

# MATHÉMATIQUE SOCIALE ET MATHÉMATIQUE

Bernard Monjardet

CES, Université Paris I Panthéon Sorbonne, Maison des Sciences Économiques,  
et CAMS, EHESS, Maison des Sciences de l'Homme  
(courriel: [monjarde@univ-paris1.fr](mailto:monjarde@univ-paris1.fr))

# MATHÉMATIQUE SOCIALE...

## Au sens de Condorcet, cf.

Granger (*La mathématique sociale du marquis de Condorcet*, 1956, 1989)

Baker (Condorcet *From Natural Philosophy to Social Mathematics*, 1975).

Crepel, Rieucan (Condorcet's Social Mathematics, *Social Choice and Welfare*, 2005)

*Tableau général la science qui a pour objet l'application du calcul aux sciences politiques et morales 1793*

OBJETS DE LA MATHÉMATIQUE SOCIALE		
I.	II.	III.
L'homme	Les choses	L'homme et les choses
MÉTHODE DE LA MATHÉMATIQUE SOCIALE		
I.	II.	III.
Détermination des faits	Appréciation des faits	Résultats des faits

Utilisation de "cinq théories mathématiques"

dont la "**Théorie générale des valeurs moyennes**"

## Au sens des mathématiques utilisées dans des modèles ou des méthodes de sciences sociales

mathématiques économiques, économie, psychologie, sociologie mathématiques, etc

(autre aspect : la mathématique comme phénomène social)

## ...et MATHÉMATIQUE

Au sens de ce qui est publié dans des journaux mathématiques  
cf. Mathematical Reviews

## MATHÉMATIQUE

Au sens de ce qui est publié dans des journaux mathématiques cf. Mathematical Reviews

## MATHÉMATIQUE SOCIALE ET MATHÉMATIQUE

la mathématique sociale..... c'est pas des maths !

Nécessiterait une analyse sociologique ; qui l'a dit et pourquoi....

DÉVELOPPEMENT d'un CONTRE EXEMPLE (si besoin est...)

# MATHÉMATIQUE SOCIALE ET MATHÉMATIQUE SOMMAIRE

## Règle majoritaire et effet Condorcet

La solution de Condorcet : résoudre un problème d'optimisation combinatoire

Médianes et espaces métriques

La solution de Condorcet est une médiane (métrique)

Médianes en mathématique : géométrie, algèbre, RO, statistique,

Bons espaces métriques : treillis distributif, arbres, algèbre à médianes

Domaines Condorcéens

# RÈGLE MAJORITAIRE et EFFET CONDORCET

Le MODÈLE :

Une assemblée de  $n$  votants, une liste de  $p$  candidats, pour chaque votant un ordre (total) de préférences sur les candidats ; ces ordres constituent le *profil de préférences* (des votants sur les candidats):

EXEMPLE de PROFIL

7 votants , 4 candidats a, b, c, d

<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>	<u>7</u>
c	c	c	b	b	a	a
b	b	b	a	a	d	d
a	a	a	d	d	c	c
d	d	d	c	c	b	b

# La règle majoritaire

- 1) on décompose l'ordre en l'ensemble de ses préférences binaires  $x > y$  (méthode des comparaison par paires).
- 2) on dénombre le *support* de  $x > y$  dans l'assemblée, i.e. le nombre de votants qui dans le profil de préférences des votants préfèrent  $x$  à  $y$ .

## EXEMPLE

	a	b	c	d
x>y	a	b	c	d
a		2	4	7
b	5		2	5
c	3	5		3
d	0	2	4	

TABLEAU des SUPPORTS

3) on retient comme préférences collectives  $x > y$  celles dont le support est *majoritaire* (supérieur à  $n/2$ )

## EXEMPLE

$x > y$	a	b	c	d
a		2	4	7
b	5		2	5
c	3	5		3
d	0	2	4	

PROBLÈME de l'effet Condorcet ("voting paradox"...): le résultat n'est pas toujours un ordre :

$$b > a > d > c > b$$



# MATHÉMATIQUE SOCIALE ET MATHÉMATIQUE SOMMAIRE

Règle majoritaire et effet Condorcet

La solution de Condorcet : résoudre un problème d'optimisation combinatoire

Médianes et espaces métriques

La solution de Condorcet est une médiane (métrique)

