L'éducation face aux théories de la construction du nombre chez l'enfant.

Eric Roditi

L'ÉDUCATION FACE AUX THÉORIES DE LA CONSTRUCTION DU NOMBRE CHEZ L'ENFANT

Éric Roditi,
Équipe DIDIREM de l'université Paris 7

Abstract
At the beginning of this article, we propose a definition of what an integer is. This definition is not a mathematical one, but it is meant to be useful in considering the learning of number during the first years of school. The article exposes the most important situations in which one uses numbers and takes into account the invariant operations and the linguistic representations that one uses during activities with numbers. After a brief history of the evolution of number, we provide a comparison between the most important models of the learning of number and show how these models give different answers to two fundamental questions: Is number innate or acquired? Is number initially ordinal or cardinal? The article also addresses some consequences and some questions relevant to the field of teaching.

Résumé
En amont des choix d'enseignement, l'article décrit les situations de référence, les invariants opératoires et les formes langagières qui constituent le concept de nombre – tel qu'il peut être conçu pour l'école maternelle. Après un repérage des moments fondamentaux de l'histoire de l'élaboration de ce concept, un tableau des modèles principaux de la connaissance du nombre est proposé pour montrer comment ces modèles apportent des réponses, parfois contradictoires, à deux questions fondamentales : le nombre est-il acquis ou inné ? le nombre est-il d'abord ordinal ou cardinal ? Au fur et à mesure du développement, l'article évoque des conséquences ou des questions qui en résultent sur le plan de l'enseignement.

Différentes disciplines étudient la construction du nombre chez l'enfant. En conséquence, différents modèles ont été construits qui permettent de produire, dans des champs scientifiques spécifiques, de nouveaux savoirs quant aux premiers apprentissages numériques. La multiplicité des modèles est nécessaire à l'avancée des connaissances, elle témoigne d'approches complémentaires, mais aussi de désaccords, ou au moins de « non-accords » entre les approches. Or c'est aux travaux scientifiques fondés sur ces modèles que se réfèrent les propositions, voire les prescriptions, régulièrement renouvelées, pour l'enseignement du nombre à l'école.

Après avoir indiqué ce que recouvre le concept de nombre, nous retraçons brièvement les étapes de sa construction dans l'histoire de l'humanité afin de dégager des questions auxquels répondent, chacun à leur manière, les modèles théoriques du nombre chez l'enfant. Nous en retirons enfin quelques conséquences ou quelques questions quant à l'enseignement du nombre à l'école, en amont des programmes scolaires et des ingénieries didactiques.

I. UNE « DÉFINITION » DU CONCEPT DE NOMBRE

Celui qui ouvre le dictionnaire pour y trouver une définition du nombre, ne s'attend sûrement pas à y trouver la phrase suivante : « Concept de base des mathématiques, une des notions fondamentales de l'entendement que l'on peut rapporter à d'autres idées (de pluralité, d'ensemble, de correspondance), mais non définir. » (Petit Robert). Ainsi, les mathématiciens ne définissent pas le concept de nombre en toute généralité. Ils définissent en revanche les nombres entiers naturels (ceux que l'enfant découvre à l'école maternelle), les nombres décimaux, relatifs, rationnels, réels, etc.

Afin de mettre en relation les modèles de l'apprentissage numérique, nous proposons de définir le nombre entier naturel en référence à la théorie des champs conceptuels de Vergnaud (1991) qui croise une approche épistémologique et psychologique des savoirs mathématiques. Dans ce cadre théorique, un concept est défini par les situations qui lui donnent du sens, par l'ensemble des invariants sur lesquels repose le caractère opérationnel des schèmes, et par les représentations relatives au concept (p. 145).

1. Les situations où interviennent les nombres

Quatre types de situations se distinguent dans lesquelles les nombres sont utilisés : la désignation, le rangement, la quantification et le calcul. Les situations exploitées dans l'enseignement à l'école maternelle sont principalement le rangement et la quantification.

a. La désignation

La désignation utilise le nombre comme une étiquette, comme un nom. C'est par exemple le cas lorsqu'on indique un numéro : le TGV 5118 relie Lille et Grenoble, l'indicatif téléphonique de l'Île-de-France est le 1 et celui des mobiles est le 6. Le fait que 1, en tant que nombre, soit inférieur à 6 est sans signification dans cet usage ; et le nombre 1, pas plus que le nombre 6, ne désigne une quelconque quantité. Pour ces deux raisons, les situations de désignation manquent d'intérêt et sont peu exploitées à l'école maternelle.

b. Le rangement

Dans l'activité de rangement, le nombre permet de repérer les objets désignés les uns par rapport aux autres. Si l'on vous indique de prendre la troisième rue à droite, vous saurez qu'il vous faut en passer une, en passer encore une autre, mais tourner à la suivante. L'usage est le même pour repérer les bâtiments d'une rue. En France, on distingue le trottoir qui porte les immeubles de numéros pairs de celui dont les numéros sont impairs ; les bâtiments sont numérotés dans l'ordre croissant lorsqu'on parcourt la rue dans un sens, et donc dans l'ordre décroissant lorsqu'on la parcourt dans l'autre sens. À Paris, par exemple, les rues perpendiculaires à la Seine sont numérotées en partant de la Seine. Ainsi l'immeuble du 49, boulevard Saint-Michel est situé sur le même trottoir et avant celui du 103, en partant de la place Saint-Michel qui est au bord de la Seine. Il en est de même des jours du mois qui sont numérotés de 1 à 30 environ : l'enfant de grande section de maternelle apprend que le 5 mars précède le 8 mars grâce aux rituels matinaux durant lesquels les enseignants demandent la date du jour et induisent des activités qui, simultanément, structurent le temps (hier, aujourd'hui, demain) et l'ordre des nombres.

