



HAL
open science

Dynamique des ressources renouvelables et actualisation endogène

El Hadji Fall

► **To cite this version:**

El Hadji Fall. Dynamique des ressources renouvelables et actualisation endogène. 2005. halshs-00197141

HAL Id: halshs-00197141

<https://shs.hal.science/halshs-00197141>

Submitted on 14 Dec 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



EUREQua
EUREQua

Equipe Universitaire de Recherche
en Economie Quantitative - UMR 8594

C
a
h
i
e
r
s

de
la

M
S
E

**Dynamique des ressources renouvelables
et actualisation endogène**

El Hadji FALL, EUREQua

2005.84



CENTRE NATIONAL
DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

Maison des Sciences Économiques, 106-112 boulevard de L'Hôpital, 75647 Paris Cedex 13
<http://mse.univ-paris1.fr/Publicat.htm>

ISSN : 1624-0340

Dynamique des ressources renouvelables et Actualisation endogène

El Hadji Fall

EUREQua, Maison des Sciences Economiques, 106-112 Bld de l'Hôpital, 75647 Paris Cedex

13. ehfall@univ-paris1.fr

⁰Je remercie Alain Ayong Le Kama, Katheline Schubert, Mouez Fodha, Falilou Fall, Hippolyte D'Albis, Thomas Seegmuller et Cuong Le Van pour leurs précieuses remarques et suggestions. Je reste seul responsable des insuffisances et des erreurs qui demeureraient dans ce travail.

Résumé : Cet article développe un modèle de croissance optimale avec ressource renouvelable et actualisation endogène. Le relâchement de l'hypothèse de préférence additivement séparable permet de rendre endogène le taux de préférence pour le présent et de reconsidérer la dynamique des modèles avec ressource concave. La possibilité d'équilibres multiples avec seuil est examinée dans ce cadre. Il est ainsi souligné l'importance des conditions initiales, notamment en termes de ressource environnementale, dans la dynamique de long terme des économies.

Abstract : This paper develops a simple model of optimal growth with renewable resource and endogenous discounting. Relaxing the time-additivity preference hypothesis allows to make endogenous the rate of time preference and to reconsider the dynamics of models with concave resource. The possibility of multiples equilibria with thresholds is examined in this setup. It is also underlined the importance of initial conditions, particularly in terms of environmental resource, on the long run dynamic of economies.

Mots clés : Ressource renouvelable ; Croissance ; Escompte endogène ; Equilibres multiples

Keywords : Renewable resource ; Growth ; Endogenous discounting ; Multiple equilibria

Classification JEL : D90, D63, C62, E6

1 Introduction

L'approche standard dans la littérature sur la croissance a été majoritairement d'adopter le critère utilitariste escompté pour représenter l'objectif intertemporel de l'agent représentatif. Une implication importante de cette approche basée sur une structure des préférences additivement séparables est qu'elle crée en premier une situation de dictature du présent sur le futur. En second, elle induit un résultat fort et peu concluant par rapport aux faits économiques, qu'à long terme, dans une économie caractérisée par des agents ayant des taux de préférence distincts, c'est l'agent le plus patient qui détient tout le stock de capital de l'économie et donc consomme alors que les autres ne consomment rien (voir Becker(1980)). Troisièmement, elle ne permet pas de séparer l'aversion pour le risque de l'aversion pour la substitution intertemporelle dans les préférences d'un agent quand l'incertitude est prise en compte.

L'adoption d'une structure de préférences intertemporelles dite récursive (Uzawa (1968) et Koopmans (1960)) permet de rendre endogène le taux de préférence pour le présent. On introduit ainsi une forme récursive de la fonction d'utilité intertemporelle où l'utilité retirée de la consommation courante dépend non seulement du présent, mais aussi des niveaux de consommation passée. La fonction d'actualisation est ainsi liée aux niveaux de consommation. Les premières contributions essayant d'analyser de façon approfondie l'impact d'une spécification récursive de l'utilité sur les propriétés du modèle de croissance optimale sont de Iwaï (1972), de Ryder et Heal (1973) et de Boyer (1975). La dépendance temporelle a été évoquée par la suite pour expliquer plusieurs phénomènes comme la dynamique des cycles réels (Kydland et Prescott (1982)) ou la dépendance aux drogues (Becker et Murphy (1988)). L'extension et la généralisation de la structure de Uzawa dans le cadre des modèles de croissance néo-classique a été faite par Epstein (1987a), Becker, Boyd III et Sung (1989) et Becker et Boyd III (1992) qui formulent les théorèmes d'existence générale des problèmes avec préférence récursive. Palivos, Wang et Zhang (1997) établissent les conditions d'existence de sentier de croissance équilibrée et asymptotiquement équilibrée dans les modèles de croissance endogène avec utilité récursive. Drugeon (2000) explicite le rôle de l'impatience sur les trajectoires de croissance homothétique. Il procède à l'étude des conséquences de l'introduction d'une non-convexité de stock dans la technologie de production dans le modèle de croissance optimale à un secteur augmenté d'une structure récursive des préférences.

Le Van et Vailakis (2005) proposent une approche unifiée des problèmes avec des préférences récursives. Suivant l'approche de l'aggrégateur, ils proposent un traitement global permettant de bien définir une fonction d'utilité récursive.

Le développement des préoccupations environnementales de long terme amène à reconsidérer le lien traditionnel entre l'impatience et la richesse.

Notre conviction est que dès qu'on pose la question de l'allocation intertemporelle de ressource, reproductible ou naturelle, l'intuition de Fisher reste valable : le taux de préférence pour le présent est déterminé par les caractéristiques personnelles comme l'habitude, l'altruisme ou l'espérance de vie et est fonction de la richesse de l'individu. Partant, nous pouvons retenir des caractéristiques individuelles que l'impatience décroît avec la richesse, que des anticipations optimistes induisent plus d'impatience. Le désir de transmettre un héritage ou l'altruisme vis à vis des générations futures favorise un degré d'impatience plus faible.

En conséquence, s'agissant de l'allocation intertemporelle de ressources environnementales, le taux de préférence pour le présent ou impatience va dépendre du niveau de la variable considérée. Ainsi le degré d'impatience peut dépendre de la trajectoire d'une variable environnementale. On peut considérer qu'un individu préfère vivre dans un environnement préservé ou non pollué ou disposer de ressources abondantes que le contraire. L'attitude de l'individu vis-à-vis de l'environnement en termes d'impatience va dépendre aussi des anticipations qu'il formule sur l'évolution de l'environnement. Autrement dit, l'attitude de l'individu ne sera pas la même selon qu'il pense que l'état de l'environnement va se dégrader ou va s'améliorer dans le futur, que cette dégradation est irréversible ou non, qu'il est en son pouvoir d'agir techniquement sur cette évolution ou non. Un individu peut préférer préserver l'environnement qu'il léguera à ses descendants ou aux générations futures.

Jusqu'à présent, les principales contributions visant à intégrer les actifs environnementaux dans la fonction d'actualisation ont réduit leur analyse à l'unique effet de ces derniers. Ainsi la pondération des utilités futures dépendait uniquement de l'état de l'environnement (voir Pittel (2002), Ayong Le Kama et Schubert (2002) et Fall et Schubert (2004)).

