La notion de grandeur et la légitimité de la mathématisation en physique

Michel Paty

in Espinoza, Miguel (éd.), *De la science à la philosophie : Hommage à Jean Largeault*, L'Harmattan, Paris, 2001, p. 247-286.

(Exposé à la *Deuxième Journée de Philosophie des Sciences Jean Largeault*, Universités de Paris-Sorbonne (Paris-4), Paris 1-Panthéon-Sorbonne, Marc Bloch-Strasbourg-2, et Institut Universitaire de France, Paris, Vendredi 7 Mai 1999.)

La notion de grandeur et la légitimité de la mathématisation en physique

Michel PATY

RESUME.

Newton justifiait son utilisation des mathématiques dans la mécanique par sa conception néo-platonicienne du monde physique, qui allait de pair avec ses concepts mathématiques, vrais et absolus, tels que l'espace, le temps, le mouvement, la force, etc. Mais la physique, après lui, tout en étant centrée sur la dynamique newtonienne, donna à sa mathématisation une légitimité différente, comme on peut le constater déjà avec les travaux des 'Géomètres' du XVIIIè siècle tels que Euler, Clairaut et d'Alembert, suivis de Lagrange, Laplace et d'autres. Bien qu'héritiers de l'œuvre de Newton, ils comprenaient autrement la signification et l'utilisation de grandeurs mathématiques pour la physique, d'une manière plus détachée de la métaphysique.

La réception continentale et l'assimilation des *Principia* de Newton s'était effectuée comme une greffe de la physique newtonienne, du calcul différentiel et intégral leibnizien et d'une conception cartésienne de la rationalité (répandue en premier lieu par les disciples malebranchistes de Leibniz). Cette nouvelle pensée de la mathématisation de la physique n'est aucunement un retour à l'identification cartésienne de la physique à la géométrie, mais on peut cependant la rapporter à la conception des grandeurs de Descartes telle que ce dernier la développa et l'analysa à l'aide de la notion de dimension dans ses *Regulæ ad directionem ingenii* (en particulier la règle 14). On peut suivre le fil de cette idée dans les conceptions sur la physique des générations suivantes, selon des spécifications davantage philosophiques ou mathématiques selon les auteurs, avec Kant, Riemann et d'autres.

Cette enquête sur la pensée originelle des grandeurs mathématiques et des grandeurs physiques conçues selon leurs mathématisation, nous conduit à suggérer une extension de sens pour le concept de grandeur physique, en mettant l'accent sur ses aspects relationnel et structural sans le restreindre à l'acception qui en fait une simple entité «à vaaleurs numériques». Un tel élargissement aurait des implications immédiates sur notre compréhension d'aspects «non classiques» de la physique contemporaine, dans le domaine quantique et dans celui des systèmes dynamiques.

SUMMARY. *The Idea of Quantity at the Origin of the Legitimacy of Mathematization in Physics*

Newton's use of mathematics in mechanics was justified by him from his neo-platonician conception of the physical world that was going along with his «absolute, true and mathematical concepts» such as space, time, motion, force, etc. But physics, afterwards, although it was based on newtonian dynamics, meant differently the legitimacy of being mathematized, and this difference can be seen already in the works of eighteenth century «Geometers» such as Euler, Clairaut and d'Alembert (and later on Lagrange, Laplace and others). Despite their inheritance of Newton's achievements, they understood differently the meaning and use of mathematical quantities for physics, in a way that was more neutral to metaphysics.

The continental reception and assimilation of Newton's *Principia* had indeed occured as its budding onto Leibniz' calculus and a cartesian conception of rationality (spred in particular by the malebranchist disciples of Leibniz). This new thought of the legitimacy of mathematization is clearly at variance with Descartes' identification of physics with geometry, but it nevertheless can be traced back to Descartes' conception of magnitudes, as it was developed and analyzed from the notion of dimension in his *Regulæ ad directionem ingenii* (in particular, rule 14). This idea can be followed afterwards with further philosophical or mathematical specifications through authors such as Kant, Riemann and others.

This inquiry into the original thought of mathematical magnitudes, and of physical magnitudes conceived through mathematization, leads us to suggest an extension of meaning for the concept of physical magnitude that puts emphasis on its relational and structural aspects rather than restraining it to a simple «numerically valued» acception. Such a broadening would have immediate implications on our comprehension of «non classical» aspects of contemporary physics in the quantum area and in dynamical systems.

TABLE

1

INTRODUCTION
THEORIE PHYSIQUE, GRANDEURS ET QUESTIONS D'ONTOLOGIE

Mon propos, dans cette réflexion sur le concept de grandeur ou de quantité, est double : je voudrais, tout d'abord, m'interroger sur la *légitimité de la mathématisation de la physique*, et ensuite, comme conséquence, envisager la possibilité d'*étendre le concept de grandeur* au-delà du sens communément admis de grandeur «à valeurs numériques». Une telle extension serait particulièremment adéquate pour simplifier les problèmes d'«interprétation» de la physique quantique.

Un mot, d'abord, sur ce qui se trouve en toile de fond de ces questions, à savoir le problème du réalisme, donné souvent comme celui de l'ontologie, moyennant une assimilation de la réalité à la substance. Il existe, à mon sens, un malentendu sur cette question à propos des sciences contemporaines. La critique systématique de la notion de substance a déjà été largement faite, au XVIIIè siècle notamment, avec le rejet des résidus de la pensée scolastique. Pour les physico-mathématiciens de cette époque (les Géomètres, comme ils aimaient s'appeler), la physique traite pour l'essentiel de *relations* entre des grandeurs physiques exprimées mathématiquement (nous y reviendrons). Il n'y avait là nulle ontologie «absolue» de quelque sorte que ce fût : c'est une leçon que la science et la philosophie des sciences actuelles ont amplement faites leur, et l'on peut se demander si les attaques menées au XXè siècle contre l'ontologie visent bien une cible réelle.

Certes, les critiques contemporaines de l'«ontologie» portent sur les «choses» et, celles-ci étant rapportées à la «réalité», la cible est bien *la réalité*, comme le débat quantique l'a clairement montré. Cependant, la *réalité physique*, pour ceux qui la revendiquent comme constituant l'objet de la physique, n'est pas conçue par eux comme une substance[1] et peut fort bien coexister avec une «relativité de l'ontologie», comme nous le verrons bientôt.

THEORIE, SIGNIFICATION ET PROBLEMES D'ONTOLOGIE

Même si la dominante dans la philosophie des sciences d'aujurd'hui est à l'empirisme, les arguments de ceux qui insistent sur la *dimension théorique* et la *rationalité de la science*, en particulier en ce qui concerne la physique, ont pour eux l'avantage de dépasser les limitations inhérentes aux conceptions qui ne retiennent de théorique que l'idée d'un modèle déductif de lois purement descriptives («covering-law model»), pour ce qui est de la signification des contenus sémantiques («*semantic meaningfulness*»). Ceci, parce que *la theorie n'y reste pas enfermée* dans le langage propositionnel, dans l'observation pour l'observation ou dans des énoncés de mesure rapportés à la notion de mesure, dans des termes théoriques qui seraient réductibles à des termes empiriques, de manière purement phenoméniste, mais parce qu'elle *vise des objets*, ou des choses, auxquelles sont rapportées les propriétés étudiées[2]. Faute de le considérer, nous devrions modifier notre conception d'un univers physique pour celle d'un univers fait de données sensibles (dans la ligne de George Berkeley, Stuart Mill, Ernst Mach et aussi de Niels Bohr), et ne voir dans la connaissnce qu'une entreprise purement pragmatique. En fait, la *théorie* est descriptive et explicative à un niveau plus élevé de l'entendement que simplement celui des modèles et des lois, et c'est à ce niveau, qui est son niveau propre, qu'on doit la considérer : ce niveau où elle «porte son interprétation avec elle», ce dont une simple loi est incapable[3]. Jean Largeault écrivait à sa manière, pour la physique, dans un sens convergent, que «la tâche des théories est (…) de déterminer ce que les faits laissent indéterminés»[4].

L'on se heurte ici à des difficultés, car l'ontologie qui est (ou qui était) associée d'ordinaire à des théories sur des objets se fait soudain plus obscure. En premier lieu, et d'une manière générale, il nous faut affronter la question philosophique sur l'ontologie soulevée par nos systèmes de langages et qui conduit à ce que Willard V. Quine appelle «relativité de l'ontologie» (le caractèrre circulaire fait que les questions ontologiques perdent leur signification et que le choix d'une ontologie ne peut qu'être pragmatique)[5]. La «relativité de l'ontologie»

---

[1] Sur cette question, voir, par exemple, Cassirer [1910].
[2] Wartofsky [1968], p. 276-287.
[3] *Ibid.*, p. 282.
[4] Largeault [1984], p. 155.
[5] Quine [1969]. Jean Largeault (qui traduisit en français le livre de Quine) comprenait cette expression, «relativité de l'ontologie», comme une «relativité des points de vue». On lui doit des

paraît en fait assez proche du conventionalisme, si l'on interroge, pour une théorie scientifique, les fondements du système de concepts, les soubassements des notions de référence, considérées comme des données ou comme des évidences provisoires. En vérité, l'idée n'est pas si nouvelle, trois siècles après les réflexions de Blaise Pascal, dans son essai «De l'esprit géométrique» et dans les «Pensées», sur la disproportion de l'homme dans l'univers, qui veut trouver les raisons des raisons dans le processus sans fin d'une analyse régressive des notions prises pour élémentaires[6].

Marx Wartofsky parlait d'«historicité des épistémologies et des ontologies» en analysant, les «trois stades de la constitution historique de l'objet scientifique»[7]. Il voyait, pour le XVIIè siècle classique (rattaché à la seconde période, la première étant celle de la culture grecque), une conception de l'«objet scientifique comme étant defini dans l'espace et dans le temps et entièrement accessible à la mesure», et pour laquelle «le formalisme est congruent avec les grandeurs»[8]. L'épistémologie réaliste, inspirée par l'astronomie et par la physique de l'époque, et par leurs objets, ne résultait pas d'un choix philosophique, mais se trouvait impliquée par la pratique scientifique. La conception qui vient à dominer au troisième stade s'oppose à elle, avec le débat entre Einstein et Bohr sur la mecanique quantique qui indique deux ontologies possibles : l'ontoogie «réaliste» et l'ontologie «constructiviste»

L'ontologie constructiviste (je préférerais dire, pour ma part, le *constructivisme opérationaliste*, celui de Bohr) admet le réalisme classique pour la vie courante et choisit une discontinuité ontologique pour la connaissance scientifique, en développant la conception de la complémentarité. Le réaliste (je dirais plutôt le *réalisme critique*, celui d' Einstein), envisage un changement dans la construction de l'objet classique aussi bien que quantique, tout en maintenant une continuité des critères ontologiques. Pour Marx Wartofsky, la physique contemporaine se trouve à un stade constructiviste, mais cela pourrait bien changer avec le temps, en raison de l'existence d'une continuité conceptuelle, selon lui, dans les débats du réalisme et du constructivisme, et de l'impossibilité de dire laquelle de ces deux épistémologies est fausse et laquelle est vraie. Les conventions, faisait-il remarquer cependant, sont testées par l'expérience, ce qui fait une différence avec le constructivisme au sens strict. Il se considérait, quant à lui, tantôt comme réaliste à tendance constructiviste, et tantôt l'inverse.

Le réalisme critique n'est-il pas, en fait, un réalisme constructiviste ? avec cette réserve de devoir éviter toute ambiguïté dans l'utilisation du mot «constructivisme». J'entends par *réalisme critique* une position qui fait toute leur place aux *constructions symboliques* dans les représentations de la *réalité*, et qui se conçoit comme un *programme* pour les constructions théoriques de la physique.

Ces remarques philosophiques générales et métaphysiques mises en

---

remarques pertinentes sur le «relativisme épistémique» et le conventionalisme de Poincaré et de Quine qu'il opposait à un «relativisme ontologique» qui ignore la différence entre convention hypothétique et fait naturel (Largeault [1984], 151-156).

[6] Pascal [1657] et *Pensées* ("Disproportion de l'homme"), *in* Pascal [1993], p. 527.

[7] Marx Wartofsky, séminaire à l'équipe REHSEIS (Paris), le 10 mai 1994 (donné en français, inédit, et cité d'après mes notes personnelles).