Médianes en mathématique : géométrie, algèbre, RO, statistique,

Bons espaces métriques : treillis distributif, arbres, algèbre à médianes

Domaines Condorcéens

## COMMENT PALLIER L'EFFET CONDORCET

### **Condorcet dans l'Essai:**

"on écartera de l'avis impossible successivement les propositions qui ont une moindre pluralité et l'on adoptera l'avis résultant de celles qui restent"

La solution de Condorcet (selon Guilbaud et Young)

### **Guilbaud 1952**

"Condorcet ne peut se résigner à conclure qu'on ne peut attribuer aucune opinion cohérente (*un ordre total*) au corps électoral...Il cherche un moindre mal, c'est-à-dire parmi toutes les opinions cohérentes celles qui est appuyée par le plus grand nombre de suffrages"

Le *SUPPORT* d'un ordre étant la somme des supports de ses préférences binaires,  
Condorcet va chercher l'ordre qui a le plus de support parmi les votants.

# COMMENT PALLIER L'EFFET CONDORCET

## EXEMPLE

	a	b	c	d
x>y	a	b	c	d
a		2	4	7
b	5		2	5
c	3	5		3
d	0	2	4	

$c > b > a > d$  de support  $5+3+3+5+5+7 = 28$

est la solution de Condorcet (tout autre ordre a un plus petit support)

### Remarque

-s'il n'y a pas d'effet Condorcet, la relation majoritaire est l'unique solution

-sinon, il peut exister plusieurs ordres solutions

## COMMENT PALLIER L'EFFET CONDORCET

### Young 1988

On considère le modèle probabiliste où la probabilité de chaque votant de préférer le meilleur candidat dans chacune des comparaisons binaires a une valeur fixe  $p > 1/2$ . Condorcet cherche "the most probable combination of propositions", i.e. l'estimateur du maximum de vraisemblance dans ce modèle

(Modulo des hypothèses d'indépendance) un calcul simple montre que cet ordre est

"the set of propositions that contain no cycles and is supported by the largest number of pairwise votes"

N.B. La solution est obtenue en inversant les préférences binaires qui minimisent globalement les désaccords

## Un PROBLÈME d'OPTIMISATION COMBINATOIRE

La solution de Condorcet est la solution d'un problème d'optimisation combinatoire :

- Un ensemble fini  
(ici l'ensemble des ordres possibles)
- Une valeur numérique affectée à chaque élément de cet ensemble  
(ici le support d'un ordre)
- **CHERCHER** un élément de valeur maximum  
(ici un ordre de support maximum)

De très nombreux problèmes se ramènent ou sont liés à des problèmes d'optimisation combinatoire (en RO, théorie des jeux...) ; polyèdres convexes. Beaucoup de ces problèmes sont très difficiles à résoudre (en fait impossibles à résoudre dès que leur taille n'est pas petite)

Le problème de trouver un ordre solution de Condorcet est un cas particulier très difficile d'un problème très difficile appelé le *problème de l'ordre optimal* ("the linear ordering problem") qu'on rencontre dans de nombreuses situations (sériation, triangulation des tableaux d'échange interindustriels, classement des joueurs d'un tournoi...)

Pour "résoudre" ce type de problèmes il existe de multiples approches faisant l'objet d'un très vaste domaine

## l'OPTIMISATION DISCRÈTE

elle même branche de

## l'OPTIMISATION MATHÉMATIQUE

# MATHÉMATIQUE SOCIALE ET MATHÉMATIQUE SOMMAIRE

Règle majoritaire et effet Condorcet

La solution de Condorcet : résoudre un problème d'optimisation combinatoire

**Médianes et espaces métriques**

La solution de Condorcet est une médiane (métrique)

Médianes en mathématique : géométrie, algèbre, RO, statistique,

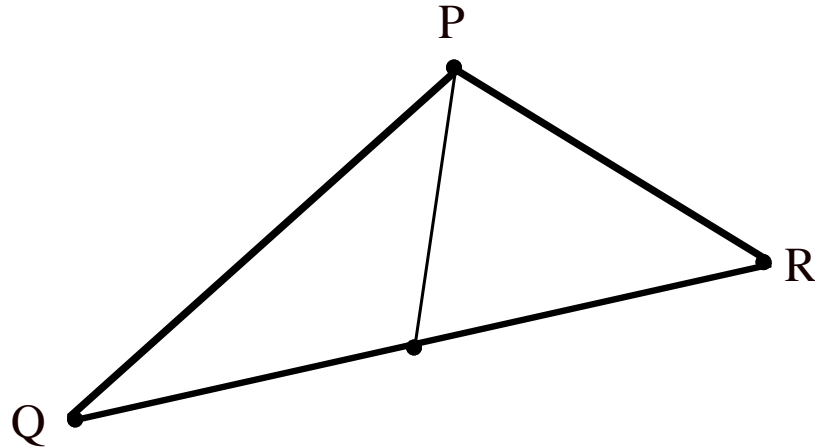
Bons espaces métriques : treillis distributif, arbres, algèbre à médianes