A la différence de ces approches, dans cet article, il est tenu compte à la fois de l'évolution de la consommation et de l'environnement dans la fonction d'actualisation. En effet, nous considérons que les variables qui déterminent le bien-être instantané jouent un

rôle dans la détermination de l'arbitrage intertemporel. En d'autres termes, la fonction d'actualisation doit dépendre à la fois de la consommation et du stock de ressource renouvelable. Nous supposons que la fonction d'actualisation est décroissante par rapport à la consommation.

En revanche, la fonction d'actualisation est supposée croissante par rapport au stock de ressource environnementale. L'abondance de la ressource relativise l'acuité des préoccupations de long terme. En conséquence, le planificateur social accorde plus de poids au présent dans la fonction de bien-être social par rapport à la ressource.

Cette étape supplémentaire dans le relâchement de l'hypothèse de préférence additivement séparable permet d'étendre l'analyse des trajectoires optimales des modèles de croissance avec ressource renouvelable. La littérature sur les ressources renouvelables est caractérisée par le constat suivant : soit on introduit des non-concavités dans le modèle avec ressource renouvelable et on peut invoquer la possibilité d'équilibres multiples et l'existence d'un seuil (voir Lewis et Schmalensee (1982), Tahvonen et Salo (1996), Rondeau (2001), Mäler, Xepapadeas et de Zeeuw (2003), ou Brock et Starrett (2003)), soit une structure concave est considérée et la possibilité d'équilibres multiples n'est pas mentionnée puisque l'analyse est restreinte aux stabilités en point-selle (voir Ayong Le Kama (2001), Li et Löfgren (2000), ou Berck (1981)). Cette dichotomie implicite ainsi suggérée entre d'une part la concavité et l'unicité et d'autre part la convexité et les équilibres multiples n'est pourtant pas correcte. En effet, Wirl (2004) montre qu'il est possible d'obtenir des équilibres multiples avec des seuils dans un modèle de ressource renouvelable strictement concave. Le résultat de Wirl est généré soit par un mécanisme combinant un rythme de régénération croissante et un effet externe positif de la ressource sur le bien-être, soit dans un cadre qui exclut l'effet externe de la ressource mais impose un niveau de satiété de l'utilité.

Notre approche d'actualisation endogène permet également de dissiper cette sorte de dichotomie en montrant que nous pouvons obtenir des équilibres multiples avec la présence d'un seuil dans un modèle avec ressource renouvelable concave. En effet, la dynamique de l'économie peut aboutir à une configuration telle qu'il existe un seuil qui sépare les économies convergeant vers un équilibre bas des économies qui convergent vers un équilibre haut avec des niveaux de ressource plus abondante et de consommation élevée. Les économies avec un niveau initial de ressource élevé bénéficient d'un coût net du report d'une unité de consommation plus faible et d'un rendement d'une unité de res-

source préservée plus élevée et sont ainsi plus incités à sacrifier de la consommation pour augmenter le rythme d'accumulation de la ressource le long de la trajectoire de transition conduisant à l'équilibre haut. Les économies situées dans la trappe sont celles avec de faibles niveaux initiaux de ressource. Ainsi, elles peinent à surmonter l'obstacle que constitue le seuil d'accumulation de ressource nécessaire pour converger vers l'équilibre haut du fait d'un taux de régénération de la ressource relativement faible par rapport au coût du report d'une unité de consommation. En rendant endogène la fonction d'actualisation par rapport à la consommation et la ressource, on introduit une substituabilité, autre que celle induite par la fonction d'utilité instantanée, qui joue sur la direction de l'économie en la plaçant sur un équilibre instable lorsque le taux marginal de substitution entre la consommation et la ressource au niveau de la fonction d'actualisation est supérieur au taux de régénération de la ressource. En d'autres termes, les effets opposés de l'évolution de la consommation et de la ressource sur la fonction d'actualisation induisent une dynamique de cette dernière qui peut le long d'une trajectoire optimale se situer au-dessus du taux de régénération et conduire l'économie vers un équilibre instable qui constitue le seuil séparant l'équilibre stable bas de l'équilibre stable haut.

La prise en compte à la fois de l'évolution de la consommation et de la ressource dans la fonction d'actualisation permet ainsi de souligner le rôle important des conditions initiales dans les conséquences de long terme de la gestion des ressources renouvelables. L'organisation de cet article est la suivante. Dans la deuxième section, nous décrivons le cadre d'analyse en posant les hypothèses du modèle ; ensuite nous présentons la structure des préférences. Puis, nous étudions le programme du planificateur social et décrivons les conditions d'optimalité. Dans la section trois, nous analysons la dynamique de la trajectoire optimale de l'économie en étudiant les conditions d'existence et de stabilité des équilibres stationnaires de l'économie. Dans la quatrième section, nous présentons le modèle avec taux d'actualisation constant. Dans la dernière section, nous concluons.

2 Le cadre d'analyse

Nous considérons un modèle de croissance optimale à horizon infini en temps continu avec une fonction d'actualisation endogène. Il n'y a pas de capital, l'unique source de bien-être de l'économie étant le stock de ressource S , qui a une fonction de régénération $r(S)$. Le profil temporel du stock de ressource est noté $S \equiv [S(t)]_0^\infty$ et $S(t)$ le taux

d'évolution de la ressource à la date t . Pour la consommation, le profil temporel est $C \equiv [c(t)]_0^\infty$ et $c(t)$ est le taux de consommation à la date t .

Supposons que l'évolution de la ressource renouvelable est décrite par l'équation suivante :

$$\dot{S} = r(S(t)) - c(t), \quad (1)$$

avec $r(0) = 0$ et $\lim_{S \rightarrow +\infty} r(S) \leq +\infty$. $r(S)$ est monotone, strictement concave et deux fois continûment différentiable.

De plus, nous assumons les hypothèses suivantes pour l'évolution de la ressource.

Hypothèse 1 : (i) $\lim_{S \rightarrow 0} r'(S) = +\infty$; (ii) $\lim_{S \rightarrow +\infty} r'(S) = 0$.

Le planificateur social doit déterminer le programme d'extraction qui maximise la consommation de la ressource. Notons par $U(c(t), S(t))$ l'utilité instantanée ou la fonction de félicité et $\delta(c(t), S(t))$ la fonction d'actualisation qui dépend de c et S .

Les hypothèses suivantes caractérisent la fonction d'utilité instantanée $U(c(t), S(t))$, et la fonction d'actualisation $\delta(c(t), S(t))$.

Hypothèse 2. La fonction $U(c(t), S(t)) = u(c(t)) + h(S(t))$ est continue et à valeur réelle positive, deux fois continûment différentiable dans \mathbb{R}_{++}^2 et

(i) pour tout $c > 0$ et $S > 0$, $u(c) > 0$; $u'(c) > 0$; $u''(c) < 0$; $h(S) > 0$; $h'(S) > 0$ et $h''(S) < 0$; $\lim_{c \rightarrow 0} u(c) = 0$ et $\lim_{S \rightarrow 0} h(S) = 0$; $\lim_{c \rightarrow +\infty} u(c) \leq \infty$ et $\lim_{S \rightarrow +\infty} h(S) \leq \infty$.

(ii) $\lim_{c \rightarrow 0} u'(c) \leq \infty$; $\lim_{S \rightarrow 0} h'(S) \leq \infty$; $\lim_{c \rightarrow \infty} u'(c) = 0$; $\lim_{S \rightarrow \infty} h'(S) = 0$.