c. La quantification

L'activité de quantification consiste à répondre à la question « Combien ? » Les mathématiciens distinguent le dénombrement de la mesure suivant que les éléments de la collection à évaluer se comptent un à un ou non. Par exemple, si l'on détermine le nombre de marches d'un escalier qui mène en haut d'une tour, c'est une activité de dénombrement ; en revanche, pour connaître la hauteur de la tour en référence à une longueur unité, les nombres entiers ne suffisent plus, il s'agit de mesure. Une propriété fondamentale des nombres lie la quantification au rangement : le 3$^{\text{ème}}$ jour du mois de juillet est aussi, lorsqu'il se termine, le jour où, précisément, 3 jours du mois de juillet sont passés. Comme le souligne Cauty (2000, p. 43) nous ne confondons pas les fonctions de 3 dans « 3 jours » et « 3 juillet ». À l'école maternelle, les enseignants proposent à leurs élèves des tâches dont l'objectif est d'apprendre qu'une collection se compose de 3 jetons si le dernier nombre prononcé lors du dénombrement est le nombre 3.

d. Le calcul et les opérations

Le calcul permet de déterminer le résultat des opérations effectuées qui, à un niveau élémentaire, répondent à trois fonctions : comparer des grandeurs, évaluer la variation d'une grandeur ou déterminer le bilan d'une composition de plusieurs grandeurs ou de plusieurs variations.

Si l'on compare deux tours de hauteurs différentes, l'une de 144 m et l'autre de 153 m environ, on pourra dire (et cela convoque la composante ordinale des nombres) que la seconde est plus haute que la première. La soustraction permet de quantifier cette comparaison : la différence de hauteur est : $153 - 144 = 9$. La seconde tour mesure donc 9 m de plus que la première. Une différence peut se déterminer autrement que par le calcul. Pour savoir combien d'assiettes manquent pour compléter une table de huit où cinq assiettes sont déjà disposées, l'enfant de maternelle pourra représenter la table, les assiettes présentes d'une couleur, les assiettes manquantes d'une autre couleur et compter ces dernières ; il pourra aussi lever un doigt en passant mentalement chaque assiette manquante : la cinquième ne manque pas donc *six*, *sept*, *huit* : il manque trois assiettes. On comprend ainsi qu'il est possible de résoudre ce problème sans calculer, et donc pourquoi l'enseignant peut le proposer à ses élèves, alors même qu'ils n'ont pas appris à soustraire.

Les grandeurs sont fixes ou variables, la hauteur de la tour ne change pas, mais le poids de Raphaël, par exemple, évoluera avec les années. La variation se détermine par soustraction : si Raphaël pèse 16 kg à 5 ans, et 18 kg à 6 ans, alors il aura pris $18 - 16 = 2$ kg. Si l'on rapporte (par une division) ces 2 kg à son poids initial de 16 kg, on obtient 0,125 c'est-à-dire une variation de +12,5 %.

Deux grandeurs peuvent se composer pour en donner une troisième : en multipliant la longueur d'une pièce rectangulaire par sa largeur on détermine sa superficie, en divisant la longueur d'un parcours par sa durée on détermine la vitesse moyenne du déplacement. Des variations peuvent aussi se composer, il suffit de considérer l'augmentation totale de poids de Raphaël qui pèse 19 kg à 7 ans.

Toujours à un niveau élémentaire, le calcul permet de déterminer une valeur inconnue dans l'une des situations précédentes. Il n'est pas aussi facile d'apprendre que la division de 28 par 4 permet de déterminer d'une part le nombre de bonbons que chacun obtiendra si l'on partage un paquet de 28 bonbons entre 4 enfants, et d'autre part le nombre de personnes à qui l'on peut distribuer des petits paquets de 4 bonbons sachant qu'on en a 28. Mais cette question est relative à l'opération, elle ne concerne pas les nombres. C'est en revanche une part de la connaissance des nombres que de savoir que 28 est un multiple de 4 ou qu'il est de deux unités inférieur à 30.

2. Les représentations

Les représentations du nombre sont présentées en distinguant les représentations analogiques, langagières et mentales ; celles qui concernent les opérations ou le rangement des nombres sont trop nombreuses pour être inventoriées ici.

a. Les représentations analogiques (concrètes ou figurées)

Les représentations concrètes d'une collection sont réalisées avec des objets, comme les cailloux des anciens bergers (cette représentation est détaillée dans la suite) ou les gommettes des enfants. Dans ce système chaque objet représente un élément de la collection. La représentation peut ne pas être strictement concrète mais seulement figurée comme l'est celle des animaux du troupeau par des entailles effectuées dans un os. Il en est de même dans l'écriture romaine des trois premiers nombres entiers qui sont écrits respectivement avec une, deux ou trois occurrences de la lettre I, chaque occurrence représentant une unité. En revanche la représentation du nombre cinq par la lettre V ne peut plus être qualifiée de représentation figurée, cette représentation fait référence à un langage.

b. Les représentations langagières

Les représentations langagières des nombres sont numérales – en mots – ou numériques – en chiffres. Les représentations numérales sont écrites (produites ou lues), ou orales (prononcés ou entendus). Les représentations numériques sont écrites en chiffres dans un système de numération. On constate d'une langue à l'autre, des différences entre les représentations numérales et, au sein d'une même langue, des différences entre la représentation numérale et la représentation numérique. On écrit par exemple « twenty five » en anglais et « fünfundzwanzig » en allemand ; la segmentation, le sens et la conjonction de coordination distinguent ici les deux langues. En français, on écrit 95 (neuf dizaines et cinq unités) alors qu'on lit quatre-vingt-quinze (quatre vingtaines et quinze unités), cela ne facilite pas l'apprentissage.

c. Les représentations mentales

Les représentations mentales appartiennent au champ des sciences cognitives qui produisent des savoirs sur la connaissance et ses processus. L'activité cérébrale est modélisée et les représentations mentales sont en quelque sorte les « objets » sur lesquels travaille notre intelligence.