[8] «L'objet scientifique est objet dans l'espace et le temps, totalement accessible à la mesure. Le formalisme est congruent avec les grandeurs».

place comme fond de décor, revenons au problème de l'«ontologie» considéré à propos d'une science dont nous admettons qu'elle est *construite* ou *élaborée*.

Ce que nous connaissons en mathématiques, et aussi bien en physique, écrivait Henri Poincaré, ce sont «*des rapports*»[9]. Cela tient à ce que la physique traite de *concepts* (des entités symboliques et mentales), qui sont exprimées par des *grandeurs* ayant la forme de *quantités*. Comme pour compléter la remarque de Poincaré, Albert Einstein déclarait, pour sa part, que le réalisme en science est un programme, par lequel on conçoit la théorie physique comme visant la description ou la représentation d'objets que l'on suppose *exister indépendamment* des possibilités de l'observation et de la mesure (lesquelles sont par ailleurs nécessaires pour comparer nos représentations avec les phénomènes). Ce prédicat d'existence, rapporté à un monde extérieur, n'est qu'une hypothèse, de nature très générale il est vrai[10]. Si c'est là de l'ontologie, c'est dans une acception large du mot ; c'est, en un sens, une ontologie de *rapports ou relations construites orientées vers* quelque chose de réel, non d'un réel considéré en tant que tel («en soi»)[11]. Rien, en outre, ne nous y oblige : nous sommes libres de choisir ou non cette hypothèse (cet axiome, ou ce programme). Mais, dans un cas comme dans l'autre, nos représentations des choses ou des phénomènes seront tenues par l'exigence de consistance (ou cohérence).

C'est cette consistance que je voudrais examiner pour la physique. Au lieu de poser des questions d'ontologie, et d'y réduire les problèmes de sens ou de signification des énoncés scientifiques, nous interrogerons directement la nature de ces énoncés dans le cas de cette science, afin de savoir s'ils correspondent à des *choses* et des *états de choses* dans le sens indiqué ci-dessus. C'est-à-dire s'ils sont intégrés de manière cohérente et pour ainsi dire organique dans un schème théorique, sans nécessité d'introduire, *dans leur définition en tant qu'objets*, des restrictions renvoyant à des conditions qui leur seraient externes (nous demanderons seulement, en ce qui concerne l'observation et l'expérience, un accord *a posteriori* avec les propositions théoriques).

Cela nous conduit à deux problèmes majeurs, spécifiques de la physique comme science. Le premier : quelle est la raison du privilège donné à la mathématisation, dans le processus de conceptualisation et de constitution des théories en physique ? Et le second : qu'entend-on, dans cette perspective, par «grandeurs physiques d'expression mathématique» ?

Ces deux problèmes, en réalité, n'en font qu'un, comme nous le verrons à l'examen, dans les réflexions qui suivent sur les grandeurs en physique, leurs propriétés et leur signification.

---

[9] Poincaré [1905], chapters 10 and 11.

[10] Einstein [1949], p. 674-675 ; Paty [1993], p.474-478.

[11] Paty [1988], notamment les chapitres 1 et 10. Sur l'ontologie, voir encore Largeault [1984], p. 142-150, commentant cette assertion de René Thom que la connaissance véritable porte sur l'être, non sur le sujet. (L'article mentionné de R. Thom, «Le problème des ontologies régionales en science» (1982), figure dans son recueil, Thom [1990]).

2.

LA PHYSIQUE : CONCEPTUALISATION ET MATHEMATISATION

MATHEMATISATION ET STRUCTURE DES THEORIES PHYSIQUES

Le rapport étroit aux mathématiques (ou à la mathématisation) ainsi qu'à l'expérience et à l'observation quantitative fait la spécificité de la physique parmi les sciences. Déjà effectif au début de la science moderne, il assura la longue suprématie de la physique sur les autres branches de la connaissance, en la faisant considérer comme un modèle de la rationalité scientifique. En physique, les phénomènes sont représentés par des concepts, qui sont exprimés sous forme de grandeurs ou quantités, dotées d'une définition exacte par le moyen des mathématiques. Les relations entre les *concepts* physiques (tels, par exemple, la distance et les coordonnées spatiales, la durée et le temps, la force, etc.) sont des relations entre ces *grandeurs*, qui prennent généralement la forme d'*équations* ou de propositions quantitatives comme les *principes* (d'inertie, de relativité, ou de conservation, etc.). Les équations sont l'expression mathématique de *lois* (lois du mouvement, lois de la nature) et les principes, formulés comme des propriétés générales constatées des phénomènes, fournissent la condition permettant d'exprimer mathématiquement les grandeurs et leurs relations.

Cette conception de ce dont une théorie physique est constituée pour l'essentiel, présente dès le début de la mécanique, est toujours valable pour la physique de notre temps. Mais il nous faut, à cet endroit, nous interroger sur la nature de ces grandeurs ou, pour mieux dire, sur ce que l'on entend d'habitude quand on parle de *grandeurs ou* de *quantités physiques*, ou quand on travaille sur elles.

QU'ENTEND-ON PAR «GRANDEURS» OU «QUANTITES PHYSIQUES» ?

Notre manière de comprendre la signification de la notion de *grandeur* ou de *quantité physique* est tributaire des changements que son utilisation a connus avec l'évolution de la physique. Depuis le XIXè siècle, l'importance prise par l'expérience comme moyens, comme activité et comme pratique a tendu à identifier l'exigence d'exactitude avec celle de précision numérique. Après tout, les expériences s'achèvent avec des nombres, et telle devrait être, selon les conceptions courantes, la signification donnée au concept de grandeur ou quantité, à savoir d'être *à valeurs numériques*. Cette tendance s'est accrue au XVIIIè siècle, avec le développement de méthodes puissantes d'approximations en astronomie (calculs de perturbations par des développements en série dans le problème à trois corps[12]), et surtout au XIXè siècle, quand tous les phénomènes quotidiens, de l'optique, de l'électricité, du magnétisme, de la chaleur, de la chimie, étaient assimilés par des théories physiques, ou du moins soumis à des études

---

[12] Voir les travaux d'astronomie de Clairaut, Euler, d'Alembert, Laplace, etc.

quantitatives systématiques[13].

On ajoutera à cela la construction d'instruments scientifiques de précision et le contexte général de l'industrialisation, et on considerera également que l'exigence de précision numérique se vit renforcée et rationnellement justifiée par la mise au point d'une théorie des erreurs, en relation à la théorie mathématique des probabilités et au «déterminisme laplacien» selon l'appelation consacrée (le mot «déterminisme» n'était pas encore entré dans la langue quand Pierre-Simon Laplace en énonça la conception de fait dans la déclaration désormais classique de son *Essai philosophique sur les probabilités*[14]). Le mot d'ordre, à l'époque, était, pour ainsi dire : exactitude et probabilités, dépassant leur dualisme effectif (les probabilités étant comprises dans le sens «fréquentiel» ou «subjectif» d'obtenir une connaissance à partir de données incomplètes).

La *grandeur* (ou quantité) en physique est comprise comme une «mesure», continue ou discontinue. L'élaboration de la physique, qui a commencé par la mécanique avec la révolution scientifique du XVIIè siècle, s'est effectuée depuis lors à l'aide de quantités conçues selon la «mesure». «L'ordre et mesure», écrivait Descartes, mais «mesure» avait, dans cette expression, le sens traditionnel d'être sujet à des proportions et non celui de la mesure telle qu'on la concevrait en général par la suite, correspondant à des expériences plus ou moins directes. Cette acception ultérieure devait, en fait, opérer une réduction du sens dans lequel les quantités physiques devaient être le plus souvent considérées, à savoir des quantités *à valeurs numériques*, dont la mesure révèle les valeurs. Certes, la plupart des grandeurs physiques - sinon toutes, comme on l'a longtemps pensé - sont de ce type, qu'il s'agisse des coordonnées spatiales et des distances, du temps et de la durée, de la vitesse, de l'accélération, de la force, de la masse, de la charge électrique, de l'énergie, des champs électromagnétique et gravitationnel se propageant dans l'espace au cours du temps, etc. Ces concepts physiques sont représentés par des grandeurs continues, à l'aide du calcul différentiel et intégral, et ces grandeurs peuvent être mises directement en relation avec un dispositif de mesure qui détermine leurs valeurs numériques en fonction d'autres grandeurs prises comme paramètres variables.

Telle était la conception des grandeurs physiques quand les quanta survinrent. Les grandeurs physiques, à valeurs numériques, ne pouvaient être, selon la conception en vigueur, que celles susceptibles d'être mesurées directement. Mais nous en reparlerons en terminant. Nous nous trouvons, pour l'instant, devant la situation suivante : les théories physiques sont mathématisées parce qu'elles mettent en œuvre des grandeurs exprimées mathématiquement. Mais ce n'est encore là que décrire ce qu'elles sont, et non le justifier. Il nous faut donc poursuivre plus avant notre enquête sur les grandeurs et la mathématisation.

ELABORATIONS HISTORIQUES : DES QUALITES AUX QUANTITES

---

[13] Voir, notamment, les travaux de Fresnel, Ampère, Faraday, Regnault, Joule, Fizeau, Mascart, etc.

[14] Laplace [1814], publié comme «Introduction» à son ouvrage un peu antérieur, *Théorie analytique des probabilités* (Laplace [1812] : «Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, etc.…» (p. vi-vii de l'édition des *Oeuvres complètes* de Laplace).

Même si l'on veut s'en tenir à l'essentiel, on ne devra pas oublier l'origine des concepts et de leur signification, car leur structuration dans le présent est faite de la chair du passé. (Précisément, s'il est pas d'ontologie évidente pour ce dont nous parlons, du moins la connaissance de la façon dont la trame en a été tissée pourrait en être un substitut).

L'idée de *grandeur* comportait déjà dans l'Antiquité et au Moyen âge une signification conceptuelle (c'était l'ancienne *qualité*) éventuellement associée à des valeurs numériques (telles les intensités ou les degrés d'une qualité). Pour Aristote, par exemple, le temps était le nombre du mouvement. Mais la notion même de mouvement était complexe, puisqu'elle faisait appel à celles de puissance et de cause continue, et le concept de vitesse gardait un sens ontologique, qualitatif, d'ailleurs relié à l'idée d'une différence de nature entre le mouvement et le repos[15].

Une lente transformation des qualités en quantités se produisit, comme on le sait, au Moyen-âge, au XIV è siècle, avec les maîtres scolastiques des Universités d'Oxford et de Paris (Robert Gosseteste, Guillaume d'Ockham, Jean Buridan, Nicole Oresme…), à l'occasion de l'étude de la variation avec le temps de l'intensité de la «qualité du mouvement», ou *vitesse*, et l'invention du concept d'«*impetus*», conçu comme une impulsion dynamique, une action interne transférée au corps mis en mouvement. Ce furent autant de pas importants vers la géometrisation et la mathématisation du mouvement[16].

L'histoire, ici, enseigne encore autre chose : la nécessité de disposer d'abord des bons principes physiques pour pouvoir obtenir la mathématisation. Telle est l'une des leçons de l'œuvre de Galilée : avec sa conception tout à fait neuve de l'«impeto», qui n'était plus la *cause*, mais l'*effet* du mouvement, il mettait au premier plan deux idées essentielles : la conservation du mouvement et la loi d'inertie. La quantification du mouvement effectuée par Galilée correspondait à l'effacement effectif des qualités, le mouvement étant désormais placé sur le même statut ontologique que le repos. Le mouvement ou la vitesse n'affectait pas les propriétés des corps. Des mouvements de natures variées pouvaient dès lors être unifiés, les vitesses (ou, en fait, les quantités de mouvement, ou impulsions), pouvaient être composées, et le changement de mouvement dans la chute libre des corps pouvait être étudié de manière «quantitative», c'est-à-dire en termes de grandeurs ou quantités[17]. La dernière étape de l'élaboration de la théorie physique de la chute des corps fut le choix de la grandeur (ou du concept) «sensible» pour l'étude des lois du mouvement. Ce concept s'avéra être le *temps*, qui faisait ainsi son entrée en physique comme variable fondamentale[18].