Hypothèse 3. La fonction $\delta(c, S) = \delta_1(c) + \delta_2(S)$ est continue et à valeur réelle positive, deux fois continûment différentiable dans \mathbb{R}_{++}^2 et

(i) pour tout $c > 0$ et $S > 0$, $\delta_1'(c) < 0$, $\delta_2'(S) > 0$; $\delta_1''(c) > 0$ et $\delta_2''(S) > 0$;

(ii) $\lim_{c \rightarrow 0} \delta_1'(c) < \infty$; $\lim_{S \rightarrow 0} \delta_2'(S) < \infty$;

$\lim_{\substack{c \rightarrow 0 \\ S \rightarrow 0}} \delta(c, S) = \lim_{c \rightarrow 0} \delta_1(c) + \lim_{S \rightarrow 0} \delta_2(S) = \bar{\delta}$;

$\lim_{\substack{c \rightarrow \infty \\ S \rightarrow \infty}} \delta(c, S) = \lim_{c \rightarrow \infty} \delta_1(c) + \lim_{S \rightarrow \infty} \delta_2(S) = \underline{\delta}$; $\lim_{S \rightarrow \infty} \delta_2'(S) < \infty$;

$\lim_{c \rightarrow \infty} \delta_1'(c) < \infty$.

La première partie de l'**Hypothèse 3** stipule que nous adoptons l'hypothèse d'impatience décroissante par rapport à la consommation, contrairement à la plupart des travaux en théorie de croissance optimale avec actualisation endogène qui assume l'hypothèse

d'impatience croissante¹. L'impatience croissante signifie que plus élevé est le niveau de consommation, plus lourdement les agents actualisent le futur. En d'autres termes, les agents qui consomment plus sont plus impatients que ceux qui consomment moins. Cette hypothèse d'impatience croissante semble beaucoup moins intuitive que l'inverse. Sa justification principale est qu'elle assure la stabilité des états stationnaires dans ces modèles.

L'impatience est décroissante si la fonction d'actualisation décroît par rapport à ses arguments, i.e. $\delta'_1(c) < 0$. Cette hypothèse d'impatience décroissante semble plus réaliste par rapport à des préoccupations de long terme. En effet, le degré de patience augmente avec le niveau de consommation.

En revanche, l'impatience par rapport à l'environnement est croissante, $\delta'_2(S) > 0$. Autrement dit, quand le niveau de stock de ressource est abondant, la société considère que cela est favorable au futur et accorde donc moins de poids aux générations futures dans la fonction de bien-être social.

2.1 La structure des préférences

L'utilité intertemporelle est de la forme :

$$W = \int_0^{\infty} (u(c(t)) + h(S(t))) e^{-\int_0^t \delta(c(v), s(v)) dv} dt. \quad (2)$$

Nous pouvons montrer que les utilités marginales de la consommation et de la ressource, correspondant à une petite variation de la consommation et de la ressource respectivement près du temps T , notées respectivement $W_T^C(C, S)$ et $W_T^S(C, S)$, sont de la forme :

$$W_T^C(C, S) = e^{-\int_0^T [\delta_1(c(v)) + \delta_2(S(v))] dv} [u'(c(T)) - \phi \delta'_1(c(T))], \quad (3)$$

$$W_T^S(C, S) = e^{-\int_0^T [\delta_1(c(v)) + \delta_2(S(v))] dv} [h'(S(T)) - \phi \delta'_2(S(T))], \quad (4)$$

où $\phi = \int_T^{\infty} (u(c(t)) + h(S(t))) e^{-\int_T^t [\delta_1(c(v)) + \delta_2(S(v))] dv} dt$ est l'utilité future agrégée à la date T .

Pour garantir une utilité marginale par rapport à la ressource positive, nous imposons la condition suivante.

¹Voir Stockey et Lucas (1984), Obstfeld (1990), Epstein (1987a,b) ou Epstein et Hynes (1983). Das (2003), à la différence de ces auteurs supposent que l'impatience est décroissante.

Hypothèse 4. $h'(S(T)) - \phi\delta'_2(S(T)) > 0$.

Suivant Epstein et Hynes (1983), on définit les taux sociaux de préférence pour le présent liés à la consommation et à la ressource respectivement, ρ^c et ρ^S , comme l'opposé du logarithme du taux de changement des utilités marginales le long d'une trajectoire constante :

$$\rho^i \equiv -\frac{d}{dT} \log W_T^i(C, S) \Big|_{\dot{c}(T)=0, \dot{S}(T)=0} \quad i = c, S. \quad (5)$$

En conséquence, le taux social de préférence lié à la consommation est donné par :

$$\rho^c(c, S, \phi) = \frac{\delta(c, S) u'(c) - (u(c) + h(S))\delta'_1(c)}{u'(c) - \phi\delta'_1(c)}, \quad (6)$$

et celui lié à la ressource est :

$$\rho^S(c, S, \phi) = \frac{\delta(c, S) h'(S) - \delta'_2(S) (u(c) + h(S))}{h'(S) - \phi\delta'_2(S)}. \quad (7)$$

Remarque 1 $\rho^c(c, S, \phi)$ est positif selon les **Hypothèse 2** et **Hypothèse 3**, ce qui est cohérent avec l'hypothèse couramment acceptée dans la littérature d'existence d'une préférence pour le présent positive.

Hypothèse 5. $\delta'_2 < \frac{\delta h'}{u+h}$.

Cette hypothèse est nécessaire pour garantir un taux social de préférence pour le présent lié à la ressource positif, $\rho^S(c, S, \phi) > 0$. La forme récursive de la fonction d'utilité intertemporelle (2) implique l'existence de deux taux de préférence pour le présent liés aux deux sources de bien-être.

2.2 Le programme du planificateur

Soit

$$\Delta(t) = \int_0^t [\delta_1(c(v)) + \delta_2(S(v))] dv. \quad (8)$$

L'objectif du planificateur est de déterminer le taux optimal de consommation de la ressource. Pour ce faire, il résout le problème d'optimisation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max} W = \int_0^\infty (u(c) + h(S)) e^{-\Delta(t)} dt \\ \text{sous cont.} \dot{S} = r(S) - c \\ \dot{\Delta} = \delta_1(c) + \delta_2(S), \Delta(0) = 0 \\ c(t) \geq 0, S(t) \geq 0, \text{ et où } S(0) = S_0 > 0 \text{ donné.} \end{array} \right. \quad (9)$$

La valeur présente du Hamiltonien est donnée par,

$$\mathcal{H} = (u(c) + h(S))e^{-\Delta} + \tilde{\lambda} (r(S) - c) - \tilde{\gamma} [\delta_1(c) + \delta_2(S)], \quad (10)$$

où $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\gamma}$ représentent la valeur présente des prix fictifs de \dot{S} et de $\dot{\Delta}$, respectivement. En réécrivant les variables adjointes de telle sorte que les termes en Δ soient éliminés, nous pouvons écrire les conditions nécessaires de premier ordre :

$$u'(c) - \lambda - \gamma \delta'_1(c) = 0, \quad (11)$$

$$\dot{\lambda} = (\delta_1(c) + \delta_2(S) - r'(S))\lambda + \gamma \delta'_2(S) - h'(S), \quad (12)$$

$$\dot{\gamma} = (\delta_1(c) + \delta_2(S))\gamma - u(c) - h(S), \quad (13)$$

où $\lambda = \tilde{\lambda}e^{\Delta t}$ et $\gamma = \tilde{\gamma}e^{\Delta t}$ sont les variables adjointes transformées et les conditions de transversalité :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) \lambda(t) e^{-\Delta t} = 0; \quad (14a)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta(t) \gamma(t) e^{-\Delta t} = 0. \quad (14b)$$

Nous pouvons voir que le long d'une trajectoire optimale, $\gamma(t) = \phi(t)^2$ et représente l'utilité future agrégée, i.e.,

$$\gamma(t) = \int_t^\infty (u(c) + h(S)) e^{-\int_t^\tau \delta(c,S) dv} d\tau.$$

Définissons la fonction g^3 :

$$g(c, S, \gamma) = u(c) + h(S) - \gamma(\delta_1(c) + \delta_2(S)). \quad (15)$$

g génère γ par la loi,

$$\dot{\gamma} = -g(c, S, \gamma) \text{ avec } \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) e^{-\Delta t} = 0. \quad (16)$$

²Pour cette égalité, voir la définition de $\phi(T)$ pour l'équation (4).