Par exemple, Dehaene et Cohen (2000) proposent un modèle qui repose sur trois représentations mentales impliquant des processus linguistiques généraux :

- *la forme visuelle des numéraux arabes*, à ce niveau le nombre 52 est représenté comme la suite des deux chiffres arabes 5 et 2 ;
- *la forme verbale des numéraux*, à ce niveau le nombre 52 est représenté comme une séquence de deux mots organisée par une syntaxe qui peut se noter « dizaines {5} unités {2} » ;
- *la représentation analogique des quantités numériques* procure une connaissance des nombres en relation avec les autres, 52 est inférieur à 60 et est environ à mi-chemin entre 0 et 100.

3. Les invariants qui assurent le caractère opératoire des schèmes

Le caractère opératoire des schèmes concernant les nombres entiers, même limités à ceux qui sont appris à l'école maternelle, est assuré par des invariants nombreux si l'on inclut les situations de désignation, de rangement, de quantification et de calcul.

Précisons les invariants sur lesquels repose le schème du dénombrement d'une petite collection. Un tel dénombrement varie dans sa forme suivant que la collection est composée de bonbons d'une boîte, de chaises rangées autour d'une table ronde ou des arbres de la cour de récréation, mais quelle que soit la forme, un tel dénombrement met en œuvre une même organisation : énoncé de la suite verbale numérique, organisation de la collection à dénombrer pour procéder à une distribution de l'attention spatiale qui consiste à pointer du regard ou du doigt les éléments de la collection un à un en distinguant ceux qui sont déjà pointés et ceux qui restent à pointer, mise en œuvre de cette distribution spatiale, coordination de la distribution et de l'énoncé de la chaîne verbale numérique, association – par une répétition éventuelle – du dernier mot-nombre prononcé au cardinal de la collection. Remarquons que cette organisation invariante n'est plus opératoire pour dénombrer des grandes collections comme les places assises d'un amphithéâtre ou d'un stade, ou comme les grains de riz d'un paquet de 1kg.

En définissant le concept de nombre entier naturel dans le cadre théorique des champs conceptuels, nous avons choisi une approche théorique des connaissances où ce que sait le sujet, est référé à ce qu'il peut en faire, y compris dire, penser, etc. Les tâches proposées aux enfants dès l'école maternelle, notamment en classe avec d'autres élèves, induisent des activités qui visent la construction de savoirs numériques et qui permettent au professeur d'évaluer leur acquisition.

II. APPROCHE PHYLOGÉNÉTIQUE DU CONCEPT DE NOMBRE

La caractérisation du concept de nombre par les situations, les représentations et les invariants laisse apparaître certaines activités vraisemblablement propices aux apprentissages numériques. Les paragraphes qui suivent proposent d'aborder la question de la construction du concept de nombre. En nous appuyant sur l'histoire de cette construction, nous proposons de montrer que l'activité qui consiste à garder la mémoire des quantités par des nombres, requiert plusieurs niveaux d'abstraction, une organisation et un langage. Bien qu'il ne soit pas possible de le montrer ici, nous tenons à souligner la diversité et les incertitudes que comporte l'histoire de la construction du nombre. Citons l'ouvrage de Guitel (1975) et rappelons que la référence à l'histoire des mathématiques doit toujours être prudente, comme le montrent les controverses suscitées par la publication plus récente de Ifrah (1994), exprimées par exemple en 1995 par Cauty, Filliozat, Lévy ou Ritter dans la revue éditée par l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public.

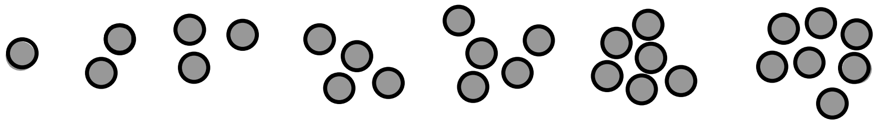
1. La notion de quantité

a) Unité, dualité, pluralité

Citant les travaux de Tylor (1871), Sommerfelt (1938) ou Haddon (1890), Ifrah (1994, p. 30) indique dans son *Histoire universelle des chiffres* que certaines populations, au début du XXe siècle, ne disposaient que de deux noms de nombres : un nom pour l'unité « un » et un nom pour la dualité « deux ». Ces deux noms de nombres permettent de désigner trois objets « deux-un » ou quatre objets « deux-deux ». Ce système, inutilisable pour désigner des quantités plus importantes alors indiquées par « beaucoup », révèle l'absence de fonction sociale d'une appréhension précise de la quantité. La forme première de la notion de quantité serait ainsi la distinction entre un, deux et plusieurs.

b) Une perception visuelle limitée

Devant une collection d'objets, nous n'avons pas besoin de compter pour savoir qu'il y en a un, deux, trois ou quatre mais nous somme incapables d'appréhender visuellement une quantité supérieure.



La nécessité d'élaborer un mode d'expression des quantités supérieures à quatre ou cinq, lorsqu'il existe le besoin de les appréhender, semble liée aux limites de notre perception visuelle. Pica (2004), par exemple, étudie les méthodes de calcul des Mundurucus, indiens d'Amazonie, qui n'ont de nom de nombres que pour un, deux, trois, quatre et cinq, mais qui désignent avec leurs doigts et leurs orteils des quantités plus importantes.

c) La comparaison, un problème lié à la pluralité

Le nombre est un moyen de garder la mémoire de la quantité. C'est un moyen très sophistiqué : pour comparer deux quantités, il est parfois inutile de les dénombrer, il peut suffire de les mettre en correspondance « terme à terme ». Par exemple, pour savoir s'il y a plus de places dans un car que d'élèves à transporter, on peut simplement tenter d'associer une place à chacun, et suivant qu'il reste des places vides ou des enfants sans place, on saura conclure. Nul besoin de nombre pour comparer ces deux quantités. Le problème serait différent si le car n'était pas à disposition.

