisode d'enseignement des décimaux. Nous avons choisi pour cette illustration le *corpus minimum* qui la rendait possible dans un article aussi court. [250]

2. CERCLE ÉPISTÉMOLOGIQUE

La notion de *cercle épistémologique* peut-être schématisée ainsi : des *connaissances implicites* contrôlent des *théorèmes* qui rendent possible d'étudier des *problèmes* dont le *contexte* modifie les conditions d'existence des *connaissances implicites* de départ qui se modifient et peuvent éventuellement être définies (Steinbring 1989 et 1991).

Cette notion nous permet de mettre en évidence un paradoxe épistémologique : pour savoir il faudrait déjà connaître… un savoir qui n'existe pas encore ! Dans le cadre de l'enseignement, le cercle épistémologique peut produire un *cercle vicieux*, si l'on ne reconnaît pas la nécessité du fonctionnement de connaissances implicites avant et pendant l'appropriation du savoir proprement dit. Pour éviter le cercle vicieux, il faut considérer une *structure «hélicoïdale»*, dans laquelle le cercle ne se referme pas lui-même, ce qui n'est possible que si les contextes d'arrivée et de départ permettent de prendre en compte des aspects différents du sens d'un même savoir.

L'épisode analysé nous permet justement de montrer un exemple de cercle vicieux et d'envisager sa résolution en «hélice» par l'introduction d'un nouveau contexte. Il s'agit d'une première introduction des décimaux, au niveau 6te Klasse allemande (équivalent à la classe de 6^{e} française). Cette introduction a été faite en référence aux nombres naturels. La spécificité des décimaux a pu être évitée (Brousseau 1980, 1981) grâce à l'introduction de ce qu'on pourrait appeler des règles de précaution. Voici un extrait du manuel scolaire (fig. 1) utilisé dans cette classe (traduction) :

Margolinas, C., & Steinbring, H. (1994). Double analyse d'un épisode: cercle épistémologique et structuration du milieu. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, P. Tavignot & N. Balacheff (Eds.), Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud. (pp. 250-258). Grenoble: La pensée sauvage.

Les numéros de pages du texte original sont insérés dans le texte entre crochets, en rouge.

Pour faire l'addition de deux décimaux,	3,69 + 14,0389
on écrit les nombres en colonne (« virgule sous virgule »),	3, 6 9 + 1 4, 0 3 8 9
on rajoute des zéros jusqu'à ce que les deux nombres aient le même nombre de chiffres à droite de la virgule,	3, 6 9 0 0 + 1 4, 0 3 8 9
on fait alors l'addition en colonne	3, 6 9 0 0 + 1 4, 0 3 8 9 1 7, 7 2 8 9

Dans le contexte officiel de l'addition ci-dessus, les décimaux évoquent implicitement des naturels particuliers. Il s'agit de rendre possible l'addition des décimaux, et non de permettre la prise en compte de nouveaux nombres. On peut néanmoins faire l'hypothèse d'une interprétation privée pour les nombres décimaux : « deux nombres entiers séparés par une virgule».

Étudions le cercle épistémologique présent dans le contexte « privé ». Les *connaissances implicites* sont les connaissances sur les naturels enrichies par la prise en compte de l'existence de deux nombres et des règles de précaution officielles. Ces connaissances permettent [251] le contrôle de l'addition. Mais elles autorisent également de se poser la question de la comparaison des décimaux en référence aux deux nombres naturels présents. Ce nouveau contexte fait en rentrer en contradiction épistémologique la règle de rajout des zéros avec la comparaison puisque 3,4580 est différent de 3,458 car 4580 > 458. Si on veut résoudre ce problème dans le contexte officiel, il faudrait comparer 3,4580 et 3,458 ce qui ne peut se faire que par soustraction, et donc en rajoutant un zéro à 3,458 : il y a un cercle vicieux. Pour résoudre cette contradiction, il est nécessaire d'introduire un nouveau contexte qui déplace la définition implicite de décimal, dans lequel la virgule ne sépare plus mais unifie deux nombres ou deux quantités.

On voit maintenant qu'il est plus approprié de parler d'hélice épistémologique dans la mesure où il y a une évolution des définitions-en-acte (par analogie avec Gérard Vergnaud 1991) qui permet d'éviter la boucle du cercle vicieux.