Le passage des qualités aux quantités fut décisif pour la constitution de la théorie physique, qui exprimait les lois sous la forme d'équations entre les

[15] Aristote [Phys]. Cf. Clagett [1959]. Sur l'évolution des concepts de temps, d'espace, de vitesse, de relativité des mouvements, de vide, voir, respectivement : Paty [1994b, 1998c, 1997c, 1999c, 1998b]. Plus généralement, sur les changements dans les rapports entre la philosophie et la physique, cf. Paty [1998a].

[16] Voir, en particulier, Duhem [1913-1959], Crombie [1952], Clagett [1959].

[17] Paty [1994a].

[18] Paty [1994b].

grandeurs portant les contenus conceptuels.

LA CONSTRUCTION DE LA PHYSIQUE PAR SA MATHEMATISATION

De l'histoire ultérieure de la construction de la physique par la mathématisation je mentionnerai seulement cet autre moment décisif que fut la construction du temps instantané à partir de la notion du temps conçu comme durée (flux continu et quantité), appropriée à la formulation de la «loi de causalité» de la dynamique newtonienne. Cette invention (sans entrer dans les détails) avait à voir avec le nouveau calcul (des fluxions pour ce qui concernait Newton, différentiel et intégral pour Leibniz), bien que Newton, en élaborant la dynamique, ait voulu s'en tenir à la «géométrie synthétique». Mais sa géométrie des limites définie et mise en œuvre dans les *Principia* est équivalente à son calcul des fluxions[19]. Ce qui nous intéresse, à cet endroit, c'est l'apparition d'une nouvelle sorte de grandeur ou quantité, qui serait rendue plus tard explicite : les grandeurs continues comme conceptualisées par le calcul différentiel et intégral, c'est-à-dire l'analyse, la «nouvelle analyse».

Dès lors, l'impulsion était donnée. La physique serait par la suite édifiée, dans toutes ses disciplines, par l'analytisation, selon la conception différentielle de l'espace, du temps et des autres grandeurs requises.

JUSTIFIER LA MATHEMATISATION DE LA PHYSIQUE.

Galilée invoquait, pour justifier le caractère mathématique des grandeurs et des lois en physique, l'idée que le «Livre de la Nature» est écrit dans la langue des figures et des nombres. «Ses caractères», écrivait-il de l'Univers, «sont des triangles, des cercles et d'autres figures géométriques, sans lesquels il serait impossible à l'homme d'en comprendre un seul mot». A quoi il ajoutait que toutes les propriétés des corps extérieurs dans la nature peuvent être attribuées, en ultime analyse, aux notions «de grandeurs, de figures, de nombres, de lent ou de rapide, lesquels ont des effets sur notre perception sensorielle et sont, pour ainsi dire, la véritable essence des choses»[20].

Quant à Newton, il exprima, dans ses *Principia*, les lois de la mécanique et de la gravitation sous forme géométrique, donnant ainsi corps à son intention, affirmée dès le titre de son ouvrage, de formuler les «*Principes mathématiques de la philosophie naturelle*»[21]. Ces «principes mathématiques» se rapportaient, en réalité, davantage à une conception générale de la géométrie (la «géométrie synthétique» appelée dans la Préface[22]) qu'à la géométrie analytique, bien que sa «géométrie des limites» (celle des «premières et dernières raisons des grandeurs»[23]), à l'aide de laquelle il formula les problèmes de mécanique et d'astronomie et obtint les résultats que l'on sait, fût équivalente conceptuellement

[19] Paty [1994a].
[20] Galilée, dans *Il Saggiatore* (Galileo [1623]).
[21] Newton [1687]. Cf. Whiteside [1970].
[22] Newton [1687], Préface de Newtons à la première édition.
[23] Newton [1687], Book 1, Section 1, éd. Cajori, p. 29-39.

au calcul des fluxions qu'il avait élaboré en mathématiques. Cette difference est sans doute liée à sa conception de la mathématisation de la mécanique et des lois de la physique.

Newton justifiait son utilisation des mathématiques en mécanique par une conception néo-platonicienne du monde physique qui accompagnait sa formulation des concepts «absolus, vrais et mathématiques» tels que l'espace, le temps, le mouvement, la force, etc.[24]

Mais la physique concevrait différemment par la suite, tout en étant basée sur la dynamique newtonienne, la légitimité de sa mathématisation. La divergence dans l'interprétation apparait très clairement dès les les travaux des «Géomètres» du XVIIIè siècle comme Leonhard Euler, Alexis Clairaut et Jean le Rond d'Alembert (suivis de Joseph-Louis Lagrange, Pierre-Simon Laplace et d'autres). Tout en étant les héritiers de la physique de Newton, c'est d'une manière fort différente de ce dernier, plus neutre métaphysiquement, qu'ils comprenaient la signification et l'utilisation des grandeurs mathématiques pour la physique.

Considérons, par exemple, la justification que d'Alembert donnait de l'«analyse» dans ses travaux de dynamique et d'hydrodynamique (ou encore d'astronomie). L'analyse faisait partie intégrante de sa pensée des concepts de la mécanique. Il pensait au départ la dynamique en termes des concepts de base du mouvement et des grandeurs correspondantes (espace, temps, vitesse, quantité de mouvement, accélération, …) tels que le calcul différentiel permettait de les exprimer et de les concevoir, et formulait les principes de la dynamique (inertie, composition de mouvements, équilibre) en termes de ces concepts. Il était en mesure, à partir de son expression du second principe du mouvement, d'ajouter directement à une vitesse donnée la différentielle d'une autre, obtenant ainsi la «seconde loi» de Newton (de la force accélératrice) comme corollaire. Il donna également une formulation originale du troisième «principe» du mouvement (celui de l'«équilibre», équivalent à la troisième loi de Newton, «de l'action et de la réaction», mais en terme de mouvements détruits ou compensés). Cette reformulation lui servit à concevoir et à établir son célèbre «principe» général de la dynamique (le «principe de d'Alembert»), qui était en réalité un théorème puissant, directement démontré[25]. La construction algébrique systématique par Lagrange de la «Mécanique analytique» reposerait aussi sur le même type de justification directe, découlant des définitions conceptuelles et mathématiques des grandeurs physiques. C'est sur cette même base «mathématico-conceptuelle» que la physique mathématique et ensuite la physique théorique furent élaborées[26].

D'Alembert, qui fut le premier à donner une théorie pleinement mathématisée de l'hydrodynamique, en appliquant aux fluides le calcul des équations aux dérivées partielles qu'il inventa et développa pour l'occasion[27], en énonça de la manière la plus claire les conditions. «Les sciences qu'on appelle Physico-mathématiques», écrivait-il dans l'introduction à son *Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides*, «consistent dans l'application du calcul aux phénomènes de la nature. (…) C'est à la plus subtile Géométrie qu'il est permis de tenter cette Théorie [de la résistance des fluides]. L'invention du calcul

---

[24] Newton [1687], Scholie des Définitions, Cajori ed., p. 6.
[25] D'Alembert [1743]. Voir Paty [2001].
[26] Paty [1994a].
[27] D'Alembert [1747, 1749-1752]. Voir Grimberg [1998].

différentiel et intégral nous a mis en état de suivre en quelque manière le mouvement des corps jusques dans leurs élémens ou dernières particules. » D'Alembert déclarait ensuite ceci, qu'il convient de souligner : « C'est *avec le secours seul de ces calculs* qu'il est permis de pénétrer dans les Fluides, et de découvrir le jeu de leurs parties, l'action qu'exercent les uns sur les autres ces atomes innombrables dont un fluide est composé et qui paroissent tout à la fois unis et divisés, dépendants et indépendants les uns des autres ». C'est que « le mécanisme intérieur des Fluides [est] *si peu analogue* à celui des corps solides que nous touchons et sujet à *des lois toutes différentes* (…) ».[28]

D'Alembert soulignait ainsi la nécessité d'une théorie, physique et mathématique, comme étant *la seule façon possible* de connaître ces corps, sans plus de recours à l'imagination ou aux hypothèses arbitraires. Il indiquait aussitôt après que la formulation des grandeurs et de leurs relations mathématiques était soumise à la condition préalable d'obtention d'un principe physique relatif à l'objet ou au type de phénomène considéré : «J'ai donc cru devoir m'appliquer à chercher ces principes et la manière d'y appliquer le calcul s'il est possible». La mathématisation est gouvernée par le genre de propriétés physiques à considérer : cette exigence est post-newtonienne et, en un sens, non cartésienne.

Pourtant, c'est à Descartes que d'Alembert reconnaissait fondamentalement le mérite d'avoir rendu possible, en matière de principe, la mathématisation de la physique. L'invention par Descartes de la géométrie algébrique, que d'Alembert appelait l'«application de l'algèbre à la géométrie»[29], et où il voyait une «idée des plus vastes et des plus heureuses que l'esprit humain ait jamais eues», «sera toujours», écrivait-il dans le *Discours Préliminaire de l'Encyclopédie*, «la clef des plus profondes recherches, non seulement dans la géométrie sublime [c'est-à-dire l'analyse, le calcul différentiel et intégral], mais dans toutes les sciences physico-mathématiques»[30]. Cette remarque désigne les raisons profondes de la mathématisation de la physique, avec le traitement mathématique de concepts physiques exprimés sous forme de *grandeurs continues*.

La nouvelle conception de la mathématisation de la physique, partagée par la plupart des scientifiques depuis le XVIIIè siècle, et qui se trouve formulée de la manière la plus claire par d'Alembert, s'oppose à l'identification cartésienne de la physique avec la géométrie[31], étant admis depuis Newton que les corps ne peuvent être pensés, même ramenés à leurs « propriétés essentielles », suivant la seule «extension» spatiale. Outre celle-ci, les corps ont des propriétés telles que l'impénétrabilité et l'attraction, qui n'y sont pas réductibles. De plus, la mécanique (plus généralement, la physique) diffère de la géométrie et des mathématiques en ce qu'elle traite de changements dans le temps : la mécanique, écrivait encore d'Alembert (et Lagrange après lui), est de la géométrie dans le temps[32]. C'est

---

[28] D'Alembert [1749-1752], Introduction, dans l'ouvrage de 1752, p. vii-xliii (souligné par moi, M.P.).
[29] D'Alembert, article «Application …» de l'*Encyclopédie* (Diderot & d'Alembert [1751-1780], vol. 1, paru en 1751), et *Eclaircissements à l'Essai sur les Eléments de philosophie*, dans l'édition de 1987 de d'Alembert [1758], chapitre 13.
[30] D'Alembert [1751], éd. 1965, p. 94.
[31] Descartes [1637, 1644].
[32] D'Alembert [1743] Première partie, [1759], chapitre 16, p. 367-402, et article «Dimension» de l'*Encyclopédie*, *in* Diderot & d'Alembert [1751-1780], vol. 4 (1754). Voir Paty [1977, 1998c].

néanmoins à Descartes que l'on doit rapporter l'idée essentielle de cette pensée moderne de la mathématisation : à sa conception des grandeurs telle qu'on la trouve exposée et analysée, à partir de la notion de dimension, dans ses *Regulæ ad directionem ingenii*, écrites autour de 1628 (en particulier, la règle 14[33]). Cette conception se retrouve d'ailleurs par la suite, développée selon de nouvelles spécifications philosophiques ou mathématiques, chez des auteurs comme Kant, Riemann et d'autres.

3.

L'INTELLIGIBILITE RAPPORTEE A L'ORDRE ET A LA MESURE. - SUR LES GRANDEURS

LA «MATHESIS UNIVERSALIS» DE DESCARTES, OU LES DEUX FONCTIONS DES MATHEMATIQUES DANS L'EXERCICE DE LA RAISON

Par-delà l'extension qu'il avait donnée aux mathématiques dans leurs méthodes d'unification et dans leurs opérations, Descartes concevait sa *mathesis universalis* selon un point de vue plus général, révélateur des facultés de l'intelligence elle-même, et susceptible de se manifester pour d'autres domaines de la connaissance, y compris pour les questions métaphysiques. Elle était appropriée, en particulier, à la connaissance du monde physique réel, par l'utilisation des mathématiques dans différents domaines de la physique.