Domaines Condorcéens

## ORDRES SOLUTIONS ET MÉDIANES

Qu'est ce qu'une médiane ?

*médiane géométrique* dans un triangle :



*médiane statistique* : une valeur d'une série statistique pour laquelle il y a autant d'individus dont la valeur lui est inférieure que d'individus dont la valeur lui est supérieure (âge médian)

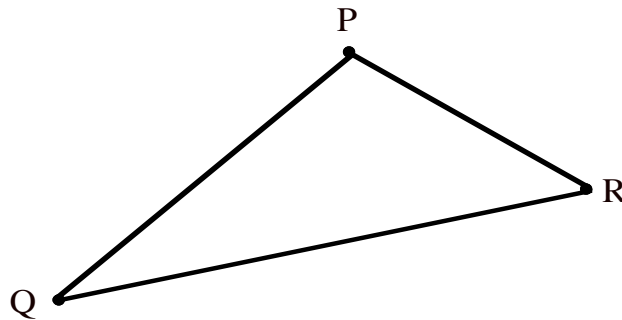


# MÉDIANE MÉTRIQUE

Pour la définir doit d'abord dire ce qu'est un *espace métrique*, notion fondamentale introduite par Fréchet en 1904

Un espace métrique c'est un ensemble muni d'une *distance* : à toute paire  $\{x,y\}$  d'éléments (de points) de cet espace est associée une valeur numérique  $d(x,y)$  mesurant leur éloignement et telle que cette distance vérifie l'inégalité triangulaire :

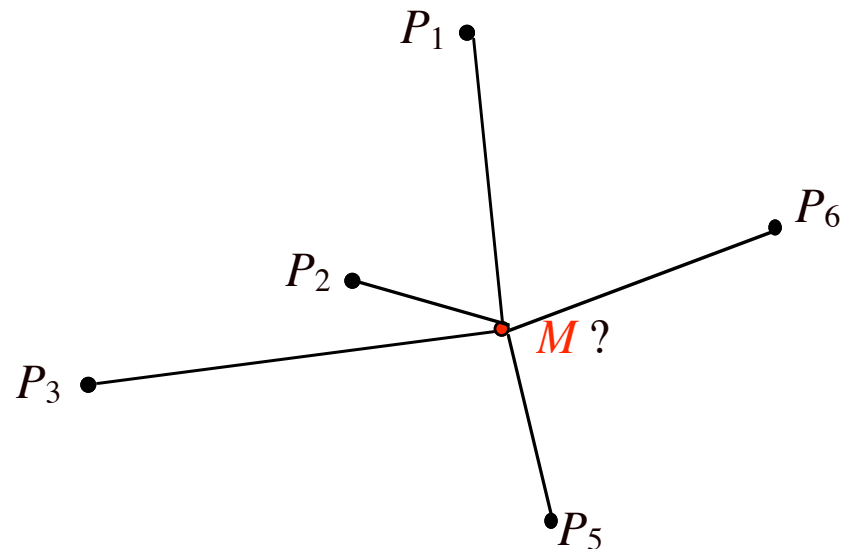
$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$



Soient  $P_1, P_2 \dots P_n$   $n$  points d'un espace métrique.

un point  $M$  est une *médiane* de ces  $n$  points si  $M$  minimise parmi tous les points de l'espace la somme de ses distances aux  $n$  points :

$$d(M, P_1) + d(M, P_2) + \dots + d(M, P_n)$$



## ESPACE MÉTRIQUE des ORDRES

On considère l'ensemble de tous les ordres de préférence possibles sur les candidats.