3. STRUCTURATION DU MILIEU

La présentation que nous ferons ici de la structuration du milieu diffère notablement des présentations antérieures (op. cit.). Ce remaniement nous a paru nécessaire dans un premier temps dans un but de clarification, mais il nous a également révélé des positions et des situations nouvelles (P-1, S3) qui n'apparaissaient pas précédemment. Toutes les positions possibles ne sont pas révélées par le court épisode choisi, qui illustre seulement le projet de création d'une nouvelle situation didactique (P1, P2) provoquée par l'intervention d'un élève en position E1...

Nous partons de la *situation didactique*. C'est à ce niveau zéro que nous situons l'origine du schéma, et c'est en référence aux systèmes présents à ce niveau que nous caractériserons les systèmes présents dans les autres niveaux. Dans la situation didactique S0 les systèmes présents sont le professeur (P0), l'élève (E0) et le milieu (M0). Les lettres P E et M caractérisent dans notre schéma la place des systèmes présents dans la situation didactique, ce qui permet de rendre compte de la structuration du milieu. Comme dans le schéma de Brousseau, on a toujours Mn+1=Sn, le niveau n est donc toujours englobé dans le niveau n+1 (structure «d'oignon»), on a également toujours Sn={Mn, En, Pu}.

Avec ces notations, on obtient le tableau suivant :

M-3 : M-matériel	E-3 : E-objectif		S-3 : situation objective
M-2 : M-objectif	E-2 : E-cognitif		S-2 : situation d'action
M-1 : M-d'action	E-1 : E-apprenant	P-1 : P-observateur	S-1 : situation d'apprentissage
M0 : M-d'apprentissage	**E0 : Elève**	**P0 : Professeur**	**S0 : situation didactique**
M1 : M-didactique	E1 : E-réflexif	P1 : P-projeteur	S1 : situation de projet
M2 : M-de projet		P2 : P-constructeur	S2 : situation de construction
M3 : M-de construction		P3 : P-noosphérient	S3 : situation noosphérienne

[252]

4. ANALYSE D'UNE SITUATION

L'épisode que nous analyserons se situe juste après la résolution en travail individuel de plusieurs exercices d'addition de décimaux, dont l'exercice suivant :

Effectuer l'addition			3	,4	5	8	
	+		0	,9	7	1	5
	+	1	2	,4	7		
	=						

Nous allons décrire la structure du milieu dans cette situation de résolution d'exercice. Les passages en *italiques* sont spécifiques de la situation particulière.

M-3 : M-matériel	E-3 : E-objectif		S-3 : situation objective

M-matériel : *chiffres, virgules, et autres signes* ; situation objective : *E manipule les signes de M.*

M-2 : M-objectif	E-2 : E-cognitif		S-2 : situation d'action

M-objectif = Situation objective : *écriture des nombres en colonne, rajout des zéros, addition en colonne* ; E-cognitif : *connaît les règles et agit sur les signes écrits (réalise l'algorithme)* ; Situation d'action : *E manipule les signes en utilisant les règles pour arriver à un but. · le nombre cherché, résultat de l'opération demandée.*

M-1 : M-d'action	E-1 : E-apprenant	P-1 : P-observateur	S-1 : situation d'apprentissage

M-d'action = Situation d'action : *déroulement des règles, résultat de l'opération* ; · E-apprenant : *s'interroge sur la validité du nombre trouvé* ; P-observateur : *observe le travail des élèves* ; Situation d'apprentissage : *anticiper sur les effets de l'action, conclure sur l'action, formuler le déroulement de la résolution, constituer des traces écrites qui permettent une vérification de l'opération* ; S-1, est une situation adidactique[*].

M0 : M-d'apprentissage	**E0 : Elève**	**P0 : Professeur**	**S0 : situation didactique**

M-d'apprentissage = Situation d'apprentissage : *procédure de résolution du problème* ; Élève *montre potentiellement au maître son résultat et la façon d'y arriver* ; Professeur : *réalise les phases de conclusion* ; Situation didactique : *conclure sur les différents résultats en jeu dans les situations précédentes (résultat sur la correction de l'écriture (S-3), résultat de l'opération (S-2), résultat de mise en œuvre des règles de précaution, et en particulier du rajout des zéros (S-1)).*

M1 : M-didactique	E1 : E-réflexif	P1 : P-projeteur	S1 : situation de projet

M-didactique = Situation didactique : *conclusion sur la règle de rajout des zéros* ; E-réflexif : *discute la validité de la règle de rajout des zéros* ; P-projeteur : *considère comme un projet pour une prochaine* [253] *leçon la discussion sur la validité de la règle de rajout des zéros* ; Situation de projet : *conclusion sur le résultat de S0 (validité des règles*). Ce projet implique une future situation de validation.