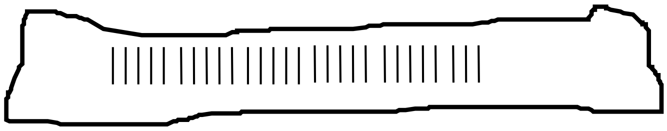
2. Le nombre, une abstraction de la notion de quantité

Différents niveaux d'abstraction sont distingués pour passer de la pluralité à la quantité et de la quantité au nombre.

a) Première abstraction : l'ordinal ou de la pluralité à la quantité

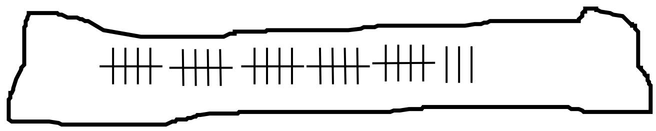
Le premier moyen inventé par les hommes pour conserver la mémoire de la quantité est la représentation concrète.

Imaginons un berger préhistorique qui possède un troupeau de mouton. S'il n'en a que trois ou quatre, il pourra appréhender visuellement l'effectif de son troupeau et saura dire s'il en a perdu. S'il en a beaucoup plus, il lui faudra trouver un moyen de le savoir. Il peut recourir à un procédé concret, la *pratique de l'entaille* ou bien il peut mettre dans une urne autant de cailloux qu'il a de moutons : chaque fois qu'un mouton sort le matin, soit il grave une entaille dans un os, soit il place un caillou dans une urne. En repassant les entailles ou les cailloux le soir, il peut savoir si une bête est manquante...



Cette méthode ne lui permet pas de savoir combien il a de moutons mais il a gardé en mémoire la taille de son troupeau en les passant *un par un*. Cette conservation de la *succession* concerne l'aspect *ordinal* du nombre.

La représentation concrète de la quantité peut être organisée pour aider à la comparaison, c'est ce qu'on fait lors d'une élection en traçant une barre pour un vote puis en barrant quatre barres pour en marquer cinq.



b) Deuxième abstraction : de l'ordinal au cardinal

Pour garder en mémoire la taille de son troupeau, le berger peut aussi utiliser une représentation symbolique. Pour cela il doit être capable :

- d'assigner une unité à chaque mouton qui passe devant lui ;
- d'introduire dans chaque unité qui passe le souvenir de celles qui l'ont précédée ;
- de convertir la succession d'unités en une simultanéité d'unités.

Cette conversion de la succession en simultanéité est l'aspect *cardinal* du nombre. Le « nom » du nombre indique la quantité tout entière : quand le vingt-huitième mouton passe, le berger sait qu'il en a vingt-huit.

c) Troisième abstraction : l'unité de représentation des quantités

Pour que la notion de nombre soit complètement inventée, il a fallu encore qu'un même système de représentation symbolique soit utilisé pour représenter des quantités de nature différentes : des animaux, des distances, des surfaces, des capacités de grains, du temps...

Par l'étude des mathématiques en Mésopotamie, Ritter a montré des liens entre l'écriture des nombres et la technologie développée par les scribes pour graver les tablettes d'argile avec un stylet. Il a montré aussi des liens entre l'écriture des nombres et la métrologie : l'étude des tablettes mésopotamienne montre que l'unité de représentation n'avait aucun attrait pour les praticiens de l'époque qui concevaient indépendamment les mesures de longueurs, de surfaces, de volumes et de temps.

3. De l'écriture des nombres aux systèmes de numération

Le système de numération est un moyen de résoudre une difficulté à laquelle les hommes se sont heurtés : l'écriture de grands nombres. Ils ont élaboré un système qui repose sur la répétition de groupements, le nombre d'unités du plus petit groupement (dix dans notre système décimal) est la *base* du système de numération, le groupement suivant est constitué de ce même nombre de groupements précédents (la centaine et composée de dix dizaines dans le système décimal), et ainsi de suite.

Il y a 5 000 ans les Égyptiens utilisaient déjà un système de numération décimale c'est-à-dire dont la base est dix. Ils représentaient l'unité par un trait droit, une dizaine par un trait en forme de pont, une centaine par un trait enroulé en forme d'anse... Ainsi, ils écrivaient 432 :

Ce type d'écriture ne résout pas le problème de la limitation visuelle pour écrire des nombres comme 87.

La numération romaine est un exemple issu de la pratique de l'entaille où chaque groupe de cinq entailles est remplacé par deux entailles en forme de pointe « V » et où chaque groupe de deux pointes est remplacé par deux entailles en forme de croix « X ». La syntaxe permet d'éviter de dépasser trois signes identiques, on écrit IX au lieu de VIIII.

Le système de numération est amélioré par deux inventions :

- l'attribution d'un symbole pour désigner une répétition d'unités inférieure à un groupement. C'est le cas de notre système de numération décimale où « trois » ne s'écrit pas en répétant trois fois le symbole 1 de l'unité, « trois » s'écrit avec le symbole 3 et non 111 ;
- l'attribution du même symbole pour désigner le même nombre de groupements, quel que soit le type de groupement. C'est le cas de notre système de numération décimale où le chiffre 4 dans 445 désigne aussi bien la répétition de quatre centaines que la répétition de quatre dizaines.