Par exemple, s'il n'y a que 3 candidats dénotés a,b,c on a 6 ordres possibles

a	b	b	c	c	a
b	a	c	b	a	c
c	c	a	a	b	b

(et pour p candidats on a  $p! = p(p-1)(p-2)\dots 2 \cdot 1$  ordres possibles)

Pour faire de l'ensemble des ordres un espace métrique, il faut définir une distance entre deux ordres. La manière la plus naturelle de le faire est de définir la distance des désaccords :

il y a *désaccord* entre deux ordres sur une paire  $\{x,y\}$  (de candidats) s'ils expriment des préférences opposées sur ces candidats :

*l'un préfère x à y, l'autre préfère y à x*

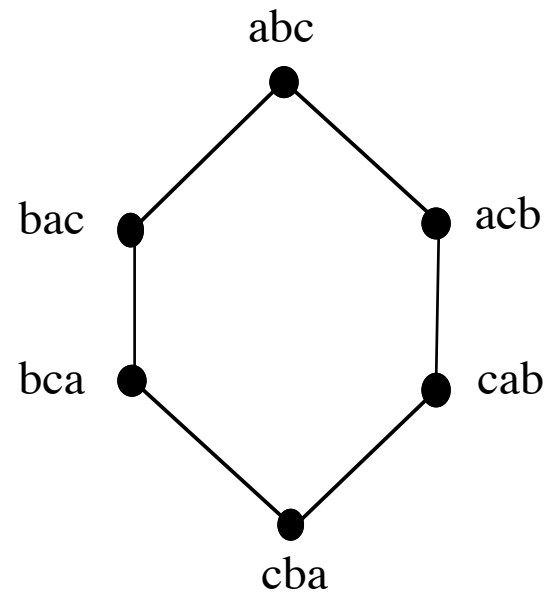
la distance des désaccords entre deux ordres est le nombre de leurs désaccords

(l'inégalité triangulaire est bien vérifiée ; en fait cette distance est l'application d'une distance très classique en mathématiques, celle de la *différence symétrique* entre deux ensembles)