---

[*] La version électronique de cet article ayant été établie par les auteurs en 2010, l'orthographe originale « a-didactique » a été remplacée par l'orthographe en usage « adidactique ».

M2 : M-de projet		P2 : P-constructeur	S2 : situation de construction

M-de projet = Situation de projet : *validation de la règle de rajout des zéros* ; P-constructeur : *prépare son explication au sujet du problème de rajout des zéros* ; (S2) : situation de construction : *explication du fait que le nombre n'est pas plus grand quand on rajoute des zéros*.

M3 : M-de construction		P3 : P-noosphérient	S3 : situation noosphérienne

M-de construction = Situation de construction : *projet d'explication que le nombre n'est pas plus grand quand on rajoute des zéros selon la règle*. P-noosphérien : *pense que les élèves doivent s'exprimer et comprendre et pas seulement accepter d'appliquer des règles* ; Situation noosphérienne, dans laquelle les idéologies de la noosphère (Yves Chevallard 1991) interviennent, ici : *« faire des mathématiques ce n'est pas appliquer des règles»*.

5. ANALYSE D'UN ÉPISODE

Dans le protocole établi à partir de la bande audio, les numéros correspondent à la numérotation systématique des interventions dans l'épisode.

Les conclusions sur les résultats de la correction de l'écriture et de l'opération manquent ; du point de vue épistémologique, on peut dire que le contexte de l'addition ne pose pas de problème. Le professeur en position P-1 considère que la phase de validation en situation S-1 a donné une conclusion satisfaisante sur ces points. Le professeur en position P0 ouvre une discussion sur le résultat de mise en œuvre de la règle d'ajout des zéros. Il ne prend pas position sur la nécessité et la pertinence de cette règle (position P3). Le professeur prend ainsi un risque car c'est sur cette règle que le contexte privé peut provoquer des conflits.

Dans un premier temps les élèves discutent seulement l'application de la règle :

Thème : Le dernier zéro, est-il nécessaire?

1 P : ...vous avez déjà constaté que dans les exercices 2 a, b et c, il y avait une différence... Ergin!

2 Ergin : C'était posé l'un au-dessous de l'autre, mais là il manque des zéros.

3 P : Alors, qu'est-ce que tu penses, là, il manque des zéros?

4 E : Là, il y avait... c'est juste, mais un peu plus petit, parce que là il manque les zéros.

5 P : Oui, j'ai vu ça plusieurs fois, on va l'écrire maintenant. [254]

Le Professeur écrit les trois nombres décimaux du problème 2b au tableau :

		3,	4	5	8	
+		0,	9	7	1	5
+	1	2,	4	7		
=						

6 P : Alors, ce sont. Alexandra!... les premiers trois nombres... de l'exercice 2 b. Et maintenant Ergin, tu peux peut-être mieux montrer ce que tu disais : tu penses qu'un zéro manque?

7 Ergin : Après le huit, il faut un zéro!

8 E : Mais non pas du tout!

9 P : Lars?

10 Lars : Mais oui, il faut un zéro!

Dans ce contexte d'application de la règle (contexte officiel), il n'y a pas de problème de signification. Il s'agit ici de la mise en œuvre de la situation S0 telle que nous l'avons caractérisée ci-dessus, le professeur (P0) réalise une phase de conclusion sur l'utilisation de la règle d'ajout de zéro sous la forme d'une discussion avec les élèves (E0) On remarque que cette phase de débat sur une règle institutionnalisée précédemment (voir manuel) n'est envisageable qu'en faisant intervenir la position P-noosphérien (P3).