³Cette fonction dite génératrice fut définie en premier par Epstein (1987) et est considérée comme l'équivalent en temps continu de la notion d'agrégateur de Koopmans (1960) en temps discret.

En différentiant (11) par rapport à t , en y substituant (12) et (13), nous obtenons la trajectoire optimale de la consommation :

$$\dot{c} = \left[\frac{u'(c) - \gamma \delta'_1(c)}{u''(c) - \gamma \delta''_1(c)} \right] \left\{ \delta_1(c) + \delta_2(S) - r'(S) + \frac{\gamma \delta'_2(S) - h'(S) + \delta'_1(c) [\gamma(\delta_1(c) + \delta_2(S)) - U(c, S)]}{u'(c) - \gamma \delta'_1(c)} \right\}. \quad (17)$$

3 Analyse des trajectoires optimales

La trajectoire optimale de la consommation peut être réécrite avec les équations (6) et (15), et à partir de l'équation (16), nous réécrivons la dynamique de γ pour obtenir le système dynamique de l'économie sous la forme :

$$\dot{S} = r(S) - c, \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = -g(c, S, \gamma), \quad (18)$$

$$\dot{c} = \frac{g_c(c, S, \gamma)}{g_{cc}(c, S, \gamma)} [\rho^c(c, S, \gamma) - r'(S) - \frac{g_S(c, S, \gamma)}{g_c(c, S, \gamma)}]. \quad (19)$$

Les équations (1), (18) et (19) définissent l'équilibre intertemporel du modèle à partir duquel nous allons étudier la dynamique de long terme de l'économie.

3.1 Multiplicité des équilibres

Définition 1 *Il existe un équilibre stationnaire si et seulement s'il existe (S^*, γ^*, c^*) tel que $\dot{S} = \dot{\gamma} = \dot{c} = 0$, c'est à dire qui satisfait les conditions suivantes :*

$$r(S^*) = c^* \quad (20)$$

$$\gamma^* = \frac{u(c^*) + h(S^*)}{\delta_1(c^*) + \delta_2(S^*)} \quad (21)$$

$$\delta_1(c^*) + \delta_2(S^*) - \frac{h'(S^*) - \gamma^* \delta'_2(S^*)}{u'(c^*) - \gamma^* \delta'_1(c^*)} = r'(S^*). \quad (22)$$

De l'équation (20), on déduit qu'à l'état stationnaire le niveau de consommation de la ressource doit être égal au niveau de régénération de la ressource. L'équation (22) peut être interprétée comme la condition standard d'équilibre qui implique qu'à l'optimum, le

taux marginal de substitution entre c et S doit être égal à la différence entre le taux de régénération de la ressource et le taux d'actualisation à la différence que dans ce cadre les utilités marginales tiennent compte de l'impaticence marginale.

A partir des équations (20), (21) et (22), il est établi la proposition suivante qui caractérise l'existence de l'état stationnaire.

Proposition 1 *Il existe un S^* tel que*

$$\begin{aligned} & \delta_1(r(S^*)) + \delta_2(S^*) - \frac{(\delta_1(r(S^*)) + \delta_2(S^*))h'(S^*) - (u(r(S^*)) + h(S^*))\delta_2'(S^*)}{(\delta_1(r(S^*)) + \delta_2(S^*))u'(r(S^*)) - (u(r(S^*)) + h(S^*))\delta_1'(r(S^*))} \\ = & r'(S^*). \end{aligned} \quad (23)$$

caractérisant l'équilibre stationnaire.

Démonstration.

Définissons une fonction $k(S)$ continue telle que :

$$k(S) = \delta_1(r(S)) + \delta_2(S) - \frac{(\delta_1(r(S)) + \delta_2(S))h'(S) - (u(r(S)) + h(S))\delta_2'(S)}{(\delta_1(r(S)) + \delta_2(S))u'(r(S)) - (u(r(S)) + h(S))\delta_1'(r(S))}. \quad (24)$$

La fonction $k(S)$ prend une valeur finie au voisinage de zéro d'après l'Hypothèse 2 et l'Hypothèse 3, $\lim_{S \rightarrow 0} k(S) = \bar{\delta}$, de plus, en l'infini, la fonction $k(S)$ prend également une valeur finie et strictement positive sous l'Hypothèse 2 et l'Hypothèse 3, $\lim_{S \rightarrow \infty} k(S) = \underline{\delta} - \frac{\delta_2'(\infty)}{\delta_1'(\infty)}$. D'après l'Hypothèse 1, le côté droit de (23) prend des valeurs positives infiniment larges au voisinage de zéro et tend vers zéro en l'infini. Elle est décroissante puisque $r(\cdot)$ est concave. Ainsi, la courbe représentant le côté droit de (23) évolue au dessus de $k(S)$ au voisinage de $S = 0$, et en-dessous de celle-ci quand S tend vers l'infini. Il est alors évident qu'entre zéro et l'infini, il existe au moins un point d'intersection entre ces deux courbes, ce qui nous donne le point d'équilibre S^* et donc prouve l'existence de l'état stationnaire. \square

Corollaire. S'il existe un S^* tel que $0 > k'(S^*) > r''(S^*)$, il y a alors une multiplicité d'équilibres stationnaires avec un nombre impair.

La figure 1 donne une représentation des configurations possibles des états stationnaires. L'équilibre b sur la figure représente l'équilibre instable et détermine le seuil entre les équilibres haut et bas de ressource environnementale de long terme. Les conditions qui permettent d'obtenir un équilibre instable sont fortement liées au taux marginal de substitution entre la ressource et la consommation de la fonction d'actualisation par rapport au taux de régénération d'une part et d'autre part au niveau de la fonction