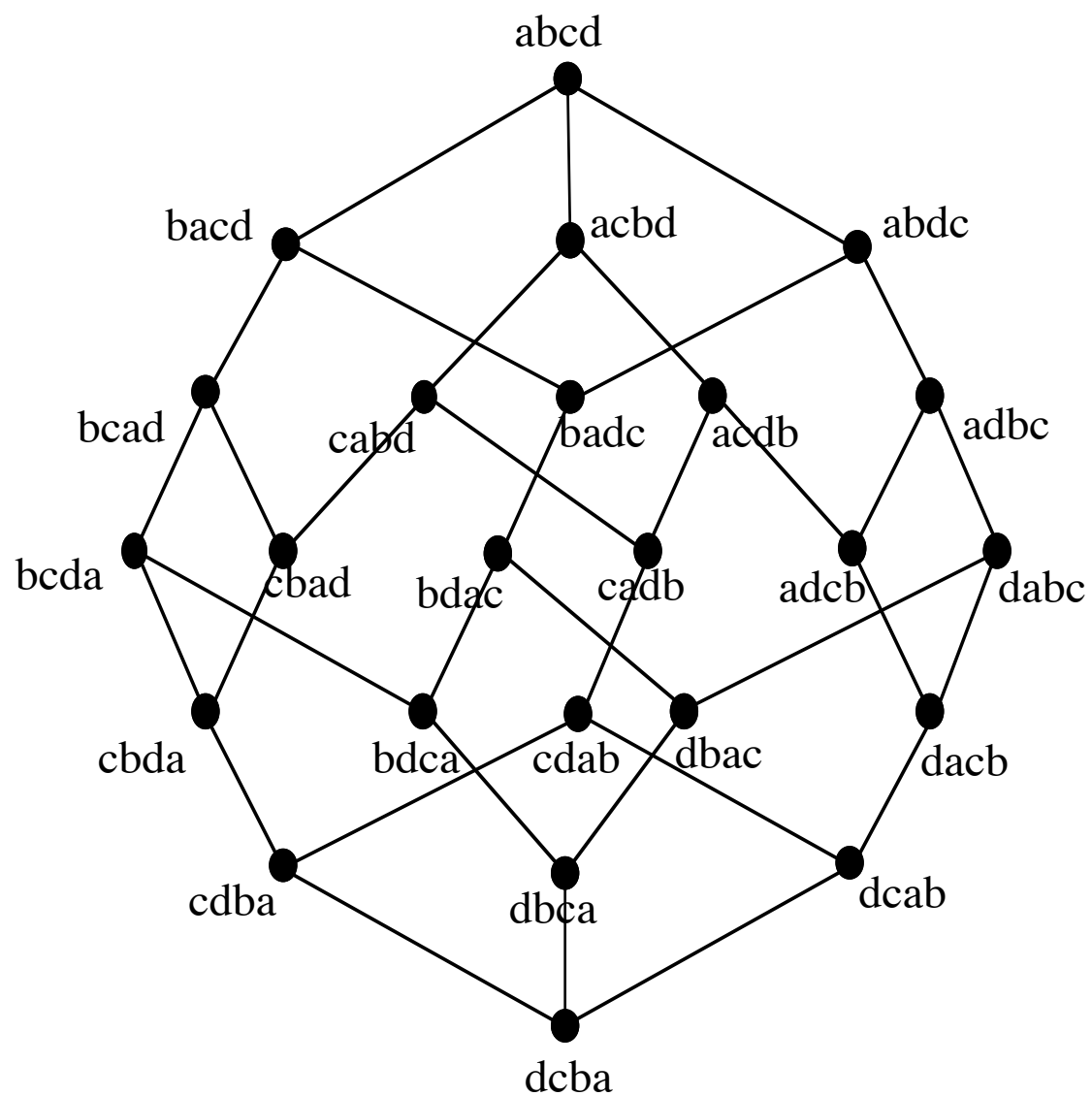
EXEMPLE

$$d(abc, bca) = 2$$

N.B. cette distance varie entre 0 (l'accord parfait) et  $n(n-1)/2$  (les préférences sont totalement opposées)



3 candidats



4 candidats

## MÉDIANE dans l'ESPACE MÉTRIQUE des ORDRES

L'ordre  $M$  est une médiane de  $n$  ordres  $L_1, L_2 \dots L_n$  si  $M$  minimise parmi tous les ordres possibles la somme de ses distances aux  $n$  ordres :

$$d(M, L_1) + d(M, L_2) + \dots + d(M, L_n)$$

"Kemeny rule" (1959, 1962))

## ORDRES SOLUTIONS ET MÉDIANES

Soit  $(L_1, L_2, \dots, L_n)$  un profil de préférences

Un ordre  $M$  est solution du problème MAXIMISER le SUPPORT

si et seulement si

cet ordre est dans l'espace métrique de tous les ordres possibles une  
MÉDIANE du profil, i.e. si

$M$  minimise la quantité  $d(M, L_1) + d(M, L_2) + \dots + d(M, L_n)$

la solution de Kemeny est la solution de Condorcet

Barbut (1967)

Formulations équivalentes de cette solution : Hays (1960), Brunk interprétant Kendall (1960).....



# MATHÉMATIQUE SOCIALE ET MATHÉMATIQUE

## SOMMAIRE

Règle majoritaire et effet Condorcet

La solution de Condorcet : résoudre un problème d'optimisation combinatoire

Médianes et espaces métriques

La solution de Condorcet est une médiane (métrique)

**Médianes en mathématique : géométrie, algèbre, RO, statistique,**

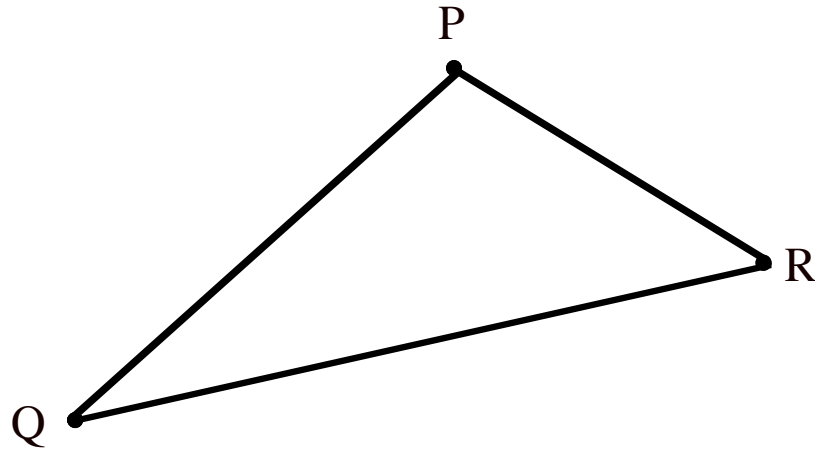
Bons espaces métriques : treillis distributif, arbres, algèbre à médianes