Dans la suite, il y a deux interventions d'élèves en position E1 (Sven et Lars), qui font basculer la situation vers une situation de validation où c'est la règle de rajout des zéros qui sera mise en cause sur la base du contexte privé :

11 P : Hein. D'accord? Sven?

12 Sven : Mais de cette manière on fait automatiquement grandir ce nombre, en rajoutant un zéro.

13 P : Hein. C'est très important ce que vous avez remarqué. Je trouve que c'est désagréable si

vous faites quelque chose d'autre en même temps. Attention, Alexandra, s'il te plaît!
14 E : Pourquoi le zéro est parti?
15 P : Silence. La question, ce sont ces zéros. Pourquoi Ergin veut ajouter des zéros? Vous les avez souvent ajoutés au crayon. Annika?
16 Annika : C'est plus facile pour nous, c'est plus facile à calculer. Oui, ça c'est plus simple!
17 P : Oui, oui, mais pourquoi...? Toi aussi tu as ajouté un zéro, Alexandra? a
18 P : Lars?
19 Lars : Pour faire l'addition, ça n'a aucune importance, mais quand on regarde ce nombre, il est plus grand!
20 P : Hein... ça veut dire, il faut qu'on voit ça : ce nombre, est-ce qu'il est vraiment plus grand que celui-là? [255]
Le Professeur écrit les deux nombres au tableau :

3,	4	5	8	0
3,	4	5	8	5

21 E : oui!
22 P : Qu'est-ce que vous entendez par plus grand?
La cloche sonne ; fin de la leçon.
23 P : On verra ça demain.

La position El est une anomalie dans la structuration du milieu (dans notre schéma la position standard est En, $n \leq 0$ et Pp $p \geq 0$). (P-1 correspond à la position nécessaire à la dévolution de la situation adidactique). Ici, l'intervention de E1 provoque la création d'une nouvelle situation (situation de validation). Cette nouvelle situation rend nécessaire la création par le professeur (P2) d'un nouveau contexte d'explication qui puisse donner un sens à une interprétation du nombre décimal, où la virgule aura un sens unificateur (le protocole de la suite de l'épisode que nous avons étudié ici est analysé dans Steinbring 1992).

6. CONCLUSION

Avec l'analyse de cet épisode de deux points de vue apparemment différents, on découvre dans un premier temps que ce sont les mêmes données qui sont pertinentes (interventions 12, 19 et suivantes, en particulier). Ces deux analyses se complètent mutuellement : par exemple, l'analyse du milieu pointe l'existence non standard d'un élève en position E1, mais c'est l'analyse du cercle épistémologique qui permet de comprendre ce qui rend possible l'existence de E1. La première confrontation entre les deux points de vue présentés ici nous permet donc d'espérer des résultats probants sur l'analyse a posteriori des situations didactiques.

RÉFÉRENCES**

Berthelot, R., & Salin, M.-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire.* Université de Bordeaux I, Bordeaux.
Brousseau, G. (1980). Problèmes de didactique des décimaux : première partie. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1(1), 11-59.
Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux : deuxième partie. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(1), 37-127.
Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 309-336. [256]
Brousseau, G., & Centeno, J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11(2/3), 309-336.
Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique* (2e ed.). Grenoble La Pensée Sauvage.
Gras, R. (1991). Le maître dans le système didactique. In R. Gras (Ed.), *VIe école d'été de didactique des mathématiques et de l'informatique*, Plestin les grèves. Rennes: ARDM.

** Les références erronées ont été rectifiées en 2010.

Orus Baguena, P. (1992). *Le raisonnement des élèves dans la relation didactique, effets d'une initiation à l'analyse classificatoire dans la scolarité obligatoire.* Université de Bordeaux I, Bordeaux.

Seeger, F., & Steinbring, H. (1992). The Myth of Mathematics. In F. Seeger & H. Steinbring (Eds.), The Dialogue between Theory and Practice in Mathematics Education: Overcoming the Broadcast Metaphor, *Proceedings of the Fourth Conference on Systematic Cooperation between Theory and Practice in Mathematics Education* (SCTP) (pp. 69-89). Bielefeld: IDM.

Steinbring, H. (1986). L'indépendance stochastique. Un exemple de renversement du contenu intuitif d'un concept et de sa définition mathématique formelle. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 7(3), 5-50.

Steinbring, H. (1989). Routine and Meaning in the Mathematics Classroom. *For the Learning of Mathematics*, 9(1), 24-33.

Steinbring, H. (1991). The concept of chance in everyday teaching: aspects of a social epistemology of mathematical knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 503-522.

Steinbring, H. (1992). *The relation beween social and conceptual conventions in everyday mathematics teaching*.Unpublished manuscript, Bielefeld.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2-3), 133-169. [257]