Les *Règles pour la direction de l'esprit* de Descartes et, par la suite, le *Discours de la méthode*, affirment une double fonction des mathématiques dans l'exercice de la raison[34]. Elles servent, en premier lieu, de modèle et de garantie de certitude dans les relations entre les propositions. La règle 1 énonce que le pouvoir de la *mathesis universalis* peut être orienté vers la formation ou l'acquisition, par l'esprit, de l'aptitude à former «des jugements fermes et vrais sur tout ce qui lui est présenté»[35]. En second lieu, elles gouvernent l'expression des grandeurs par lesquelles nous représentons le monde. Pour ce qui est de cette deuxième fonction, considérant les sciences de la nature concernées par les mathématiques comme l'astronomie, la musique, l'optique, la mécanique, et d'autres encore, Descartes voyait clairement, disait-il, que nous devons «amener aux mathématiques tout ce en quoi on examine *l'ordre et mesure*», sans spécifier l'objet particulier de cette mesure[36].

Par ces considérations, Descartes ne se proposait pas tant d'élaborer une physique, ou une mécanique, à partir des mathématiques, ce qu'il n'entreprit et ne réussit d'ailleurs jamais complètement, que de penser l'intelligibilité des objets de ces sciences. Il effectuerait, certes, une approche mathématique de la mécanique et de l'optique, dans la mesure où elles entretiennent un rapport aux

---

[33] Descartes [1628]. Cf. Paty [1997b, 1998a].
[34] Descartes [1628, 1637].
[35] Descartes [1628].
[36] Descartes [1628]. Voir le commentaire de la Règle 14.

grandeurs ; il proposerait plus tard de géométriser la physique, suite à son identification de la matière avec l'extension spatiale[37]. Mais son affirmation fondamentale relativement à la physique, dans les *Règles* comme dans ses travaux ultérieurs, jusqu'aux *Principes de Philosophie*, était l'exigence et la nécessité de lois[38].

ORDRE ET MESURE. GRANDEURS, MULTIPLICITES, RELATIONS

Descartes voyait dans la physique une science de grandeurs sujettes à des rapports ou proportions, ce qui justifiait par là-même sa mathématisation de principe par des lois, sous le signe de l'exigence d'intelligililité, liée à la *mathesis universalis*. Dans ce sens, c'était la voie même de la connaissance qui entraînait la mathématisation des grandeurs portant sur le monde réel, à la différence des raisons néo-platoniciennes invoquées par Newton (celles du monde «vrai et mathématique» opposées aux réalités «apparentes et communes» ou «sensibles»).

Dans la Règle 14, Descartes définit la *grandeur en général*, relative à un objet quelconque, en s'appuyant sur le concept de *dimension* emprunté à l'extension spatiale de la géométrie, pris pour archétype de toute grandeur justiciable de l'ordre et de la mesure. La dimension, cette «espèce de grandeur qui entre toutes sera représentée le plus facilement et le plus distinctement dans notre imagination», écrivait-il, est «l'étendue réelle du corps abstraction faite de tout le reste sauf de la figure». Le rapport entre des grandeurs (qui permet de connaître l'une d'entre elles à partir des autres) exprime en même temps leur identité ontologique : «En déduisant un objet déterminé et inconnu d'un autre déjà connu antérieurement, on ne trouve pas pour cela chaque fois un nouveau genre d'être. Il y a seulement une extension de toute notre connaissance qui nous fait comprendre que d'une manière ou d'une autre l'objet cherché participe de la nature de ceux qui nous ont été donnés dans la proposition».

Dans l'analyse conceptuelle qu'il donnait des aspects de l'étendue ayant à voir avec les différences de proportions, Descartes y distinguait la *dimension*, l'*unité*, et la *figure*. La *dimension* est «*le mode et la manière selon laquelle un sujet est considéré comme mesurable*», non seulement suivant les trois dimensions spatiales, mais également suivant d'autres grandeurs comme le poids, la vitesse, etc. La mesure, rapportée à la division en parties égales (qui peut être seulement une division intellectuelle), a pour opération inverse le comptage : «si nous considérons les parties par rapport au tout, on dit alors que nous comptons ; si au contraire nous avons égard au tout en tant qu'il est divisé en parties, nous le mesurons»[39]. Et c'est la tâche du physicien (à la différence du mathématicien) d'examiner si la «dimension» comprise dans ce sens, c'est-à-dire la *grandeur*, possède un fondement dans la réalité.

L'*unité* est la nature commune des choses que l'on compare. Quant aux *figures*, elles sont de deux types : les pluralités et les grandeurs. Les *pluralités* sont, par exemple, des.points ou d'autres éléments ordonnés dans l'espace, tandis que les *grandeurs* sont continues et indivisibles (comme la surface d'un triangle,

[37] Descartes [1637, 1644]. Cf. Paty [1997].
[38] Voir Koyré [1965].
[39] Descartes [1628], Règle 14.

ou d'un carré, etc.). Tous les rapports qui peuvent exister entre des êtres ou figures de même genre «doivent se rapporter à deux points essentiels, qui sont l'*ordre ou la mesure*».

Descartes proposait à cet endroit la considération suivante sur la possibilité de simplifier des problèmes comportant des grandeurs continues : ces dernières «peuvent, grâce à une unité d'emprunt, être parfois ramenées complètement à une pluralité, et toujours au moins en partie. La pluralité des unités peut ensuite être disposée dans un tel ordre que *la difficulté, qui se rapportait à la connaissance de la mesure, dépende finalement de l'ordre seul*[40].

CONSONANCES ET PREFIGURATIONS

Il est tentant voir dans ces réflexions une consonance avec l'analyse faite deux siècles plus tard par Bernhard Riemann du concept mathématique de *multiplicité*, ou *variété*, dont les trois dimensions spatiales sont un cas particulier, ou peut-être même une préfiguration de l'idée de *topologie* (l'«*analysis situs*», indiquée par Leibniz et Euler, et que Riemann fut le premier à développer). Et l'on peut concevoir de mettre en correspondance les couples ordre/mesure, multiplicité/grandeur et, dans des termes ultérieurs, topologie/métrique.

Il est également possible de voir, dans la dernière citation de Descartes, une remarque pénétrante et anticipatrice sur une difficulté de principe rencontrée dans l'analyse de grandeurs continues, qui deviendrait explicite avec leur traitement par des équations différentielles, comme l'impossibilité de résoudre ces équations malgré leur aptitude à décrire exactement une situation physique : il faudrait alors abandonner les calculs exacts (de type métrique) et s'attacher aux aspects «qualitatifs», «structurels», ou topologiques, comme Henri Poincaré devait le faire bien plus tard.

Concluons cette évocation des conceptions fondatrices de Descartes sur les grandeurs en proposant de comprendre l'aspect quantitatif de ces dernières, qui les fait «mesurables», dans un sens qui ne soit pas limité à une détermination seulement numérique, comme on l'y a souvent réduit. L'important, pour Descartes, c'était la relation dans laquelle la grandeur est exprimée, c'est-à-dire sa forme (comme, par exemple, une relation algébrique). La «mesure» désignait, à ses yeux, l'*aspect relationnel* des grandeurs ou quantités.

Nous pouvons faire notre profit, aujourd'hui, de cette leçon : le contenu conceptuel d'une grandeur, même mathématisée, ne s'évanouit pas quand elle se voit attribuée une valeur par un nombre, mais reste donné dans la relation que la détermine. Les grandeurs physiques conçues selon une forme mathématique, et visant à décrire ou à représenter des objets et des phénomènes du monde physique, auront exactement les relations de leurs formes mathématiques[41]. Autrement dit, le système des concepts physiques est tissé par la mathématisation des grandeurs par lesquelles ces concepts sont exprimés.

Cette justification de l'utilisation des mathématiques en physique est

[40] Descartes [1628], Règle 14 (souligné par moi, M.P.).

[41] Voir, p. ex., l'analyse de la signification physique des formules de transformation de Lorentz telles qu'Einstein les démontra dans son travail de 1905 sur la relativité restreinte, et de ses conséquences sur les nouveaux concepts d'espace et de temps : Paty [1993], chapitre 4.

auto-consistante ; elle ne renvoie qu'à la seule exigence philosophique d'intelligibilité par «l'ordre et la mesure», et à nulle autre. La postérité la ramènerait généralement, mais sans nécessité selon moi, à l'identification «essentielle» que Descartes effectua par la suite, en particulier dans ses *Principes de philosophie*, de la matière avec l'étendue spatiale et de la physique avec la géométrie[42]. Newton, qui rejetait une telle identification, crut pouvoir fonder sa mathématisation de la physique (qu'il concevait aussi selon la géométrie) sur sa conception néo-platonicienne d'un monde rapporté à des grandeurs «absolues, vraies et mathématiques», par opposition à des grandeurs «relatives, apparentes et communes», ces dernières étant «non pas les grandeurs elles-mêmes, dont elles portent le nom, mais ces mesures sensibles (qu'elles soient exactes ou non), qu'on emploie communément au lieu des grandeurs mesurées elles-mêmes»[43].

Et cependant la justification de la mathématisation donnée plus tard par la «tradition continentale» de la mécanique newtonienne, qui déterminerait les voies de la physique mathématique et de la physique théorique des XVIIè et XVIIIè siècles (c'est-à-dire de la physique classique), serait beaucoup plus proche de la conception cartésienne de l'intelligibilité et des grandeurs (modifiée, il est vrai, pour tenir compte de l'effet, sur l'acquisition des connaissances, des données sensorielles, dans un sens d'abord lockéen), que de la conception newtonienne[44].. Cette «tradition», qui s'établit après Christiaan Huygens et Gottfried Wilhelm Leibniz avec les disciples cartésiens de ce dernier et les cercles malebranchistes (Jean et Jacques Bernoulli, Michel de l'Hospital, Pierre Varignon, etc.)[45], adopta et développa le calcul différentiel et intégral leibnizien, et formula dans ses termes (ceux de la «nouvelle analyse») les problèmes physiques ouverts dans la ligne des *Principia* de Newton. Cette greffe (ou synthèse?) de la physique newtonienne par le formalisme leibnizien, effectuée sur un terrain philosophique cartésien, s'épanouirait avec les travaux remarquables de Leonhard Euler, Alexis Clairaut et Jean d'Alembert, suivis par ceux de Joseph Louis Lagrange, Pierre Simon Laplace et tant d'autres[46]. Telle est, en vérité, la raison pour laquelle la conception cartésienne de l'intelligibilité et la justification corrélative de la mathématisation des grandeurs physiques a sous-tendu, depuis lors jusqu'à nos jours, de manière au moins implicite, les dévelopements de la physique théorique[47].

C'est, en effet, l'idée centrale de cette conception que l'on retrouve par la suite, développée selon de nouvelles spécifications philosophiques ou mathématiques, chez des auteurs tels que d'Alembert, Emmanuel Kant, André Marie Ampère, Bernhard Riemann, Henri Poincaré, Hermann Weyl, Albert Einstein…..

---

42 Descartes [1644].

43 Newton [1687], Scholie des définitions, éd. Cajori', p. 6, 11.

44 Paty [1977, 1994a, 2001], Emery & Monzani [1983].

45 Voir, par exemple, l'édition des travaux de Jean Bernoulli, Bernoulli [1989-1991] ; et, pour un aperçu plus général, Blay [1992]. Sur le calcul leibnizien, cf. Leibniz [1849-1863, 1989]. Sur la dynamique leibnizienne, voir Fichant [199?].

46 Voir, en particulier, sur Clairaut : Greenberg [1996], Passeron [1994] ; sur d'Alembert : Paty [1977], Emery & Monzani [1989], Grimberg [1998] ; sur Lagrange : Martin-Viot [1994] ; sur Laplace : Merleau-Ponty [1986].