C'est la numération de position. Il faut remarquer qu'elle repose sur la création d'un signe pour désigner l'absence de groupement : pour écrire « deux centaines et quatre unités » on ne peut pas écrire 24 qui se confond avec deux dizaines et quatre unités. Les Babyloniens auraient inventé un symbole pour indiquer l'absence de groupement au III^e^ siècle avant notre ère.

Le zéro serait donc apparu comme un chiffre avant d'être considéré aussi comme un nombre. À l'école maternelle, les enseignants commencent la bande numérique (la liste des nombres généralement affichée sous le tableau) avec le nombre 1 : pour les enfants, comme dans l'histoire de la numération, le zéro apparaît la première fois pour écrire le nombre dix, composé d'une dizaine exactement, et non comme le premier des nombres qui s'écrivent à l'aide d'un seul chiffre. Il ne s'agit pas cependant d'affirmer que l'enseignement d'un concept doit suivre l'histoire de son élaboration. Élaboration qui n'est d'ailleurs pas univoque puisque, comme le souligne Cauty (2000, 2005), les Mayas utilisaient deux zéros : un zéro cardinal (pour les durées) et un zéro ordinal (pour les dates).

III. APPROCHE ONTOGÉNÉTIQUE, DES QUESTIONS ENCORE OUVERTES

L'histoire de la construction du nombre, dont nous avons ici à retracé quelques éléments, pose deux questions majeures pour l'apprentissage, et donc pour l'enseignement : celle de l'inné ou de l'acquis, car toutes les civilisations ont élaboré des moyens (même rudimentaires) pour communiquer la quantité, et celle de l'antériorité entre le caractère ordinal ou cardinal des nombres.

Il faut signaler que ces questions sont encore discutées et font progresser la recherche.

1. Le nombre est-il inné ou acquis ?

Le nombre résulte-t-il des formes de notre sensibilité ou bien seulement de l'expérience ? Les éléments de l'histoire du nombre que nous avons retracés suffisent à montrer que la question de l'inné ou de l'acquis doit être précisée : puisque certaines communautés humaines ne disposaient que de trois mots pour exprimer la pluralité des choses (un, deux et plusieurs), la position innéiste ne saurait porter sur la notion de nombre dans sa globalité mais reste pertinente sur les principes fondateurs de cette notion. Le fait qu'on puisse dénombrer les éléments d'une collection repose sur le principe d'identité de chaque élément de la collection qui sont comptés ensemble : lorsque je compte les pattes d'un chat, par exemple, je les compte ensemble et je néglige que les pattes sont différentes, au nom du principe d'identité. Ce principe me permet aussi de ne pas compter la queue parmi les pattes. Si l'on prend cet exemple du principe d'identité, la question est de savoir s'il est le fruit de la seule sensibilité ou bien s'il est une construction de l'expérience.

Selon la position innéiste, rien n'est dans l'entendement qui n'ait été d'abord dans les sens. Piaget refuse l'idée de primauté de la sensation ; sa thèse est que le nombre n'est pas dans les choses pour passer à l'esprit mais que le nombre est construit par l'homme et que c'est à travers cette construction qu'il quantifie les choses qu'il perçoit. En prolongeant la thèse de Piaget et en évoquant les populations qui n'ont pas construit de nombres, on pourrait émettre une hypothèse selon laquelle la construction du nombre dépendrait de l'existence d'une fonction sociale de la quantification. Le nombre ne serait pas seulement un construit individuel mais aussi un construit social. Dehaene (2000) opposerait que la « numérosité » c'est-à-dire notre capacité à distinguer les quantités approximatives est largement partagée avec le monde animal, qu'elle est mobilisée par des populations qui n'ont pas construit de nombres (Pica, 2004) et qu'elle serait donc innée.

2. Le nombre est-il d'abord cardinal ou ordinal ?

La seconde question est de savoir si, dans la chronologie de son élaboration, le nombre est d'abord cardinal ou d'abord ordinal. Voici des différences qui distinguent les deux conceptions.

a. Le nombre : définition cardinale

Dans sa définition cardinale, en empruntant le vocabulaire à Piaget & Szeminska (1941), le nombre se comprend comme une « classe de classes ». Expliquons-nous sur un exemple : le nombre quatre. Quatre désigne le nombre de pattes du chat mais aussi le nombre de pattes du chien. Avec la définition cardinale, nous allons voir que dénombrer les pattes du chat implique à la fois de les penser comme étant semblables et différentes. Premièrement, suivant le principe d'identité, il faut négliger ce qu'elles ont de particulier pour ne considérer que ce qu'elles ont de commun ; autrement dit, il faut considérer l'ensemble des pattes du chat non pas comme une collection disparate mais comme une classe d'objets équivalents. Ensuite, pour savoir que le nombre de pattes du chat est le même que le nombre pattes du chien, on les met en correspondance terme à terme. Après les avoir considérées comme semblables, on distingue les pattes pour associer une à une celles du chat et celles du chien : la patte antérieure gauche, droite, postérieure gauche, droite. Les deux classes, pattes de chat et pattes de chien, sont équivalentes du point de vue quantitatif parce qu'elles sont en correspondance terme à terme. Avec cette définition cardinale, le nombre quatre constitue la classe de toutes ces classes équivalentes aux pattes du chat. Il faut remarquer qu'avec la définition cardinale, le nombre de pattes du chat et le nombre de pattes du chien sont d'abord égaux entre eux avant d'être égaux à quatre.