Domaines Condorcéens

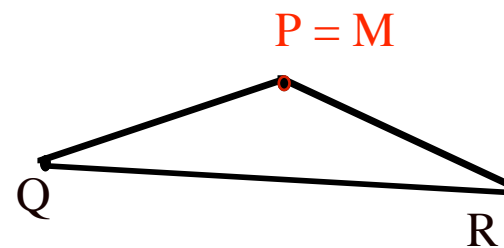
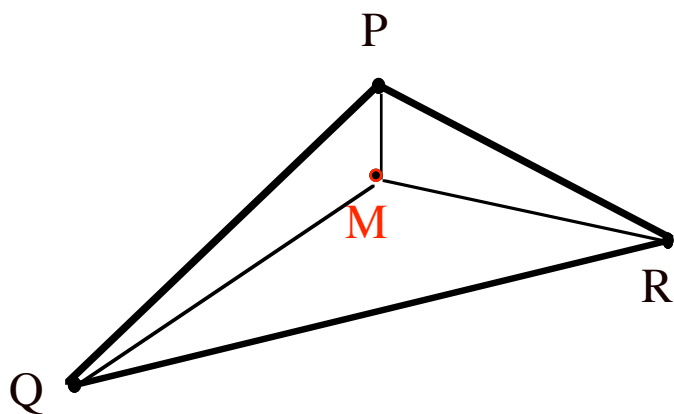
# LA MÉDIANE en MATHÉMATIQUES

L'histoire commence à Fermat (*Essai sur les maximas et les minimas*, 1629)

Quel est le point médian de trois points du plan ?



Quelle est la médiane de trois points du plan ?



Fermat ( ?), Toricelli (1646), Cavalieri (1647), Simpson (1750)...

## GÉNÉRALISATIONS

### **Médiane de 3 points pondérés du plan**

Simpson (*Doctrine et applications des fluxions*, 1750)...Lebesgue (*En marge du calcul des variations*, 1928)

### **Médiane de n points**

Steiner (1838), Sturm (1884)... Weiszfeld (1934)...

### **Médiane de n points pondérés**

- Problème de Fermat-Weber (localisation)

Alfred Weber (*Über den Standort der Industries*, 1909)...Kuhn etc...

- Problème généralisé de Fermat-Torricelli (statistique)

Gini (*L'uomo medio*, 1914) ; valeur centrale d'une série statistique multidimensionnelle...Fréchet (*Réhabilitation de la notion statistique de l'homme moyen*, 1959)

# MÉDIANE MÉTRIQUE ET ALGÈBRE

Médiane de 3 nombres ( $d(x,y) = |x-y|$ ) :

$$2 < 4 < 7 \quad x < y < z$$

$$y = \text{MAX}(\text{MIN}(x,y), \text{MIN}(y,z), \text{MIN}(z,x)) = \text{MIN}(\text{MAX}(x,y), \text{MAX}(y,z), \text{MAX}(z,x))$$

(généralisation à la médiane de n nombres)

intérêt ???

# MÉDIANE MÉTRIQUE ET ALGÈBRE

Médiane de 3 nombres ( $d(x,y) = |x-y|$ ) :

$$2 < 4 < 7 \quad x < y < z$$

$$y = \text{MAX}(\text{MIN}(x,y), \text{MIN}(y,z), \text{MIN}(z,x)) = \text{MIN}(\text{MAX}(x,y), \text{MAX}(y,z), \text{MAX}(z,x))$$

(généralisation à la médiane de n nombres)

intérêt ???

L'ensemble des nombres est un "BON" ESPACE MÉTRIQUE : des OPÉRATIONS y sont définies et la MÉDIANE s'obtient à partir d'un CALCUL utilisant ces opérations (donc facilement)

# MATHÉMATIQUE SOCIALE ET MATHÉMATIQUE SOMMAIRE

Règle majoritaire et effet Condorcet

La solution de Condorcet : résoudre un problème d'optimisation combinatoire

Médianes et espaces métriques

La solution de Condorcet est une médiane (métrique)

Médianes en mathématique : géométrie, algèbre, RO, statistique,

**Bons espaces métriques : treillis distributif, arbres, algèbre à médianes**

Domaines Condorcéens

## THÉORIE des "BONS" ESPACES MÉTRIQUES

Birkhoff et Kiss 1947 *A ternary operation in distributive lattices*

Avann 1948 Ternary distributive semi-lattices

Scholander 1952 *Medians, lattices and trees*

.....