47 Sur les conceptions contemporaines, voir Paty [1986, 1988, 1993].

LA METAPHYSIQUE KANTIENNE DES GRANDEURS

L'entreprise la plus significative du point de vue philosophique proprement dit, après celle de Descartes, pour fonder l'intelligibilité par l'entendement du monde sensible dont traite la physique, reste celle d'Emmanuel Kant dans la *Critique de la raison pure*. Après l'«Esthétique transcendantale», («science de tous les principes de la sensibilité *a priori*»), qui conditionne la connaissance formée par l'entendement et l'appréhension des phénomènes)[48], vient l'«Analytique transcendantale», qui est la «décomposition de toute notre connaissance a priori dans les éléments de la connaissance pure de l'entendement»[49]. Les principes synthétiques de l'entendement pur comprennent ceux des «Axiomes de l'intuition» et des «Anticipations de la perception», qui concernent essentiellement l'idée de grandeur et «la possibilité d'appliquer les mathématiques aux phénomènes». A ces principes s'ajoutent ceux des «Analogies de l'expérience» et des «Postulats de la pensée empirique en général». Le principe des «Axiomes de l'intuition» définit les *grandeurs*, *extensives* et *intensives*, en énonçant que «toutes les intuitions sont des grandeurs intensives». Celui des «Anticipations de la perception», fondé sur l'idée que «dans tous les phénomènes, le réel, qui est un objet de la sensation, a une grandeur qui est un degré», permet de constituer dans le sujet transcendantal la condition d'appréhension des grandeurs continues, tant extensives qu'intensives. La variation des degrés des grandeurs continues est directement inspirée de la pensée des grandeurs dérivées et différentielles de l'analyse leibnizienne et de la physique newtonienne[50].

Les *grandeurs extensives* sont telles que la représentation des parties rend possible la représentation du tout, c'est-à-dire formées sur la représentation des distances spatiales. Les *grandeurs intensives* sont relatives au degré de la sensation occasionnée. Kant imagine, pour les concevoir, un changement graduel de la conscience empirique en conscience pure par la diminution progressive et continue de la sensation, de façon que à ce que le réel disparaisse complètement et «qu'il ne reste qu'une conscience purement formelle (*a priori*) du *divers dans l'espace et dans le temps*».

L'application des mathématiques aux phénomènes de la nature est dès lors possible. Les deux *principes*, des *axiomes de l'intuition* et des *anticipations de la perception*, en effet, dans les propres termes de Kant, «se rapportent aux phénomènes selon leur simple possibilité, et nous enseign[ent] comment ces phénomènes peuvent être produits, suivant les règles d'une synthèse mathématique, aussi bien selon leur intuition que selon le réel de leur perception. On peut donc employer, dans l'un comme dans l'autre, les grandeurs numériques et, avec elles, la détermination du phénomène comme grandeur»[51].

---

[48] Kant [1781, 1787], trad. fr., p. 781-811.
[49] Kant [1781, 1787], trad. fr., p.
[50] *Ibid.*, p. 902-914.
[51] *Ibid.*, p. 916.

L'ANALYSE RIEMANIENNE DES MULTIPLICITES

Sous l'angle plus précisément conceptuel cette fois, on doit faire une mention spéciale de l'étude systématique faite par Riemann, dans sa *Dissertation inaugurale* de 1854 «Sur les hypothèses qui servent de fondements à la géométrie»[52], des propriétés qu'il est possible de formuler mathématiquement pour une *variété* - ou grandeur - continue quelconque à un nombre *n* de dimensions, et de leur rapport éventuel aux grandeurs physiques. Ces propriétés sont soit topologiques, soit métriques, et Riemann proposa d'établir une connexion directe entre les relations métriques de l'espace à trois dimensions et les propriétés physiques des corps. Ce faisant, comme on le sait, il préparait sans le savoir le cadre mathématique de la théorie physique géométrisée - de la gravitation - que serait la théorie de la relativité générale.

Dans son étude, Riemann se pose d'abord le problème de construire, en partant du concept général de grandeur, le concept d'une grandeur de dimensions multiples. Ces grandeurs sont conçues selon la quantité, et la comparaison de leurs parties s'effectue «pour les grandeurs discrètes, au moyen du dénombrement ; pour les grandeurs continues, au moyen de la mesure. (…)» [53]. Ce qui n'est pas sans nous rappeler la phrase de Descartes, citée plus haut, sur «mesurer et compter»[54].

Parmi la diversité des cas possibles, Riemann envisageait notamment celui de l'absence de mesure, dont les recherches, écrivait-il, «forment une branche générale de la théorie des grandeurs, indépendante des déterminations métriques, et dans laquelle elles ne sont pas considérées comme existant indépendamment de la position, ni comme exprimables au moyen d'une unité, mais comme des régions dans une variété».

En caractérisant la différence entre la topologie et la métrique, Riemann en tirait une conséquence, pour l'espace, qui serait d'une importance fondamentale : on doit distinguer, pour les espaces «incommensurablement grands», entre l'«illimité» (ce qui n'a pas de limites), qui appartient aux rapports d'étendue (topologiques) et l'«infini», qui appartient aux rapports métriques. La première propriété est générale et pour ainsi dire qualitative, alors que la seconde dépend de la métrique. (Et nous savons qu'une métrique postulée comme euclidienne avait conduit à les identifier).

A propos des grandeurs étendues, Riemann établit une distinction entre leurs propriétés selon une théorie générale (purement mathématique) comme celle qu'il envisageait, et leurs déterminations physiques. Dans la première, «l'on ne suppose rien de plus que ce qui est déjà renfermé dans le concept de ces grandeurs», alors que la seconde correspond aux propriétés de l'univers physique, qui ne sont pas données par la première. Autrement dit, la métrique de l'espace n'est pas donnée *a priori* et sera fournie par la physique, et le postulat d'Euclide est, en réalité, d'origine empirique, relatif aux étendues conformes à notre expérience, aux «concepts empiriques sur lesquels sont fondées les déterminations métriques de l'étendue», à savoir «le concept du corps solide et celui du rayon

[52] Riemann [1854]. Cf Paty [1993], chapitre 7.
[53] Riemann [1854].
[54] Descartes [1928], Règle 14.

lumineux»[55]. Or ceux-ci «cessent de subsister dans l'infiniment petit». «Il est donc très légitime», poursuit Riemann, «de supposer que les rapports métriques de l'espace dans l'infiniment petit ne sont pas conformes aux hypothèses de la géométrie, et c'est ce qu'il faudrait effectivement admettre, du moment où l'on obtiendrait par là une explication plus simple des phénomènes. La question de la validité des hypothèses de la géométrie dans l'infiniment petit est liée à la question du principe intime des rapports métriques dans l'espace»[56].

Les clarifications conceptuelles rendues possibles par la théorie générale des grandeurs de Riemann devaient avoir comme effet, selon son vœu, d'empêcher que la pensée reste entravée «par des vues trop étroites» et que «le progrès dans la connaissance de la dépendance mutuelle des choses ne trouve un obstacle dans les préjugés traditionnels». Ces effets se feraient sentir en mathématiques aussi bien qu'en physique. Outre la possibilité de géométries non euclidiennes et le caractère physique de la métrique de l'espace, une telle réflexion ouvrait pour l'étude de l'espace, tant mathématique que physique, une autre perspective que son approche métrique : celle de la topologie, qui pourrait, dans certaines conditions, être plus «explicative» que la première. C'était en même temps ouvrir la voie de l'étude «qualitative» des solutions des systèmes d'équations différentielles et des phénomènes physiques correspondants, où les *caractéristiques «structurelles»* des relations, et les *types de comportements* physiques associés, apparaissent plus significatives que les déterminations «exactes» (au sens de quantitatives, numériques), des grandeurs particulières. C'est ce qui devait apparaître avec les travaux pionniers de Poincaré sur les problèmes de trois corps et les propriétés des systèmes dynamiques, dont les développements ultérieurs ont abouti à constituer une partie importante de la physique d'aujourd'hui.

Indiquons, d'autre part, que des recherches contemporaines sur des problèmes comme celui de la gravitation quantique laissent de plus en plus concevable que les propriétés topologiques de grandeurs de dimensions quelconques se révèlent également comme un outil conceptuel indispensable de la physique à venir (gravitation quantique, etc.).

4

TYPES DE GRANDEURS EN PHYSIQUE ET LE «QUALITATIF» DU QUANTITATIF (L'ORDRE DANS LA RELATION)

GRANDEURS PHYSIQUES, ABSTRACTIONS CONCEPTUELLES ET DEVELOPPEMENT DES MATHEMATIQUES

La mathématisation des grandeurs physiques a pris pour l'essentiel la forme du calcul différentiel et intégral qui, à son origine, avait permis de dépasser

[55] Riemann [1854].
[56] Riemann [1854].

l'antinomie entre des grandeurs continues mais considérées en un point et pour un instant singuliers. Les équations aux dérivées partielles, développées mathématiquement en conjonction avec leur utilisation dans l'élaboration de la mécanique des fluides (par les travaux pionniers de d'Alembert, suivis par ceux d'Euler[57]), devinrent la «langue» de la physique des milieux continus et des champs (d'abord pensés avec le support d'un milieu matériel, éther, calorique, etc.). Ces formes mathématiques devinrent le moyen indispensable de la pensée physique, qui put ainsi étendre son domaine et ses objets.

Aux grandeurs classiques comme celles de coordonnées spatiales, de temps, de vitesse, de masse, de force, de moment d'inertie, de travail, d'énergie, etc., d'autres se sont ajoutées, comme le potentiel, la charge (électrique), le champ, défini dans l'espace et dans le temps et à propagation de proche en proche (remplaçant l'«action à distance» newtonienne instantanée, et qu'il fut difficile de concevoir indépendamment d'un éther) et, plus tard, d'autres, plus «abstraites», dont on ne fera pas le tour ici (voir, p. ex., les «nombres quantiques», le «spin»). Ces grandeurs font appel, dès leur définition même, à des formes mathématiques variées, outre les nombres, les fonctions et les formes différentielles évoquées. Suivant les besoins ou les commodités de leurs relations entre elles, ces grandeurs peuvent avoir la forme mathématique de nombres complexes, de vecteurs, de tenseurs, de matrices, de spineurs, de fonctions «de carré sommable» définies sur des espaces de Hilbert et des opérateurs linéaires agissant sur ces fonctions - socle de la mécanique quantique -, de distributions, etc.…

La pensée des grandeurs s'est enrichie de tout le développement des mathématiques, et la physique s'en est nourrie, incorporant à l'expression de ses concepts les nouveaux objets mathématiques et les théories et méthodes de calcul associées, dont elle suscita d'ailleurs parfois l'invention. La physique met en jeu, dans l'expression de ses lois, des grandeurs de genres divers, de forme de plus en plus abstraite et éloignée de celle, intuitive et génératrice, de la simple dimension spatiale.

Le concept d'*entropie*, introduit par Rudolf Clausius, aura été l'une des plus abstraites de ces entités qui paraissent à première vue plus mathématiques que physiques dans ce sens intuitif. Davantage qu'une grandeur interprétable directement sur une échelle de mesure, elle est relative suivant le temps (elle en manifeste la variation même pour un système donné) et exprime un *ordre* plutôt qu'une mesure au sens d'une distance ou d'une graduation. Non sans de bons arguments, Pierre Duhem voyait dans le second principe de la thermodynamique (l'augmentation de l'entropie pour les systèmes fermés) une rupture avec les conceptions mécaniques, puisqu'il ne pouvait être formulé que de cette manière abstraite et non intuitive, voire quasiment axiomatique[58]. Il était, en fait, possible de donner, aux nouvelles grandeurs de ce genre, quelque temps après leur introduction, un contenu «intuitif» dans le sens usuel du terme, non pas tant de la possibilité d'en fournir un modèle mécanique que d'une fonction théorique directe dans la pensée des phénomènes (on peut aussi, par exemple, évoquer le concept, antérieur à l'entropie, de *potentiel* en électrodynamique[59]).

Ces grandeurs ont pu, après quelque temps, être transcrites en termes

[57] D'Alembert [1749-1752], Euler [1755].
[58] Voir Duhem [1906] et ses différents travaux sur la thermodynamique et l'énergétique.
[59] Et les réflexions de Paul Langevin sur le sujet (Langevin [1933]).

de grandeurs «directement» observables, comme, pour l'entropie, celles de la mécanique statistique avec la formule (ou principe) de Boltzmann[60]. Mais toutes les grandeurs utilisées en physique théorique ne sont pas susceptibles d'être réduites à des grandeurs directement mesurables : celles, rencontrées dans des chapitres relativement récents de la physique, qui ne sont pas simplement à valeurs numériques, constituent à cet égard un défi. Ne sont-elles que des grandeurs seulement mathématiques incorporées dans une théorie physique, et non pas des grandeurs physiques ? Nous y reviendrons au moment de conclure. On peut cependant énoncer ceci, qui vaut, puisqu'il s'agit de la physique, pour les grandeurs relevant de tous ces cas : la légitimité et la signification physique des grandeurs, «abstraites» par la forme mais qui deviennent «concrètes» et «intuitives» pour les représentations que l'on s'en fait, proviennent, d'une part des exigences de l'entendement et, d'autre part, de la confrontation répétée à l'expérience, par la reproductibilité des phénomènes et la prédictivité.