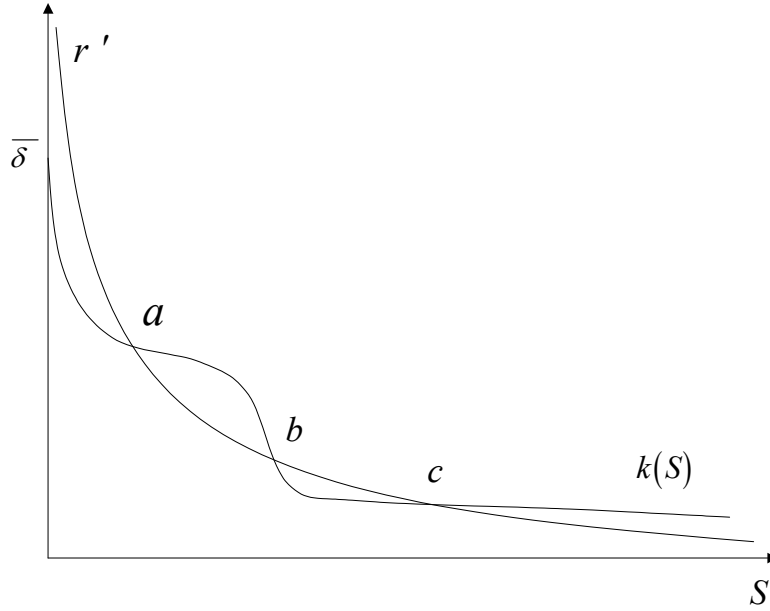


FIG. 1 – Multiplicité des équilibres

d'actualisation social par rapport au taux de régénération. D'un côté, un niveau initial de stock de ressource faible implique un taux de régénération faible. D'un autre côté, un niveau de ressource faible induit une faible valorisation de celle-ci dans la fonction d'actualisation et donc pour un niveau de consommation faible, cela implique un niveau d'actualisation élevé qui peut-être supérieur au taux de régénération. Cette situation place alors l'économie dans un équilibre stationnaire instable.

Nous pouvons analyser les propriétés de stabilité du système formé des équations (1), (18) et (19) en faisant une approximation linéaire au voisinage d'un état stationnaire quelconque .

3.2 Stabilité des équilibres

Afin d'analyser les propriétés de stabilité au voisinage de l'état stationnaire, plaçons-nous dans le voisinage de l'état stationnaire $z^* = (S^*, \gamma^*, c^*)$. En linéarisant le système dynamique autour de l'état stationnaire, nous obtenons $\dot{z} = A(z_t - z^*)$, avec

$$A = \begin{pmatrix} r' & 0 & -1 \\ -g_S^* & \delta_1 + \delta_2 & -g_c^* \\ \frac{u'\delta_2' - h'\delta_1' - r''g_c^* - g_{SS}^*}{g_{cc}^*} & \frac{\delta_2' + \delta_1' r'}{g_{cc}^*} & \delta_1 + \delta_2 - r' \end{pmatrix},$$

où la matrice A est évaluée à l'état stationnaire. Pour simplifier la notation, nous défi-

nissons les fonctions $g_c^* = ((\delta_1(c) + \delta_2(S))u'(c) - (u(c) + h(S))\delta_1'(c))/\delta_1(c) + \delta_2(S)$ et $g_S^*(c, S) = ((\delta_1(c) + \delta_2(S))h'(S) - (u(c) + h(S))\delta_2'(S))/\delta_1(c) + \delta_2(S)$, où les variables c et S sont évaluées à leurs valeurs d'état stationnaire et où γ^* est remplacé par sa valeur d'état stationnaire, $(u(c^*) + h(S^*))/\delta_1(c^*) + \delta_2(S^*)$.

Nous obtenons l'équation caractéristique suivante du système linéarisé autour de l'état stationnaire :

$$\begin{aligned}
& -x^3 + 2(\delta_1 + \delta_2)x^2 + \\
& \left(r'^2 - (\delta_1 + \delta_2)^2 - (\delta_1 + \delta_2)r' - \frac{g_c^*}{g_{cc}^*} \left(\frac{\delta_2' + \delta_1'r'}{g_{cc}^*} \right) - \frac{u'\delta_2' - h'\delta_1' - r''g_c^* - g_{SS}^*}{g_{cc}^*} \right) x + \\
& r'(\delta_1 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_2 - r') + (r'g_c^* + g_S^*) \frac{(\delta_2' + \delta_1'r')}{g_{cc}^*} + \\
& \frac{\delta_1 + \delta_2}{g_{cc}^*} (u'(c)\delta_2' - h'(S)\delta_1' - r''g_c^* - g_{SS}^*) \\
& = 0
\end{aligned}$$

La trace, la somme des mineurs principaux et le déterminant de la matrice Jacobienne, A , sont :

$$Tr(A) = 2(\delta_1 + \delta_2), \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
M(A) &= r'(\delta_1 + \delta_2) + r'(\delta_1 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_2 - r') + g_c^* \frac{(\delta_2' + \delta_1'r')}{g_{cc}^*} \\
&+ \frac{\delta_1 + \delta_2}{g_{cc}^*} (u'\delta_2' - h'\delta_1' - r''g_c^* - g_{SS}^*)
\end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
Det(A) &= r'(\delta_1 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_2 - r') + (r'g_c^* + g_S^*) \frac{(\delta_2' + \delta_1'r')}{g_{cc}^*} \\
&+ \frac{\delta_1 + \delta_2}{g_{cc}^*} (u'\delta_2' - h'\delta_1' - r''g_c^* - g_{SS}^*).
\end{aligned} \quad (27)$$

Un examen de la trace, du déterminant et des mineurs principaux de la matrice Jacobienne nous permet d'étudier les propriétés de stabilité de l'état stationnaire.

La trace mesurant la somme des racines est positive : $2(\delta_1 + \delta_2) > 0$.

Le déterminant mesurant le produit des racines est soit positif, soit négatif.

Si le déterminant est positif, alors deux situations sont possibles : soit les trois racines sont positives et l'équilibre stationnaire est instable, soit deux racines sont négatives et une racine est positive, ce qui entraîne une indétermination.

Si le déterminant est négatif, alors il n'existe qu'une seule solution : celle avec deux valeurs propres positives et une valeur propre négative, ce qui induit un équilibre en point-selle.

Nous pouvons établir la proposition suivante qui résume les propriétés de stabilité de l'état stationnaire.

Proposition 2 (i) Si $\delta_1 + \delta_2 < r'(S)$, $\forall c, \forall S$ et $|(\delta'_2/\delta'_1)| < |-r'|$, alors le système dynamique défini par (1), (18) et (19) converge localement vers un état stationnaire stable en point-selle ;

(ii) Si $\delta_1 + \delta_2 > r'$, $|(\delta'_2/\delta'_1)| > |-r'|$ et

$$\left| r'(\delta_1 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_2 - r') + (r'g_c^* + g_S^*) \frac{\delta'_2 + \delta'_1 r'}{g_{cc}^*} \right| < \left| \frac{\delta_1 + \delta_2}{g_{cc}^*} (u'\delta'_2 - h'\delta'_1 - r''g_c^* - g_{SS}^*) \right|,$$
 l'équilibre intertemporel converge localement vers un état stationnaire stable en point-selle ;

(iii) Si $\delta_1 + \delta_2 > r'$, $|(\delta'_2/\delta'_1)| > |-r'|$ et de plus

$$\left| r'(\delta_1 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_2 - r') + (r'g_c^* + g_S^*) \frac{\delta'_2 + \delta'_1 r'}{g_{cc}^*} \right| > \left| \frac{\delta_1 + \delta_2}{g_{cc}^*} (u'\delta'_2 - h'\delta'_1 - r''g_c^* - g_{SS}^*) \right|,$$
 l'équilibre stationnaire du système (1), (18) et (19) est instable.

Démonstration. Voir Annexe.

Corollaire. Quand le déterminant est positif alors $k' > r''$, ce qui correspond à l'équilibre instable. Quand le déterminant est négatif $k' < r''$, et l'équilibre est stable en point-selle.