Barbut 1967 *Médianes, Condorcet et Kendall*

.....

B. M. 1980 *Théorie et application de la médiane dans les treillis distributifs finis*

....

Bandelt et Hedlikova 1983 *Median algebras*

Bandelt et Barthélemy 1984 *Medians in Median Graphs*

.....

Leclerc 1990 *Medians and majorities in semimodular lattices*

...

McMorris, Mulder, Roberts 1998 *The median procedure on median graphs*

Powers 2003 *Medians and majorities in semimodular posets*



# MATHÉMATIQUE SOCIALE ET MATHÉMATIQUE

## SOMMAIRE

Règle majoritaire et effet Condorcet

La solution de Condorcet : résoudre un problème d'optimisation combinatoire

Médianes et espaces métriques

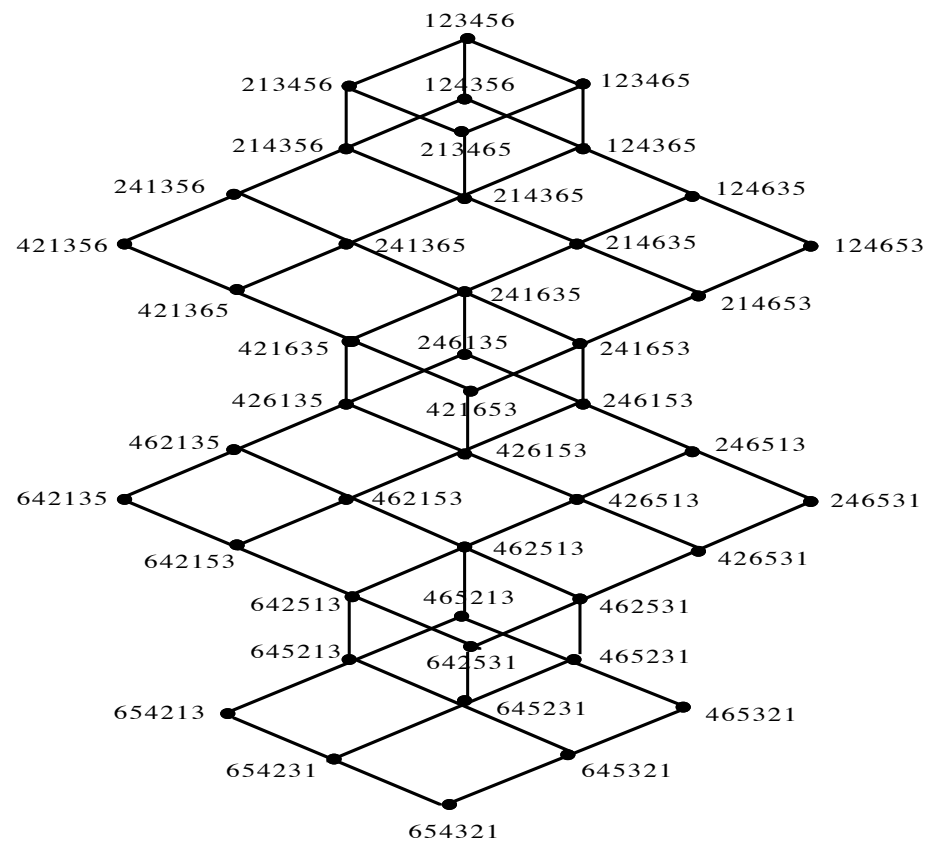
La solution de Condorcet est une médiane (métrique)

Médianes en mathématique : géométrie, algèbre, RO, statistique

Bons espaces métriques : treillis distributif, arbres, algèbre à médianes

**Domaines Condorcéens**

# DOMAINES CONDORCÉENS



un domaine Condorcéen qui est un treillis distributif

## DOMAINES CONDORCÉENS

Un ensemble d'ordres totaux est un *domaine Condorcéen* si la relation majoritaire appliquée à n'importe quel profil d'ordres pris dans cet ensemble ne produit jamais d'effet Condorcet.

De Guilbaud 1952

Le domaine des ordres vérifiant la condition d'*unimodalité* de Black (le premier exemple de domaine Condorcéen) est un treillis distributif

.....

à

.....

Galambos et Reiner 2007

Acyclic Sets of Linear Orders via the Bruhat Order (Ziegler, Higher Bruhat orders and cyclic hyperplanes arrangements, Topology)

FIN