GRANDEURS OU QUANTITES ? OU L'ON REDECOUVRE LA RELATION ET LA «QUALITE», OU L'ORDRE SOUS LA RELATION

La physique, même classique, s'est trouvée confrontée à des problèmes dans lesquels des grandeurs définies physiquement, et mises en relation par des lois exactes, d'ailleurs déterministes, ne peuvent cependant fournir une description précise du système ou des phénomènes considérés. De tels cas reflètent, en fait, des propriétés mathématiques similaires des équations. Il est fréquent que l'on ne sache pas intégrer des équations différentielles représentant pourtant «exactement» le mouvement d'un système physique, ou qu'on ne puisse le faire que par approximations (déjà, par exemple, dans le problème de trois corps en interaction). Ou encore, tels processus physiques sont représentés à l'aide de séries divergentes (d'Alembert le remarquait déjà, au XVIIIè siècle, pour des processus mécaniques).

On peut se demander, à propos de cas de ce genre, ce que cela signifie relativement à la représentation mathématique (ou, plutôt, *mathématisée*) de ces mouvements ou processus, par ailleurs parfaitement justifiée par les relations entre les grandeurs concernées. Pour les uns, c'est bien la forme exacte de l'équation qui représente le phénomène, même si nous ne savons pas la résoudre exactement. Pour les autres, on devra plutôt se préoccuper du résultat approché, des valeurs numériques correspondant aux possibilités de la mesure, et délaisser l'idée d'une *représentation théorique*, déclarée inopérante, pour des *modèles* à solutions pratiques.

Nous rencontrons ici, me semble-t-il, une limitation du «quantitatif» entendu dans le sens courant, c'est-à-dire dans celui d'une détermination numérique, et il faut alors faire intervenir une certaine manière de «qualitatif». Autrement dit, le «qualitatif» vient au secours du «quantitatif». Mais ce «qualitatif» est à entendre dans un sens qui suppose le quantitatif et ne fait pas retour à l'ontologique ou au substantiel. Il n'est autre, en fait, que l'idée de

---

[60] $S = kLogW$, S étant l'entropie, W la probabilité, de l'état du système, k la constante de Boltzmann.

relation, prolongée dans celle de *structure*, donnée dans la forme des grandeurs mathématisées elles-mêmes. Cette idée était au coeur de la conception cartésienne, si nous nous en souvenons bien.

L'élaboration de la physique s'est poursuivie, depuis ses débuts avec la mécanique, en traitant de *grandeurs* ou *quantités* conçues selon la «*mesure*» mais, comme nous l'avons noté en commençant, le mot «mesure» a entretemps changé insensiblement de sens jusqu'à être compris communément davantage comme *acte d'effectuer une mesure* que comme exprimant un rapport ou une *relation* mathématique (comme dans le sens de Descartes). L'importance croissante de l'*expérience* ainsi que le souci de la *précision* des données expérimentales rendu efficace par la théorie des erreurs, sans oublier une attitude positiviste générale cristallisée avec la science du XIXè siècle, ont conduit le concept de mesure à se rapporter davantage à l'*observation* qu'à l'*intelligibilité*. Les grandeurs mesurables ou mesurées en vinrent à signifier uniquement, de manière sans doute restrictive, des grandeurs *à valeurs numériques*, comme c'était généralement le cas en physique classique.

On peut toutefois se demander si l'on ne pourrait aussi bien définir des *grandeurs physiques d'un autre genre* que celles purement «à valeurs numériques», ce qui supposerait une signification élargie de la «mesure» et un spectre plus ouvert de possibilités pour les formes (mathématiques) des relations qui constituent une grandeur physique. On pourrait aussi penser à d'autres modes de «relation» que la «mesure» entendue dans le sens de la «métrique», en nous souvenant de ce que Descartes renvoyait à l'«*ordre*» et Riemann à la «*topologie*». De telles questions, loin d'être illégitimes, pourraient être fructueuses, à considérer certains aspects de la physique contemporaine, que ce soit en *théorie des systèmes dynamiques* ou en *physique quantique*. Ne pourrions-nous imaginer de telles «grandeurs d'un autre genre» comme ayant, par exemple, une expression mathématique définie mais n'étant pas elles-mêmes directement mises en correspondance avec des valeurs numériques, ce qui serait laissé à leurs éléments seuls ?

Il se pourrait bien que de telles représentations mathématiques «inhabituelles» de grandeurs s'avèrent de plus en plus appropriées à des situations rencontrées dans la physique actuelle, et même qu'elles en simplifient notre compréhension. Considérons, par exemple, une grandeur «physique», quelle qu'elle soit ; par exemple, l'état d'un «système», qui aurait la forme mathématique d'une superposition linéaire de grandeurs élémentaires ou référentielles dans le sens précédent de grandeurs «à valeurs numériques» ; ou une autre, conçue pour déterminer la première, qui serait un opérateur matriciel, dont seuls les éléments seraient à valeurs numériques. Ou encore un type de grandeur qui décrirait, non pas les trajectoires dans l'espace et dans le temps de parties d'un ensemble de systèmes dynamiques, mais certaines caractéristiques de ses états d'équilibre et de ses types de comportement.

Qu'un système physique ait des propriétés qui ne se laissent pas réduire à des propriétés au sens de *grandeurs directement mesurables*, définies ou déterminées de manière univoque (par ex., une propriété telle qu'une position dans l'espace), n'est, en vérité, pas plus gênant que de considérer une propriété topologique qui ne soit pas associée à une grandeur métrique.

Des entités comme celles que nous venons d'évoqur sont généralement considérées comme non physiques. Lorsque les physiciens ont malgré tout affaire à des «expressions formelles» de ce genre, ils ne leur accordent une signification physique que de manière indirecte : en élaborant des règles de transcription et d'interprétation qui relient ces grandeurs «complexes» à des grandeurs à valeurs directement numériques. Telle, par exemple, en physique quantique, la règle de «réduction» pour le processus de mesure, associée à la philosophie de l'observation connue sous le nom de «complémentarité» de Bohr.

D'autres chapitres de la physique actuelle impliquent des types de «grandeurs» qui échappent aux normes habituelles des grandeurs physiques tout en s'avérant extrêmement puissantes, et conférant autant d'intelligibilité que dans les cas classiques habituels. Mais ces grandeurs sont généralement considérées comme étant purement «formelles» ou «mathématiques», sans contreparties physiques directes. Au contraire, des grandeurs au sens habituel, classique et traditionnel, comme les coordonnées des points d'une trajectoire, peuvent n'avoir aucun contenu physique défini. Qu'est-ce, alors, qui est *physique*, dans de tels cas ? et *significativement physique*, considérant la compréhension théorique du phénomène ? Ne serait-il pas plus approprié de considérer comme *physique* ce qui est *théoriquement significatif* (et corroboré par les phénomènes, les expériences, etc.), même si cela fut introduit à l'origine d'une manière purement formelle ?

On peut trouver de nombreux exemples de telles transformations de contenu et de signification par extension de sens dans l'histoire de physique, comme dans celle des mathématiques (que l'on pense, pour cette dernière, aux extensions de la notion de *nombre*, des entiers aux fractionnaires, aux réels, aux complexes…). Et l'on peut aussi considérer, de ce point de vue, certains problèmes spécifiques posés par plusieurs branches de la physique actuelle. En *physique quantique*, les *états* de systèmes sont décrit comme superpositions linéaires cohérentes (à travers une relation de phase) d'«états propres», fonctions ou vecteurs (définis dans des espaces de Hilbert) ; et les *grandeurs* qui les caractérisent (appelées «grandeurs observables») sont exprimées par des opérateurs linéaires agissant sur ces états. Tels sont les outils théoriques avec lesquels on traite les processus de la physique quantique, tandis que, par ailleurs, les données des quantités mesurées n'ont d'autre utilité que de déterminer les valeurs des composantes de ces «fonctions» ou «formes».

Dans l'étude des *systèmes dynamiques*, bien que la théorie soit totalement déterministe au sens classique, elle ne peut pas fournir de prévision exacte pour les trajectoires, en raison de l'amplification de petites variations, même infimes, de l'état initial donné. On est tenté de se demander, pour de tels cas, si la connaissance des coordonnées et des vitesses en fonction du temps est effectivement significative, en considération de ce que la théorie peut fournir comme prédiction sur les propriétés de ces sytèmes, concernant, par exemple, leur type d'instabilité. La *cosmologie quantique* pourrait être aussi un lieu d'interrogations de cette nature, puisqu'elle demande de concilier deux exigences inconciliables selon les approches connues, à savoir le champ continu défini sur l'espace-temps à quatre dimensions habituel, et des caractères quantiques qui ignorent les spécifications spatiales : est-il possible d'imaginer en toute légitimité (c'est-à-dire scientifiquement) des grandeurs dont la structure serait accordée à cette propriété ? Quelle genre de grandeurs physiques seraient-ce ? Et quelle serait leur légitimation physique ?

Si l'on considère que les grandeurs physiques exprimées mathématiquement sont légitimées par l'intelligibilité qu'elles procurent, en accord avec la réalité physique telle qu'elle est donnée par l'expérience des phénomènes, on est en droit de concevoir la possibilité d'étendre la signification du concept de «grandeur physique», de façon à inclure simplement les «états physiques quantiques» pour le *domaine quantique*, les «attracteurs», les degrés de stabilité, ou d'autres propriétés structurelles pour la *physique des systèmes dynamiques*, et des dimensions supérieures ou des propriétés topologiques pour la *gravité quantique*.

LA SIGNIFICATION PHILOSOPHIQUE D'UNE EXTENSION DE SENS DES «GRANDEURS PHYSIQUES»

L'extension de sens proposée, si elle se voit confirmée par une consistance générale[61], pourrait simplifier considérablement notre compréhension des domaines de connaissance correspondants. La simplification serait même radicale en ce qui concerne les problèmes d'interprétation. Elle rétablirait, comme conséquence immédiate, la signification et l'usage de la notion d'*objets* d'une théorie conçue comme description et représentation. Il serait alors à nouveau possible de parler de la physique en termes de réalisme sans encourir le soupçon de revenir aux «vieilles manières de penser». L'on aurait pu toutefois, à mon sens, en avoir déjà eu l'idée, pour peu que l'on ait admis que toute description symbolique et mentale du monde réel (extérieur) ne peut jamais qu'en être une représentation indirecte. Le genre de réalisme que nous considérons ici est, certes, un *réalisme critique*, celui de *constructions symboliques* pour *représenter la «réalité»*, et conçu comme un programme pour l'élaboration scientifique[62].

Prenons les concepts d'*état* et de *grandeur quantiques*. Etant donné que la théorie *quantique* permet d'expliquer tant de groupes de phénomènes et d'en donner des modèles puissants, il est tentant de la concevoir comme une théorie fondamentale d'un *monde d'objets*. Et telle est bien, de fait, la manière spontanée dont les physiciens la pratiquent, bien qu'ils se heurtent à des difficultés quand (mais seulement alors) ils en viennent à s'interroger sur la *transition* de ce *domaine quantique* au *domaine classique* des appareils de mesure. L'interprétation «courante» (de Copenhague) professe qu'il n'existe pas, scientifiquement, de *signifié conceptuel* désigné dans la théorie, pouvant être considéré comme un *objet* (c'est-à-dire une entité ayant des *propriétés*) et que ce signifié conceptuel (ce qu'on appelle «objet» de la théorie, soit l'état du système) n'existe qu'en relation à des conditions données (et optionnelles) de préparation pour la mesure.

Mais, en réalité, les scientifiques qui travaillent avec des objets physiques quantiques récusent par leur pratique (même s'ils ne l'osent pas de façon explicite concernant des questions de «philosophie») cette interprétation courante, en élaborant une *nouvelle objectivité* conçue sur le mode de l'ancienne, mais faisant appel à des concepts et à des grandeurs dotées d'un *sens plus large*

[61] Pour une discussion plus détaillée, dans cette perspective, du concept d'«état physique quantique», voir Paty [1999b ; à paraître, b].