b. Le nombre : définition ordinale

Dans sa définition ordinale, le nombre se comprend comme une « classe de relations ». Pour nous expliquer sur cette nouvelle définition, reprenons l'exemple du nombre quatre. On dispose maintenant d'un chat et de la chaîne verbale numérique ordonnée (un, deux, trois, quatre, cinq…). Avec la définition ordinale, dénombrer les pattes du chat demande de considérer momentanément que les pattes sont ordonnées comme le sont les mots de la chaîne verbale numérique, c'est-à-dire qu'il y en a une première, une deuxième, une troisième et une quatrième. Autrement dit, on crée une *relation* dans la classe des pattes du chat. Il est important de souligner que, au bout du compte, peu importe quelle était la première, la deuxième, la troisième et la quatrième patte. En effet, quel que soit le choix de relation, on obtiendra toujours une première, une deuxième, une troisième et, enfin, une quatrième patte. Le fait que les pattes du chat soient au nombre de quatre vient donc du fait que toutes les relations sont équivalentes : il y aura toujours une quatrième patte, mais jamais de cinquième patte. Avec cette définition, le nombre quatre est donc bien une classe de relation. Pour terminer, remarquons qu'avec la définition ordinale, le nombre de pattes du chat et le nombre pattes du chien sont d'abord chacun égaux à quatre avant d'être égaux entre eux.

La question de l'inné et de l'acquis a des implications pour l'enseignant : des expériences de détection de dyscalculie et de rééducation assistée par ordinateur sont actuellement expérimentées (Dehaene, 2004), elles pourraient conduire à une évolution des pratiques des professeurs. La question d'antériorité, entre le caractère cardinal ou ordinal, évoque de nombreuses situations que proposent les enseignants, et qui permettent aux élèves de construire le concept de nombre. Elle n'est pas sans conséquences quant à la recherche d'une organisation efficace de l'enseignement du nombre.

IV. DES MODÈLES DU NOMBRE CHEZ L'ENFANT ET CHEZ L'ADULTE

Les modèles de la construction ou de la connaissance du nombre reposent sur des choix de certaines communautés scientifiques, nous allons en expliciter quelques-uns. De façon chronologique, des repères théoriques sont apportés dans ce paragraphe qui indiquent à la fois sur quelles hypothèses les auteurs se fondent, ce qu'ils apportent à la compréhension de la construction du nombre et aussi, pour certains d'entre eux, à l'évaluation de troubles relatifs à cet apprentissage.

1. Le modèle de Piaget

Le modèle de Piaget (1941) est un modèle constructiviste où le sujet, durant son développement et selon une chronologie repérée par différents stades, construit ses connaissances par interaction avec le milieu environnant. Piaget distingue notamment « l'assimilation » où le sujet apprend des connaissances nouvelles sans reconsidérer les anciennes, de « l'accommodation » où le sujet doit recomposer les connaissances anciennes pour intégrer les nouvelles. Les stades de développement, dans la théorie piagétienne, tendent à invalider les théories innéistes puisque des principes comme la conservation des quantités et la quantification de l'inclusion des classes ne sont acquises qu'à partir d'un âge assez avancé.

Le modèle de Piaget s'oppose aussi à la théorie béhavioriste selon laquelle l'apprentissage d'un sujet est la réponse à un stimulus donné par l'instructeur. Le béhaviorisme propose une approche expérimentale de l'apprentissage, il n'interroge pas ce qui se passe dans la tête du sujet qui apprend, considérée comme une « boîte noire ». Piaget n'abandonne pas la méthode expérimentale de la recherche sur l'apprentissage, mais la révolution qu'il propose, sans chercher à modéliser la « boite noire », est de fonder sa théorie sur celui qui apprend et non plus sur celui qui instruit. Pour la question du nombre, Piaget défend d'une part la nécessité d'antécédents logiques (permanence de l'objet, conservation des quantités, sériation, quantification de l'inclusion des classes…) et d'autre part un phénomène qu'il appelle « abstraction réfléchissante » qui permet au sujet de construire le nombre dans sa dialectique ordinale/cardinale, le nombre ne saurait donc se réduire à la logique seule.

2. L'apparition des sciences cognitives

À l'époque de Piaget, le développement des mathématiques, de la logique, de la linguistique et de l'électronique conduit à l'informatique et à l'intelligence artificielle. Ces courants scientifiques ont donné naissance aux sciences cognitives dont l'objet de recherche est une modélisation de « la boite noire ».

L'hypothèse majeure des sciences cognitive est d'apparenter le fonctionnement de l'intelligence à celui d'un ordinateur : le modèle du fonctionnement cérébral est le calcul sur des représentations mentales présentes en *mémoire à court terme* dont la capacité est limitée, qui sont récupérées de la *mémoire à long terme* et/ou reçues du milieu extérieur par un module appelé *registre d'informations sensorielles*.

Le modèle du triple code de Dehaene & Cohen, cité précédemment, repose sur trois représentations des nombres, ces chercheurs neurologues et neuropsychologues proposent également une implantation anatomique de ce modèle en s'appuyant sur des techniques d'imagerie médicale.

Les promoteurs des sciences cognitives reprochent au modèle piagétien de n'accorder aucune place au langage, le linguiste Chomsky a été un porte-parole important de cette critique. En revanche, les sciences cognitives restent discrètes quant au développement.

3. Le modèle de Gelman

Les recherches menées outre Atlantique durant les années 1970 tendent à montrer que les âges indiqués par Piaget pour les stades sont beaucoup trop tardifs. Gelman (1978) propose un modèle où l'enfant est pourvu d'un accès au nombre fondé sur cinq principes :

- le principe d'ordre stable : on énonce toujours dans le même ordre les éléments de la chaîne verbale numérique ;

- le principe de correspondance terme à terme : on dénombre les objets d'une collection en attribuant un mot-nombre à chaque objet ;
- le principe cardinal : on associe le dernier mot nombre prononcé à la quantité d'objets de la collection qu'on cherche à dénombrer ;
- le principe de non-pertinence de l'ordre : le nombre d'éléments de la collection, caractérisé par le dernier mot nombre prononcé, est indépendant du trajet choisi pour parcourir de manière exhaustive tous les objets de la collection ;
- le principe d'abstraction : la nature des éléments de la collection à dénombrer est sans rapport avec le dénombrement.