Démonstration. Le corollaire est immédiat puisque $k' - r'' = \frac{Det(A)}{\delta g_c^2}$. \square

3.3 Analyse géométrique

Le système dynamique caractérisant la trajectoire optimale de l'économie génère un plan à trois dimensions, ce qui n'est pas aisé à représenter, ni à analyser sous la forme générale de notre modèle. Néanmoins, nous pouvons représenter la trajectoire optimale de l'économie dans le plan $S - c$ en prenant en compte la condition $\dot{\gamma} = 0$ dans la représentation de l'ensemble des points $\dot{c} = 0$ et $\dot{S} = 0$ dans ce plan.

L'équation suivante caractérise le profil de la courbe $\dot{c} = 0$ dans le plan $S - c$ compte tenu de $\dot{\gamma} = 0$:

$$r'(S) = \rho^c(c, S) - \frac{g_S}{g_c}. \quad (28)$$

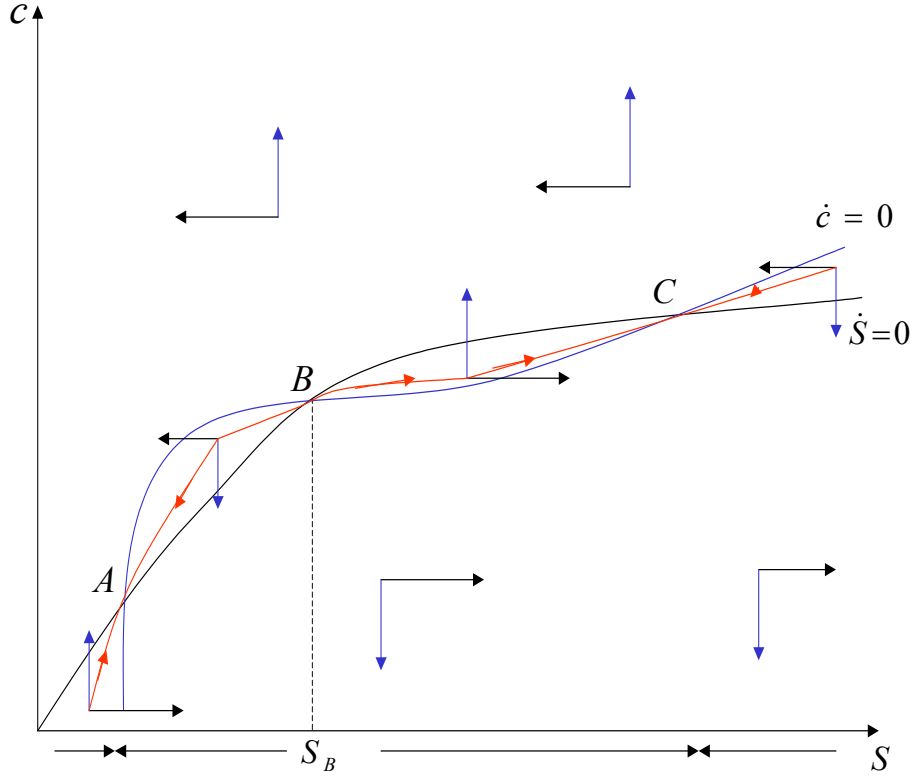


FIG. 2 – Diagramme de phase

Une différentiation totale de chaque côté de (28) nous permet d'écrire la pente de la courbe représentant l'ensemble des lieux $\dot{c} = 0$:

$$\left. \frac{dc}{dS} \right|_{\dot{c}=0} = -\frac{g_c (\delta_S u_c - \delta_c h' - g_c r'' - g_{SS})}{g_S g_{cc}} > 0 \quad (29)$$

A partir de l'équation (1), nous pouvons identifier les combinaisons de (c, S) telles que $\dot{S} = 0$ et tracer le lieu de ces points dans le plan $S - c$. La pente de la courbe représentant l'ensemble des points $\dot{S} = 0$ est donnée par une différentiation totale de (1) :

$$\left. \frac{dc}{dS} \right|_{\dot{S}=0} = r'(S) > 0 \quad (30)$$

Nous pouvons ainsi représenter le diagramme de phase avec une configuration possible des états stationnaires multiples. A partir du corollaire 1, nous pouvons déduire que le point B de la figure 2 correspond à l'équilibre instable et les points A et C correspondent aux équilibres stables au sens du point-selle.

Si le niveau initial de ressource S_0 est supérieur à S_B , alors l'économie converge vers l'équilibre stationnaire C qui est stable en point-selle. D'un autre côté, si S_0 est inférieur

à S_B , l'économie converge vers l'équilibre stationnaire A stable également en point-selle. Finalement, si $S_0 = S_B$, alors la solution optimale requiert de maintenir l'économie à ce point. Ce point B est le seuil qui sépare les économies qui pourraient se situer dans un équilibre bas des économies qui convergent vers un équilibre haut avec des niveaux de ressource très abondante. Les économies qui convergent systématiquement vers l'équilibre bas sont celles avec des niveaux de ressource initiale faible et un degré d'impatience qui ne favorise pas un rythme de régénération de la ressource permettant d'y échapper. En général, les pays pauvres sur-exploitent les ressources environnementales pour survivre, et cet appauvrissement de l'environnement en retour menace leur survie. Par exemple, la forêt couvre 22% des terres dans le monde, mais le taux de déforestation s'accroît rapidement, en particulier dans les pays sous-développés. La déforestation participe ainsi à plus d'inondation en Asie et à la désertification en Afrique Sub-saharienne ou en Amérique Latine. Dans ces pays, l'agriculture, la forêt et l'énergie productive génèrent la moitié des revenus nationaux ; l'exportation des ressources naturelles constituent un des composants prépondérants de leurs exportations. Ainsi, l'activité économique qui prévaut dans ce cadre contribue directement à l'exploitation des ressources et ne favorise pas l'accumulation qui permet de dépasser le seuil nécessaire pour converger vers l'équilibre haut.

L'intuition de ce résultat est que les économies qui démarrent avec un niveau initial de ressource élevé, i.e. $S_0 > S_B$ mais situé à gauche du point C , sont celles qui ont un coût net du report d'une unité de consommation plus faible et d'un rendement d'une unité de ressource préservée plus élevé et ainsi sont plus enclins à sacrifier de la consommation pour augmenter le rythme d'accumulation de la ressource le long de la trajectoire de transition conduisant à l'équilibre stationnaire C .

4 Le modèle avec taux d'actualisation constant

Nous considérons la même économie avec une fonction d'utilité et une dynamique de la ressource identiques avec les mêmes hypothèses. La seule différence par rapport au modèle précédent est liée au taux d'actualisation social appliqué par le planificateur social. En effet, le planificateur adopte un taux d'actualisation exogène constant positif

tel que $\delta(c, S) = \delta$. Le programme du planificateur social s'écrit ainsi :

$$\max \int_0^{\infty} (u(c) + h(S)) e^{-\delta t} dt \quad (31)$$

$$\text{sous cont. } \dot{S} = r(S) - c, \quad c_t \geq 0, S_t \geq 0 \text{ et } S_0 \text{ donné.}$$

Le Hamiltonien s'écrit donc $\mathcal{H} = (u(c) + h(S)) + \mu(r(S) - c)$ et les conditions de premier ordre sont :

$$u'(c) = \delta \quad (32)$$

$$\dot{\mu} = (\delta - r'(S))\mu - h'(S) \quad (33)$$

En différentiant par rapport au temps l'équation (32) et en y substituant (33), nous obtenons le système dynamique suivant qui gouverne la solution optimale du programme du planificateur :

$$\dot{c} = \eta c \left(r'(S) + \frac{h'(S)}{u'(c)} - \delta \right) \quad (34)$$

$$\dot{S} = r(S) - c, \quad (35)$$

où $\eta = -\frac{u''}{cu''}$ est l'inverse de l'élasticité de substitution intertemporelle de la consommation, supposée constante pour simplifier l'analyse.