[62] Paty [1988], en particulier les chapitres 1 et 10 ; [1993], chapitre 9.

que les grandeurs classiques. La modification épistémologique essentielle aura consisté, en vérité, en une *extension de sens* (restée implicite) du concept de *grandeur* ou de *quantité physiques*, à des entités qui ne sont pas simplement à valeur numérique.

La notion d'*état (physique) quantique* diffère de la notion ordinaire d'*état physique*, qui est rapportée généralement à des grandeurs directement observables par des instruments gouvernés par les lois de la physique classique. Il est vrai qu'un *état quantique* n'est accessible à l'expérience qu'indirectement, mais ceci n'affecte pas la possibilité d'*en avoir connaissance*. Les *grandeurs* qui le caractérisent ne sont pas non plus directement accessibles, puisqu'elles ne sont pas simplement *à valeurs numériques*. Il faut donc concevoir une *extension de sens* de la notion de *grandeur physique* et de celle d'*état physique* par rapport aux significations «classiques» de ces notions. Cette extension est légitimée par les *phénomènes*, dans une acception de ce terme qui ne les réduit pas à leur appréhension par la *perception*, mais qui les conçoit selon l'*entendement*, c'est-à-dire selon leur capacité à être portés à notre *connaissance*, et elle est réalisée par l'essentiel du formalisme même de la théorie quantique.

Cette extension a été, de fait, préparée par les travaux des physiciens théoriciens de la physique quantique sensibles aux propriétés formelles de la théorie, comme Max Born, Werner Heisenberg, Paul Adrian Dirac, John von Neumann et d'autres, où les grandeurs physiques classiques étaient remplacées par des «grandeurs quantiques» différentes d'elles en premier lieu par leur expression formelle. Par exemple, les *nombres-q*, non commutatifs, proposés par Dirac pour remplacer les *nombres-c* ordinaires, suggèreraient immédiatement une extension de sens comme celle que nous venons d'indiquer[63]. Mais ces pionniers n'avaient cependant pas cru devoir proposer d'emblée ces constructions *formelles* comme de simples extensions de sens des grandeurs *physiques* parce que les questions d'interprétation alors soulevées ne paraissaient pas les y autoriser. De telles grandeurs restaient seulement mathématiques, leur rapport aux phénomènes physiques étant réglé par l'«interprétation». La pierre d'achoppement était alors essentiellement le passage du classique au quantique, avec la question de la «mesure» au sens quantique[64].

Considérer comme grandeur physique au sens plein du terme des *vecteurs d'état quantiques* dans la forme de superpositions linéaires et des «opérateurs observables» avec des valeurs propres affectées de probabilités, cela implique de renoncer à la connexion étroite, voire à l'identification, de *propriétés* avec *ce qui est ou pourrait être mesuré*, et de concevoir différemment ce qu'est une *propriété*, en la rapportant au système ou à l'état *tel qu'il est construit intellectuellement* par un processus d'abstraction et d'élaboration théorique intégrant des données factuelles. Des propriétés conçues de la sorte *ne sont plus contextuelles* et peuvent être dites *intrinsèques* :telles sont, dans cette perspective, les propriétés des «particules» quantiques élémentaires (photon, quark, etc.…), et des champs quantiques.

Ces *propriétés* ne dépendent aucunement des circonstances de leur observation, mais elles sont *reconstituées* à partir d'observations expérimentales fournissant des valeurs de grandeurs correspondant à des propriétés contextuelles,

---

[63] Dirac [1926]. Cf. Mehra & Rechenberg [1982], vol. 4, p. 162 et suiv., Darrigol [1992].
[64] Paty [1999b ; à paraître].

affectées de probabilités mesurées par des fréquences d'événements. A cet égard, les probabilités, loin de constituer une limitation de la connaissance, *permettent la détermination* des grandeurs intrinsèques, qui sont celles dont la théorie se soucie principalement, à partir de la distribution spectrale de leurs composantes.

Il est possible, d'une manière générale, de rapporter les déterminations de propriétés à deux caractères distincts des relations entre grandeurs théoriques : celles qui correspondent respectivement à des *prévisions* (les propriétés *contextuelles*) et à des *prédictions* (les propriétés *intrinsèques*). Les prévisions, dans le cas des théories dont nous parlons, sont *contingentes*, simplement probables ou inassignables, et se limitent à caractériser des grandeurs à valeurs numériques ; tandis que les prédictions correspondent à des traits théoriques *structurels et intrinsèques*, portés par des grandeurs de forme plus complexe, qui intègrent, à l'aide de fonctions (ou amplitudes) de probabilité dans le cas de la physique quantique, des grandeurs du premier genre. Une telle distinction se retrouverait aussi dans un ordre de phénomènes très différent de la physique quantique, ceux mentionnés liés à la dynamique des systèmes non linéaires[65].

REFERENCES

D'ALEMBERT, Jean le Rond [1743]. *Traité de dynamique*, David, Paris, 1743. 2ème éd., modif. et augm., David, Paris, 1758.

d'ALEMBERT, Jean le Rond [1746-1747]. *Réflexions sur la cause générale des vents* (version originale : manuscrit en latin, grand prix de l'Académie de Berlin de 1746), David, Paris, 1747.

D'ALEMBERT, Jean Le Rond [1749-1752]. *Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides* (première version : manuscrit original en latin, adressé à l'Académie de Berlin, 1749), Paris, David, 1752 ; ré-éd. Culture et ciivilisation, Bruxelles, 1966.

D'ALEMBERT, Jean Le Rond [1751]. *Discours préliminaire de l'Encyclopédie*, in d'Alembert & Diderot (éds.) [1751-1780], vol. 1, 1751 ; ré-éd., Gonthier, 1965.

D'ALEMBERT, Jean le Rond [1758]. *Essai sur les éléments de philosophie ou sur les principes des connaissances humaines*, Paris, 1758. Rééd., suivi des *Êclaircissements* à cet Essai (de 1765), Fayard, Paris, 1987.

D'ALEMBERT, Jean & DIDEROT, Denis (éds.) [1751-1780]. *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, 17 vols + 11 vol. de planches, Briasson, David, Le Breton et Durant, Paris, 1751-1780.

ARISTOTE [Phys.]. *La Physique*, Trad. et notes par ?, Vrin, Paris, 19??.

BERNOULLI, Johann [1989-1991]. *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli, 2: Der Briefwechsel mit Pierre Varignon*, *Erste Teil (1692-1702)*; *Zweiter Teil (1702-)*, Bearbeit und Kommentiert von Pierre Costabel und Jeanne Peiffer, Birkhauser, Basel, 1988 (vol. 1), 1991 (vol.2).

BLAY, Michel [1992]. *La naissance de la mécanique analytique. La science du mouvement au tournant des XVIIè et XVIIIè siècles*, Presses Universitaires de

[65] Sur cette distinction, voir Paty [1997].

France, Paris, 1992.

CASSIRER, Ernst [1910]. *Substanzbegriff und Funktionsbegriff*, Bruno Cassirer, Berlin, 1910. Trad. angl., *Substance and function*, *in* Cassirer 1923 (éd.1953), p.1-346.

CASSIRER, Ernst [1923]. *Substance and function and Einstein's theory of relativity*. Trad. angl. par William Curtis Swabey and Mary Collins Swabey, Open Court, Chicago, 1923; Dover, New York, 1953.

CLAGETT, Marshall [1959]. *The science of Mechanics in the Middle Ages*, The University of Wisconsin Press, Madison, 1959.

CLAVELIN, Maurice [1968]. *La philosophie naturelle de Galilée*, A. Colin, Paris, 1968.

CROMBIE, A.C. [1952]. *Augustine to Galileo. The history of science. A.D. 400-1650*, Falcon Press, London, 1952 ; ré-éd. augm., Heinemann, London, 1957 ; trad. fr. par Jacques d'Hermies, *Histoire des sciences de Saint Augustin à Galilée (400-1650)*, Presses Universitaires de France, Paris, 2 vols., 1958.

DESCARTES, René [1728]. *Regulæ ad directionem ingenii* (vers 1728), in AT, vol. 10, p. 349-48 ; trad. en fr., *Règles pour la direction de l'esprit*, Paris, Vrin, 1970.

DESCARTES, René [1637]. *Discours de la méthode*, *suivis d'Essais de cette méthode* : *La Dioptrique*, *Les Météores*, *La Géométrie*, Leyde, 1637; in Descartes [1964-1974] (AT), vol. 6.

DESCARTES, René [1644]. *Principia philosophiæ*, 1ère éd. princeps, Louis Elzevier, Amsterdam, 1644 ; in Descartes [1964-1974] (AT), vol. 8, p. 1-353. Trad. en français (1647), *Principes de la philosophie*, in Descartes [1964-1974] (AT), vol. 9, p. 1-362.

DESCARTES, René [1964-1974]. *Oeuvres de Descartes*, publiées par Charles Adam et Paul Tannery, 11 volumes (1ère éd., 1896-1913) ; nouvelle édition révisée, 1964-1974; ré-éd., 1996. [Edition indiquée AT dans les notes].

DRAKE, Stillman [1970]. *Galileo Studies : Personality, tradition and revolution, University of Michigan Press*, Ann Harbour, 1970.

DUHEM, Pierre [1906]. *La théorie physique. Son objet, sa structure*, Paris, 1906 ; 2nd ed. rev. augm., 1914 ; reprinted., Vrin, Paris, 1981.

DUHEM, Pierre [1913-1959]. *Le système du monde. Histoire des doctrines cosmologiques de Platon à Copernic*, 10 vols., Hermann, Paris, 1913-1959.

EINSTEIN, Albert [1949]. Reply to criticism. Remarks concerning the essays brought together in this cooperative volume, *in* Schilpp [1949], p. 663-693. (Traduction anglaise par P. A. Schilpp, de l'original allemand : Bemerkungen zu den in diesen bande Vereinigten Arbeiten, publié dans l'édition en allemand de Schilpp [1949], p. 493-511.)

EMERY, Monique & MONZANI, Pierre (éds.) [1983]. *Jean d'Alembert, savant et philosophe: portrait à plusieurs voix. Actes du Colloque organisé par le Centre international de synthèse - Fondation Pour la science, Paris, 15-18 juin 1983*, Archives contemporaines, Paris, 1989.

EULER, Leonhard (1755). (Trois mémoires sur la mécanique des fluides), *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1755. Repris dans Euler (1911-).

EULER, Leonhard (1911-). *Opera omnia*, Basel, 3 séries de vols, depuis 1911.

FICHANT, Michel [1998]. *Science et métaphysique dans Descartes et dans Leibniz*, Presses Universitaires de France, Paris, 1998.

GALILEE, Galileo [1623]. *Il Saggiatore*, Roe, 1623 ; tr. fr., *L'Essayeur*, éd. C. Chauviré, Paris, Belles Lettres, 1979.

GALILEE (GALILEI), Galileo [1632]. *Dialogo sopra i due massime sistemi del mondo : tolemaico e copernicano*. Trad. fr. *Dialogues sur les deux grands systèmes du monde*, trad. par ?, Seuil, Paris, 1992.

GALILEE (GALILEI), Galileo [1638]. *Discorsi e dimostrazioni mathematiche in torno di due nuove scienze*, Leyde, 1638 ; ré-éd., avec introd; et notes, par A. Carugo et L. Geymonat, Boringhieri, 1958. Trad. fr. par Maurice Clavelin, *Dialogues sur deux sciences nouvelles*, trad. A. Colin, Paris, 1970.

GALILEE (GALILEI), Galileo [1890-1909]. *Le Opere*, éd. Naz, 20 vols. en 21 tomes, Firenze, 1890-1909.

GREENBERG, John L. [1995]. *The Problem of the Earth from Newton to Clairaut*, New York, 1995.

GRIMBERG, Gérard [1998]. *D'Alembert et les équations aux dérivées partielles en hydrodynamique*, Thèse de doctorat en Epistémologie et histoire des sciences, Université Paris 7-Denis Diderot, Paris, déc. 1998.