Ces principes seraient disponibles très tôt chez l'enfant, beaucoup plus tôt que ne l'indique le modèle piagétien, c'est leur mise en œuvre simultanée qui serait à construire par le jeune enfant.

Ainsi l'on comprend que Gelman, avec le principe d'ordre stable, accorde importance au langage qui était négligé par Piaget. Selon ce modèle, le nombre se construit dans sa dimension ordinale d'abord par conjugaison des trois premiers principes. Des expériences montrent que des enfants de trois ans à qui l'on demande de contrôler un comptage sont effectivement capables d'effectuer ce contrôle pour une collection allant jusqu'à la vingtaine. L'inspiration innéiste du modèle est manifeste, pourtant, dans les travaux actuels, cet aspect n'est pas réellement pris en compte, et les principes de Gelman sont parfois même utilisés comme des critères d'acquisition du nombre chez l'enfant, ce qui va totalement à l'encontre du projet initial.

4. La neuropsychologie et le modèle de Mc Closkey

Une voie différente est venue nourrir la réflexion menée sur l'acquisition du nombre, c'est le travail spécifique sur les troubles du calcul. Les études réalisées sur des adultes victimes d'atteintes cérébrales diverses ont apporté des résultats très nombreux en terme de régularités de relations entre tel type de lésion et tel trouble du comportement. Ces résultats conduisent, par des approches différentes, à une compréhension de la conduite normale dans les cas non pathologiques.

Sur le plan de l'examen des troubles, le modèle que propose Mc Closkey (1985) permet de distinguer le traitement des nombres et le calcul, il est à l'origine de nombreux protocoles d'évaluation et d'interprétation des données recueillies. Ce modèle repose sur trois systèmes organisés autour d'une composante centrale :

- un système de compréhension des nombres organisés en modules spécifiques aux différents codes : verbal écrit (cent deux), verbal oral (sãdø), arabe en distinguant le traitement lexical (0, 1, 2) et syntaxique (102) ;
- un système de production des nombres comprenant des modules analogues aux précédents ;
- un système de calcul comportant trois sous-systèmes : un sous-système d'interprétation des symboles écrits (les nombres et les mots qui indiquent l'opération à effectuer), un sous-système de récupération des faits arithmétiques (tables, résultats connus…) et un sous-système de gestion des calculs écrits et mentaux ;
- la composante centrale est la représentation sémantique des nombres qui est un point de passage obligé de toute activité numérique.

On ne peut pas situer le modèle de Mc Closkey par rapport à la question de l'inné et de l'acquis car il ne prend pas en compte le problème développemental. En outre, malgré la composante centrale qui donne une place au sens de la notion de nombre, ce modèle accorde une telle importance au langage que le nombre n'apparaît plus comme une notion opératoire abstraite. Le terme choisi dans ce modèle pour désigner les nombres n'est pas *numbers* mais *numerals*, souvent traduit en français par « numéraux ». Ce modèle échappe par conséquent à la question de la d'antériorité entre les dimensions ordinale et cardinale, les numéraux ne se réfèrent pas aux situations génératrices des problèmes numériques que le sujet pourra rencontrer et éventuellement résoudre.

5. L'interactionnisme social

L'interactionnisme social concurrence le constructivisme piagétien tout en gardant une perspective développementale, il met en avant le rôle du langage et des interactions sociales dans l'apprentissage. Pour Vygotski (1985) qui est à l'origine de ce courant, le développement procède ainsi d'un mouvement qui va de l'inter-psychique (les interactions avec les adultes et avec les pairs) à l'intra-psychique (intériorisation de procédés appris au cours des interactions sociales) où le langage (notamment le langage écrit) joue un rôle d'instrument psychologique. L'intérêt actuel pour ce courant s'explique en partie par le fait qu'il met en avant des processus qui se révèlent importants dans les phénomènes de transmission de savoirs : les fonctions de médiation (au sens d'intermédiaire prenant en compte les particularités du sujet qui apprend) et de tutelles assurées par l'enseignant.

En ce qui concerne plus spécifiquement la construction des nombres, les travaux de Vygotski inspirent ceux des psychologues et des didacticiens qui proposent des situations d'apprentissage comprenant la résolution collective de problèmes. En témoignent les recherches menées dans le cadre du projet ERMEL (1990) ou celles de Brissiaud (1989) qui possèdent un impact important sur l'enseignement, dès l'école maternelle, puisqu'elles conduisent à la rédaction de manuels scolaires largement utilisés en formation ou dans les écoles.

LA PRISE EN COMPTE DE TRAVAUX HÉTÉROGÈNES DANS L'ENSEIGNEMENT

Après l'apport considérable de Piaget, la voie ouverte par l'interactionnisme social conduit à des situations d'enseignement où le nombre reste un outil de résolution de problèmes, mais où le milieu avec lequel l'élève interagit comporte aussi d'autres élèves et un maître, où son activité est aussi langagière, les systèmes symboliques étant des instruments psychologiques qui conduisent à l'apprentissage.