Définition 2 *L'équilibre stationnaire est défini par le niveau S^* solution de l'équation*

$$f(S^*) = r'(S^*) + \frac{h'(S^*)}{u'(r(S^*))} - \delta = 0. \quad (36)$$

Nous pouvons alors établir les propositions suivantes qui résument les propriétés d'existence et d'unicité de la solution du programme du planificateur dans le cas où le taux d'actualisation est constant.

Lemme 1 *Il existe un équilibre stationnaire, si $\lim_{S \rightarrow \infty} \left(\frac{h'(S)}{u'(r(S))} \right) < \delta$.*

Démonstration. Supposons que $f(\cdot)$ est continue. Si $\lim_{S \rightarrow \infty} \left(\frac{h'(S)}{u'(r(S))} \right) < \delta$, alors $\lim_{S \rightarrow \infty} f(S) < 0$ d'une part. D'autre part, $\lim_{S \rightarrow 0} f(S) = \infty$. Il existe alors au moins un S^* tel que $f(S) = 0$. \square

Définissons les élasticités suivantes par rapport à la fonction de régénération de la ressource, à l'utilité marginale de la ressource et à l'utilité marginale de la consommation respectivement : $\epsilon_{r/S} = \frac{Sr'(S)}{r(S)}$, $\epsilon_{h'/S} = \frac{Sh''(S)}{h'(S)}$ et $\epsilon_{u'/r} = \frac{ru''(r)}{u'(r)}$.

Lemme 2 *Il existe un équilibre stationnaire unique, si $\epsilon_{r/S} > \frac{\epsilon_{h'/S}}{\epsilon_{u'/r}}$.*

Démonstration. Si $f(S)$ est strictement monotone et décroissante, alors l'équilibre stationnaire est unique. La dérivée de $f(S)$ nous donne $f'(S) = r''(S) + \frac{h''(S)}{u'(r(S))} - r'(S)h'(S)\frac{u''(r(S))}{[u'(r(S))]^2}$. Si $\epsilon_{r/S} > \frac{\epsilon_{h'/S}}{\epsilon_{u'/r}}$, alors $\frac{h''(S)}{u'(r(S))} - r'(S)h'(S)\frac{u''(r(S))}{[u'(r(S))]^2} < 0$ et donc $f'(S) < 0$. Ce qui suffit à démontrer l'unicité. \square

Afin d'analyser les propriétés de stabilité locale de l'état stationnaire, nous linéarisons le système formé des équations (34) et (35) autour de l'état stationnaire. La matrice Jacobienne, notée B , du système linéarisé est donc :

$$B = \begin{pmatrix} \frac{h'}{u'} & \eta c \left(r'' + \frac{h''}{u'} \right) \\ -1 & r' \end{pmatrix},$$

et le polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \left(r' + \frac{h'}{u'} \right) + \frac{h'}{u'} r' + \eta c \left(r'' + \frac{h''}{u'} \right) = 0. \quad (37)$$

Notons par λ_1 et λ_2 les racines de l'équation caractéristique (37). Alors, nous avons la trace de B , notée $tr(B)$ qui est égale à :

$$tr(B) = \lambda_1 + \lambda_2 = r' + \frac{h'}{u'} > 0$$

et le déterminant de B , noté $Det(B)$ qui est égal à :

$$Det(B) = \lambda_1 \lambda_2 = \eta c \left(-r'(S)h'(S)\frac{u''(r(S))}{[u'(r(S))]^2} + r''(S) + \frac{h''(S)}{u'(r(S))} \right) < 0.$$

Le système dynamique étant composé d'une variable non prédéterminée (c) et d'une variable prédéterminée (S), la condition de Blanchard et Kahn (1980) est alors vérifiée sachant que la trace est positive et le déterminant est négatif, la matrice B a alors une valeur propre positive et une valeur propre négative. L'équilibre stationnaire est stable avec les propriétés d'un point-selle.

L'actualisation à taux constant dans ce cadre exclut la possibilité d'équilibres multiples sous les conditions supplémentaires : $\lim_{S \rightarrow \infty} \left(\frac{h'(S)}{u'(r(S))} \right) < \delta$ et $\epsilon_{r/S} > \frac{\epsilon_{h'/S}}{\epsilon_{u'/r}}$.

5 Conclusion

Dans ce papier, nous franchissons une étape supplémentaire dans le relâchement de l'hypothèse de préférence additivement séparable. En effet, contrairement aux principales études en environnement avec actualisation endogène, nous faisons dépendre la fonction d'actualisation non seulement d'une variable environnementale mais aussi de la

consommation. La fonction d'actualisation est alors croissante avec le stock de ressource et décroissante avec la consommation.

Cette approche permet d'enrichir l'analyse de la dynamique des modèles avec ressources environnementales. Partant, nous pouvons dans le cadre de notre modèle expliquer la diversité des trajectoires de long terme des économies avec des dotations initiales en ressources naturelles fort différentes. A long terme, des économies avec un stock initial de ressource faible et un degré d'impatience supérieur au taux de régénération peuvent être bloquées dans une trappe à pauvreté, peinant à surmonter l'obstacle que constitue le seuil d'accumulation de ressource nécessaire pour converger vers l'équilibre haut. Les économies avec un niveau initial de ressource élevé bénéficient d'un coût net du report d'une unité de consommation plus faible et d'un rendement d'une unité de ressource préservée plus élevé et sont ainsi plus incitées à sacrifier de la consommation pour augmenter le rythme d'accumulation de la ressource le long de la trajectoire de transition conduisant à l'équilibre haut.

Le relâchement de l'hypothèse de préférence additivement séparable avec l'introduction d'effets opposés de l'évolution de la consommation et de la ressource sur la fonction d'actualisation influence l'évolution de l'économie en la plaçant sur un équilibre instable lorsque le taux marginal de substitution entre la ressource et la consommation au niveau de la fonction d'actualisation est supérieur au taux de régénération de la ressource.

Cette possibilité d'équilibres multiples avec seuil en appliquant un taux d'actualisation endogène permet d'étendre l'analyse des trajectoires optimales des modèles de croissance avec ressource renouvelable. En effet, nous montrons qu'il est possible d'obtenir des équilibres multiples avec des seuils dans un modèle de ressource renouvelable strictement concave par un mécanisme qui n'implique pas nécessairement un taux d'actualisation élevé, un effet de stock dans la fonction de bien-être ou une hypothèse de satiété de l'utilité comme principalement démontré dans la littérature. Il est montré également que l'application d'un taux d'actualisation constant aboutit sous des conditions supplémentaires à un équilibre stationnaire unique. Le cas échéant, cet équilibre disparaît lorsque le taux d'actualisation appliqué est relativement faible par rapport au taux de régénération de la ressource.