KANT, Immanuel [1787]. *Critik der reinen Vernunft*, Riga, J.F. Hartknoch, 1781 (2 è ed., 1787) ; trad. fr., *in* Kant, E., *Oeuvres philosophiques*, vol. 1, Paris, Gallimard, 1980, p. 705-1470

KANT, Immanuel [1796]. *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft*, 1796 ; trad. fr., *Premiers principes métaphysiques de la science de la nature*, *in* Kant, E., *Oeuvres philosophiques*, vol. 2, Paris, Gallimard, 1985, p. 347-493.

KOYRE, Alexandre [1935-1939]. *Etudes galiléennes*, Paris, 3 vols., 1935-1939 ; 2 è éd., 1 vol., 1966. (1935-1939), Hermann, Paris, 1966.

KOYRE, Alexandre [1965]. *Newtonian Studies*, Harvard University Press, Cambridge (Ma), 1965. *Etudes newtoniennes* (édition française), Gallimard, Paris, 1968.

LAGRANGE, Joseph Louis [1788]. *Mécanique analytique*, in Lagrange, *Oeuvres*, vol.11 et 12, 1888 et 1889.

LANGEVIN, Paul [1933]. *La notion de corpuscules et d'atomes*, Réunion internationale de Chimie-Physique (Paris, 1933), Hermann, Paris, 1934.

LAPLACE, Pierre Simon [1812]. *Théorie analytique des probabilités*, Paris, 1812 (ré-impression, Culture et Civilisation, Bruxelles, 1967); 2ème éd., 1814; 3ème éd., rev. et augm., 1820 ; repris dans Laplace [1878-1912], vol.7, p. 1-645.

LAPLACE, Pierre Simon [1812]. *Essai philosophique sur les probabilités*, parue comme introduction à la 2ème éd. de la *Théorie analytique…*, 1814 ; rééd. modifiées jusqu'en 1825 ; repris dans Laplace [1878-1912], vol. 7, p. i-cliii. Ré-impression, Culture et Civilisation, Bruxelles, 1967 ; nlle éd., augm. de mémoires, préface de René Thom, postface de Bernard Bru, Bourgois, Paris, 1986.

LAPLACE, Pierre Simon [1878-1912]. *Oeuvres complètes*, Gauthier-Villars, 14 vols, Paris, 1878-1912.

LARGEAULT, Jean [1984]. *Philosophie de la nature 1984*, Université Paris 12-Val-de-Marne, Créteil, 1984.

LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm [1849-1863]. *Mathematische Schriften. Oeuvres*, édité par C. J. Gerhardt, 1849-1863, Halle, 7 vols, 1849-1863. Ré-éd., G. Olms, Hildesheim, 1962.

LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm [1989]. *Naissance du calcul différentiel, 26 articles des Acta Eruditorum*. Introduction, traduction et notes par Marc Parmentier, Vrin, Paris, 1989.

MARTIN-VIOT, Florence [1994]. *L'élaboration des principes variationnels en dynamique, de Lagrange à Hamilton et Jacobi*, Thèse de doctorat en épistémologie et histoire des sciences, Université Paris 7-Denis Diderot, nov. 1994.

MERLEAU-PONTY, Jacques [1983]. *La science de l'Univers à l'âge du positivisme. Etude sur les origines de la cosmologie contemporaine*, Vrin, Paris, 1983.

NEWTON, Isaac [1687]. *Philosophiae Naturalis principia mathematica*, London, 1687 ; 2ème éd., 1713 ; 3ème éd., 1726, éditée avec des variantes par Alexandre Koyré et I.B. Cohen, Cambridge University Press, Cambridge, 1972. Trad. angl. par A. Motte, *The mathematical principles of natural philosophy*, 1729 ; 3è éd., 1726 ; trad. rév. par F. Cajori, Berkeley, Univ. California Press, 1934.

PASCAL, Blaise [1657]. De l'esprit géométrique, *in* Pascal [1993], p. 348-355.

PASCAL, Blaise [1670]. *Pensées*, in Pascal [1963], p. 493-649.

PASCAL, Blaise [1963]. *Oeuvres complètes*, Préface d'Henri Gouhier. Présentation et Notes de Louis Lafuma, Seuil, Paris, 1963.

PASSERON, Irène [1994]. *Clairaut et la figure de la Terre au dix-huitième siècle. Cristallisation d'un nouveau style autour d'une pratique physico-mathématique* Thèse de doctorat en Epistémologie et Histoire des sciences, Université Paris 7-Denis Diderot, déc. 1994.

PATY, Michel [1977]. *Théorie et pratique de la connaissance chez Jean d'Alembert*, Thèse de doctorat en philosophie, Université des Sciences Humaines, Strasbourg 2, 1977, dactyl., 468 p.

PATY, Michel [1984a]. Rapport des mathématiques et de la physique dans la pensée de d'Alembert, *Dix-huitième siècle*, n° 16, 1984 (numéro sur: *D'Alembert et les sciences de son temps*), p. 69-79.

PATY, Michel [1984b] Mathématisation et accord avec l'expérience, *Fundamenta scientiae* 5, 1984, 31-50.

PATY, Michel [1985]. Symétries et groupes de transformation dans les théories contemporaines de la matière : jalons épistémologiques, *Colloque Abel-Galois, Lille, 21-25 février 1983, Première partie*, Institut de Recherches de Mathématiques Avancées (IRMA), Lille, 1985, fasc 5, 54 p.

PATY, Michel [1988]. *La matière dérobée. L'appropriation critique de l'objet de la physique contemporaine* , Archives contemporaines, Paris, 1988.

PATY, Michel [1989]. Interprétation et construction dans le rapport des mathématiques à la physique, *Fundamenta scientiae* 10, 1989 (n° 1, Numéro spécial en hommage à Ludovico Geymonat), 35-55.

PATY, Michel [1990a]. *L'analyse critique des sciences, ou le tétraèdre épistémologique (sciences, philosophie, épistémologie, histoire des sciences)*, L'Harmattan, Paris, 1990.

PATY, Michel [1990b]. Reality and Probability in Mario Bunge's *Treatise*, *in* Dorn, Georg and Weingartner, Paul (eds.), *Studies on Mario Bunge's Treatise*, Poznan studies in the philosophy of the sciences and humanities, Rodopi, Amsterdam-Atlanta, 1990, p. 301-322.

PATY, Michel [1992]. L'endoréférence d'une science formalisée de la nature, *in* Dilworth, Craig (ed.), *Intelligibility in science*, Rodopi, Amsterdam, 1992, p. 73-110.

PATY, Michel [1993]. *Einstein philosophe. La physique comme pratique philosophique*, Presses Universitaires de France, Paris, 1993

PATY, Michel [1994a]. Le caractère historique de l'adéquation des mathématiques à la physique, *in* Garma, Santiago; Flament, Dominique; Navarro, Victor (eds.), *Contra los titanes de la rutina.- Contre les titans de la routine*, Comunidad de Madrid/C.S.I.C., Madrid, 1994, p. 401-428.

PATY, Michel [1994b]. Sur l'histoire du problème du temps : le temps physique et les phénomènes, *in* Klein, Etienne et Spiro, Michel (éds.), *Le temps et sa flèche*, Editions Frontières, Gif-sur-Yvette, 1994, p. 21-58; 2è éd., 1995; Collection Champs, Flammarion, Paris, 1996, p. 21-58.

PATY, Michel [1997a]. L'idée d'universalité de la science et sa critique philosophique et historique, *in* Arboleda, Luis Carlos y Osorio, Carlos (éds.), *Nacionalismo e internacionalismo en la historia de las ciencias y la tecnología en America latina, Memorias del IV Congresso Latino-Americano de Historia de las Ciencias y la Tecnología,* Universidad del Valle, Cali (Colombia), 1997, p. 57-89. Egalement, *Asclepio* (Madrid), 49 (2), 1997, 5-43. Egalement, *Cadernos de História e Filosofia da Ciência* (Campinas), Série 3, v. 8, n°1, jan.-jun. 1998, -.

PATY, Michel [1997b]. «Mathesis universalis» e inteligibilidad en Descartes, Trad. en español por Martha Cecilia Bustamente, *in* Albis, Victor R. ; Charum, Jorge ; Sanchez, Clara Helena ; Serrano, Gonzalo (eds.), *Memorias del Seminario en conmemoración de los 400 años del nacimiento de René Descartes*, Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Coleccion Memorias, n°9, 1997, p. 135-170. [Original fr. : «Mathesis universalis» et intelligibilité chez Descartes, *in* Karine Chemla, Siegmund Probst, Agnès Erdély et Antonio Moretto (eds.), *Ceci n'est pas un festschrift pour Imre Toth* (29.12.1996), à paraître.]

PATY, Michel [1997c]. Histoire rapide de la vitesse (le concept physique), in *La vitesse. Actes des 8ès Entretiens de la Villette*, Centre National de Documentation Pédagogique, Paris, 1997, p. 15-31.

PATY, Michel [1998a]. La philosophie et la physique, *in* Jean-François Mattéi (éd.), *Le Discours philosophique*, volume 4 de l'*Encyclopédie philosophique universelle*, Presses Universitaires de France, Paris, 1998, chap. 123, p. 2104-2122.

PATY, Michel [1998b]. Le vide matériel, ou : La matière crée l'espace, *in* Diner, Simon & Gunzig, Edgard (éds.), *Univers du tout et du rien*, Editions de l'Université de Bruxelles, Bruxelles, 1998, p. 22-44. R

PATY, Michel [1998c]. Les trois dimensions de l'espace et les quatre dimensions de l'espace-temps*in* Flament, Dominique (éd.), *Dimension, dimensions I*, Série Documents de travail, Fondation Maison des Sciences de l'Homme, Paris, 1998, p. 87-112.

PATY, Michel [1999b]. Interprétations et significations en physique quantique, *Revue Internationale de philosophie*, 1999.

PATY, Michel [1999c]. Les trois stades du principe de relativité, *Revue des questions scientifiques*, 170 (2), 1999, 101-148.

PATY, Michel [à paraître]. The concept of quantum state : new views on old phenomena, *in* Cohen, Robert S.; Howard, Don ; Renn, Jürgen ; Sarkar, Sahotra & Shimony, Abner (eds.), *John Stachel Festschrift*, Boston Studies in the Philosophy and History of science, Kluwer, Dordrecht, à paraître, in press. (Le concept d'état quantique : un nouveau regard sur d'anciens phénomènes.)

PATY, Michel [2001]. D'Alembert, la science newtonienne et l'héritage cartésien, *Corpus* (Paris), 2001, sous presse.

POINCARE, Henri [1897]. Les rapports de l'analyse et de la physique mathématique, *Revue générale des sciences pures et appliquées* 8, 1897, 857-861. Repris dans Poincaré [1991], p. 17-30.

POINCARE, Henri [1905]. *La valeur de la science*, Flammarion, Paris, 1905 ; 1970.

POINCARE, Henri [1991]. *L'analyse et la recherche*, choix de textes et introduction de Girolamo Ramunni, Hermann, Paris, 1991.

QUINE, Wllard V. [1969]. *Ontological Relativity and Other Essays*, Columbia University Press, New York, 1969 ; trad. fr. par Jean Largeault, *Relativité ede l'ontologie et autres essais*, Aubier-Montaigne, Paris, 1971.

RIEMANN, Bernhard [1854]. Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liege (1854), *in* Riemann, *Gesammelte mathematische Werke. Nachträge*, éd. par M. Noether et W. Wirtinger, Leipzig, 1902, p. 272-287 ; trad. fr., Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie, *in* Riemann, *Oeuvres mathématiques*, trad. fr., Paris, 1898 (1968), p. 280-299.

SCHILPP, Paul Arthur (ed.) [1949]. *Albert Einstein, philosopher-scientist*, The library of living philosophers, Open Court, La Salle (Ill.), 1949 ; ré-ed., 1970. Trad. en allemand, *Albert Einstein als Philosoph und Naturforscher*, Kohlhammer Verlag, Stuttgart, 1955.

THOM, René [1990]. *Apologie du Logos*, Hachette, Paris, 1990.

VUILLEMIN, Jules [1960]. *Physique et métaphysique chez Descartes*, Paris, 1960; ré-éd., 1987.

WARTOFSKY, Marx [1968]. *Conceptual Foundations of Scientific Thought*, MacMillan, London, 1968.

WHITESIDE, D.T. [1970]. The mathematical principles underlying Newton's *Principia mathematica*, *Journal for the History of Astronomy*, 1970, 116-138.