En amont des problèmes d'enseignement, les travaux menés en sciences cognitives apportent des résultats multiples. Les bébés auraient très tôt certaines compétences numériques (Fischer, 2001). L'imagerie cérébrale permet de localiser des régions actives et différenciées du cerveau suivant les activités numériques, on commence donc à éclairer la fameuse « boite noire »… Une hypothèse est étudiée selon laquelle le passage par le corps (le fait de compter sur ses doigts) serait une étape nécessaire à l'apprentissage du concept de nombre (Fayol, 2004). Un protocole de rééducation de certaines dyscalculies est en cours d'élaboration à la suite de succès obtenus avec des enfants dyslexiques (Dehaene, 2004).

Depuis près d'un siècle, la recherche a accumulé une importante somme de savoirs sur la construction du concept de nombre, elle a produit des modèles en partie complémentaires, mais en partie contradictoires. L'analyse d'erreurs commises par des enfants en situation d'apprentissage (ou par des adultes malades), est indispensable à la remédiation (ou à la rééducation). Les contradictions entre les théories rendent difficile l'interprétation des erreurs (Meljac, 2001) et donc des apprentissages, car c'est ce qui est retenu dans le modèle pour définir les connaissances numériques qui reste en débat.

Le chantier important qui conduira à une articulation de ces modèles reste encore ouvert.

Bibliographie

BRISSIAUD R. (1989), *Comment les enfants apprennent à calculer*, Paris : Retz.

CAUTY A. (1995), « À propos de "Comment comptaient les Mayas". Histoire Universelle des chiffres (Ifrah, G.) », *Bulletin de l'APMEP*, n°398, pp. 534-542.

CAUTY A. (2000), « Numération à deux zéros chez les Mayas », *Repères - IREM*, n°41, pp. 25-51.

CAUTY A. & HOPPAN J.-M. (2005), « Et un, et deux zéros mayas », *Pour la science – Dossier* n°47, pp. 18-21.

DEHAENE S. & COHEN L. (2000), « Un modèle anatomique et fonctionnel de l'arithmétique mentale », in PESSENTI M. & SERON X. (Eds), *Neuropsychologie des troubles du calcul et du traitement des nombres,* Marseille : Solal.

DEHAENE S., MOLKO N. & WILSON A. (2004), « Dyscalculie, le sens perdu des nombres », *La recherche*, n°379, octobre 2004, pp. 42-47.

ERMEL (1990), *Apprentissages numériques et résolution de problèmes*, volume dirigé par COLOMB J., recherche sous la responsabilité de CHARNAY R., DOUAIRE J., GUILLAUME J.-C. & VALENTIN D., Paris : Hatier.

FAYOL M., MARINTHE C. & BARROUILLET P. (2004), « Compter sur ses doigts, une étape nécessaire », *La recherche*, n°379, octobre 2004, pp. 47-49.

FILLIOZAT P.-S. (1995), « Les incertitudes de l'histoire de la numération indienne », *Bulletin de l'APMEP*, n°398, pp. 542-547.

FISCHER J.-C. (2001), « Le bébé numérique », in VAN HOUT A. & MELJAC C. (Eds), *Troubles du calcul et dyscalclies chez l'enfant*, Paris : Masson.

GELMAN R. & GALLISTEL C. (1978), *The child's understanding of number*, Cambridge MA : Harvard University Press.

GUILLEMOT M. (1995), « Mathématiques égyptiennes : La difficile quête de la vérité », *Bulletin de l'APMEP*, n°398. pp. 548-550.

GUITEL G. (1975), *Histoire des numérations écrites*, Paris : Flamarion.

HADDON A.-C. (1890), « The Ethnography of the Western Tribes of the Torres Straits », *Journal of the Anthropological Institute of Grat Britain*, n°19, p. 305.

IFRAH G. (1994), *Histoire universelle des chiffres*, Paris : Robert Laffont.

LEVY T. (1995), « À propos de l'histoire des numérations et de l'ouvrage de G. Ifrah "Histoire universelle des chiffres" », *Bulletin de l'APMEP*, n°398, pp. 531-534.

MC CLOSKEY M., CARAMAZZA A. & BASILI A (1985), « Cognitive mechanism in number processing and calculation : Evidence from dyscalculia », *Brain and Cognition*, n°4, pp. 171-196.

MELJAC C. (2001), « Piaget, Broca, Poincaré, Mc Closkey et quelques autres », in VAN HOUT A. & MELJAC C. (Eds), *Troubles du calcul et dyscalclies chez l'enfant*, Paris : Masson.

PIAGET J. & SZEMINSKA A. (1941), « *La genèse du nombre chez l'enfant* », Neufchâtel : Delachaux et Niestlé.

PICA P., LEMER C, IZARD V. & DEHAENE S. (2004), « Exact and Approximate Arithmetic in an Amazonian Indigene Group », *Science*, vol. 306, n°5695, pp. 499-503.

RITTER J. (1990), « Les pratiques de la Raison en Mésopotamie », in MATTEI J.-F. (Ed.), *La Naissance de la Raison en Grèce*, pp. 99-110.

RITTER J. (1995), « La Mésopotamie et Monsieur Ifrah », *Bulletin de l'APMEP*, n°399, pp. 681-685.

RITTER J. (1999) « Metrology, Writing and Mathematics in Mesopotamia », in FOLTA J. (Ed), Calculi 1929-1999, Acta historiae rerum naturalium necnon technicarum, Prague studies in the history of science and technology, New Series, vol 3, pp. 215-241.

RITTER J. (2000), *Les nombres et l'écriture,* conférence donnée le 24 juin 2000 à l'Université de tous les savoirs.

SOMMERFELT A. (1938), *La langue et la société,* Oslo.

TYLOR E.-B. (1871), *Primitiv Culture*, Londres.

VERGNAUD G. (1991), « La théorie des champs conceptuels », *Recherche en didactique des mathématiques*, n°10, vol.2/3, pp. 133-170.

VYGOTSKI L. (1985), *Pensée et langage*, Paris : Édition sociale.