6 Annexe : Démonstration Proposition 2

(i) $Det(A) < 0 \iff \delta_1 + \delta_2 < r'$ et $|(\delta'_2/\delta'_1)| < |-r'|$, puisque les trois termes du déterminant sont alors négatifs. Le système dynamique étant composé de deux variables non prédéterminées (c et γ) et d'une variable prédéterminée (S), la condition de Blanchard et Kahn (1980) est alors vérifiée. La matrice A a alors deux valeurs propres positives et une valeur propre négative. Démonstration est faite que l'état stationnaire est un point-selle dans ce cas.

(ii) De même, si $\delta_1 + \delta_2 > r'$, $|(\delta'_2/\delta'_1)| > |-r'|$ et

$$\left| r'(\delta_1 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_2 - r') + (r'g_c + g_S) \frac{(\delta'_2 + \delta'_1 r')}{g_{cc}} \right| < \left| \frac{\delta_1 + \delta_2}{g_{cc}} (u'\delta'_2 - h'\delta'_1 - r''g_c - g_{SS}) \right|$$

alors $Det(A) < 0$ et l'équilibre stationnaire est stable en point-selle.

(iii) $Det(A) > 0 \iff \delta_1 + \delta_2 > r'$, $|(\delta'_2/\delta'_1)| > |-r'|$ (conditions nécessaires) et

$$\left| r'(\delta_1 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_2 - r') + (r'g_c + g_S) \frac{(\delta'_2 + \delta'_1 r')}{g_{cc}} \right| > \left| \frac{\delta_1 + \delta_2}{g_{cc}} (u'\delta'_2 - h'\delta'_1 - r''g_c - g_{SS}) \right|$$

conditions suffisantes.

Ainsi, en réécrivant le polynôme caractéristique tel que :

$$P(x) = (-x)^3 + J_1(-x)^2 + J_2(-x) + J_3,$$

où $J_1 = Trace(A) = 2(\delta_1 + \delta_2) > 0$,

$$J_2 = \begin{vmatrix} r' & 0 \\ -g_S & \delta_1 + \delta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_1 + \delta_2 & -g_c \\ \frac{(\delta'_2 + \delta'_1 r')}{g_{cc}} & \delta_1 + \delta_2 - r' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r' & -1 \\ B & \delta_1 + \delta_2 - r' \end{vmatrix}$$

avec $B = \frac{\delta_1 + \delta_2}{g_{cc}} (u'\delta'_2 - h'\delta'_1 - r''g_c - g_{SS})$,

$$J_3 = Det(A),$$

nous pouvons établir la première colonne du schéma de Routh :

$$\begin{array}{cccc} -1 & J_1 & -J_2 + \frac{J_3}{J_1} & J_3 \\ - & + & - & + \end{array},$$

sachant que

$$-J_2 + \frac{J_3}{J_1} = -(\delta_1 + \delta_2)^2 - \frac{r'(\delta_1 + \delta_2 - r')}{2} - \frac{1}{2(\delta_1 + \delta_2)} \left[(r'g_c + g_S) \frac{(\delta'_2 + \delta'_1 r')}{g_{cc}} + B \right] < 0.$$

Le théorème de Routh nous dit que le nombre de racine du polynôme $P(x)$ avec partie réelle positive est égal au nombre de variation de signe dans la première colonne du schéma de Routh. Le nombre de variation de signe dans le schéma de Routh étant égal à 3, le nombre de valeurs propres avec partie réelle positive est donc égal à 3. Le système dynamique est donc instable. \square

Références

- Ayong Le Kama, A. (2001, December). Sustainable growth, renewable resources and pollution. *Journal of Economic Dynamics and Control* 25(12), 1911–1918.
- Ayong Le Kama, A. and K. Schubert (2002). The consequences of an endogenous discounting depending on environmental quality. Technical report, EUREQua, University of Paris 1.
- Becker, G. and K. Murphy (1988). A theory of rational addiction. *Journal of Political Economy* 96, 675–700.
- Becker, R. (1980). On the long-run steady state in a simple model of equilibrium with heterogenous households. *Quarterly Journal of Economics* 95, 375–382.
- Becker, R. and J. Boyd III (1992). Recursive utility and optimal capital accumulation ii : Sensitivity and duality theory. *Economic Theory* 2(4), 547–563.
- Becker, R., J. Boyd III, and D. Sung (1989). Recursive utility and optimal capital accumulation i : Existence. *Journal of Economic Theory* 47, 76–100.
- Berck, P. (1981). Optimal management of renewable resources with growing demand and stock externalities. *Journal of Environmental Economics and Management* 11, 101–118.
- Blanchard, O. and C. Kahn (1980). The solution of linear difference models under rational expectations. *Econometrica* 48(5), 1305–1312.
- Boyer, M. (1975). An optimal growth model with stationary non-additive utilities. *Canadian Journal of Economics* 8(2), 216–237.
- Brock, W. A. and D. Starret (2003). Managing systems with non-convex positive feedback. *Environmental and Resource Economics* 28, 575–602.
- Drugeon, J. (2000). On the roles of impatience in homothetic growth paths. *Economic Theory* 15, 139–161.
- Epstein, L. G. (1987). The global stability of efficient intertemporal allocations. *Econometrica* 55, 329–355.
- Epstein, L. G. and J. Hynes (1983). The rate of time preference and dynamic economic analysis. *Journal of Political Economy* 91, 611–635.
- Fall, E. and K. Schubert (2004). Endogenous discounting, growth and pollution. Working paper, Université de Paris I, EUREQua.

- Iwai, K. (1972). Optimal economic growth and stationary ordinal utility, a fisherian approach. *Journal of Economic Theory* 5, 121–151.
- Koopmans, T. (1960). Stationary ordinal utility and impatience. *Econometrica* 28, 287–309.
- Kydland, F. and E. Prescott (1982). Time to build and aggregate fluctuations. *Econometrica* 50, 1345–1370.
- Le Van, C. and Y. Vailakis (2005). Recursive utility and optimal growth with bounded or unbounded returns. *Journal of Economic Theory* 123, 187–209.
- Lewis, T. and R. Schmalensee (1982). Optimal use of renewable resources with non-convexities in production. In L. Mirman and D. Spulber (Eds.), *Essays in the Economics of Renewable Resources*. Amsterdam : North Holland.
- Li, C. and K.-G. Lofgren (2000). Renewable resources and economic sustainability : A dynamic analysis with heterogeneous time preferences. *Journal of Environmental Economics and Management* 40, 236–250.
- Lucas, R. and N. Stokey (1984). Optimal growth with many consumers. *Journal of Economic Theory* 32, 139–171.
- Maler, K., A. Xepapadeas, and A. de Zeeuw (2003). The economics of shallow lakes. *Environmental and Resource Economics* 28, 603–624.
- Palivos, T., P. Wang, and J. Zhang (1997, February). On the existence of balanced growth equilibrium. *International Economic Review* 38(1), 205–223.
- Rondeau, D. (2001). Along the way back from the brink. *Journal of Environmental Economics and Management* 42, 156–182.
- Ryder, H. and G. Heal (1973). Optimal growth with intertemporally dependent preferences. *Review of Economic Studies* 40, 1–31.
- Tahvonen, O. and S. Salo (1996). Nonconvexities in optimal pollution accumulation. *Journal of Environmental Economics and Management* 31, 160–177.
- Uzawa, H. (1968). Time preference, the consumption function, and optimum asset holdings. In J. Wolfe (Ed.), *Capital and Growth : Papers in Honour of Sir John Hicks*. Edinburgh.
- Wirl, F. (2004). Thresholds in concave renewable resource models. Discussion paper, University of Vienna.