Les analogies mathématiques au sens de Poincaré et leur fonction en physique

Michel Paty

Les analogies mathématiques au sens de Poincaré et leur fonction en physique*

Michel PATY[b]

RESUME

L'idée d'analogie à laquelle Poincaré recourait fréquemment à propos des phénomènes et des lois de la physique n'était pas celle, superficielle, de l'apparence, des images ou des modèles. C'était, très précisément, "l'analogie mathématique", l'analogie dans la forme que donne l'analyse (mathématique), cette analyse qui permet à la physique d'appréhender "les analogies de l'expérience" dont parlait Kant, à partir desquelles nous pouvons établir les lois générales des phénomènes. Les conceptions de Poincaré sur la "physique mathématique" et sur la nature de la théorie physique sont étroitement liées au rôle fonctionnel de l'analogie, qui, à travers le travail sur la forme (mathématique), atteint la structure des phénomènes. En même temps, l'analyse et l'intuition apparaissent implicitement liées dans la pensée, en physique aussi bien qu'en mathématiques.

ABSTRACT. *Mathematical analogies in Poincaré's sense and their function in physics.*

The idea of analogy to which Poincaré frequently referred about physical phenomena and laws was not that, superficial, of apparences, of images or models. It was, in a precise fashion, "mathematical analogy", analogy in the form given by mathematical analysis, this very analysis that allows physics to grasp "the analogies of experience" considered by Kant, from which the general laws of phenomena can be established. Poincaré's conceptions on "mathematical physics" and on the nature of physical theory were tightly linked to the functional paper of analogy, that, through work on the mathematical form, gets at the structure of phenomena. In parallel (or in correlation), analysis and intuition as thought processes appear implicitly tied together, in physics as well as in mathematics.

PLAN

1. Introduction.- 2. Le premier stade de l'analogie en physique : les analogies mécaniques.- 3. Le deuxième stade les analogies mathématiques.- 4. Analogies de l'expérience.- 5. Analogie, harmonie et réalité.- Références, bibliographie

MOTS-CLES : Analogie, Analyse, Epistémologie, Intuition, Mathématiques, Modèles mécaniques, Philosophie des sciences, Physique, Kant, Kelvin, Maxwell, Poincaré.

KEY WORDS : Analogy, Analysis, Epistemology, Intuition, Mathematics, Mechanical models, Philosophy of sciences, Physics, Kant, Kelvin, Maxwell, Poincaré.

---

* Texte basé sur un exposé aux *Journées sur l'analogie*, Equipe REHSEIS, CNRS, Paris, 6-7 décembre 1994, complété ensuite.

[b] Equipe REHSEIS (UPR 318), CNRS, Paris et Université Paris 7-Denis Diderot.

1

INTRODUCTION

Nous nous proposons d'examiner le sens de l'*analogie* telle que Poincaré l'invoque à propos de la physique, tant en ce qui concerne le travail d'invention scientifique que relativement aux significations explicitées des connaissances acquises. Poincaré fait un emploi assez fréquent du mot dans ses écrits, avec des sens variés. Nous ne referons pas ici l'inventaire, donné par ailleurs, de ses usages du mot et de la chose, en mathématique, en physique et en science d'une manière générale, dans une étude préliminaire à celle-ci, sur «La nature du raisonnement analogique chez Poincaré»[1].

L'analogie, c'est-à-dire ce qui est *similitude porteuse de sens* entre des éléments, souvent *par-delà les dissemblances matérielles*, guide « le choix des faits » (même en mathématiques, où les « faits » correspondent à des éléments de propositions), qui est susceptible, s'il est fécond, de révéler des parentés insoupçonnées entre d'autres faits. Le rôle de l'analogie dans le fonctionnement de la raison consiste à rapprocher dans la distance, « retrouver les *similitudes cachées* sous les divergences apparentes »[2]. Pour Poincaré, « ce que le vrai physicien seul sait voir, c'est le lien qui unit plusieurs faits dont l'analogie est profonde mais cachée »[3]. La loi rassemble et exprime la «parenté» entre des faits significatifs, en généralisant des propriétés qui les caractérisent, au-delà des cas particuliers. La science peut ainsi être vue comme recherche des analogies qui introduisent de l'ordre dans la complexité du monde et en révélent l'«harmonie», entendons l'*intelligibilité*.

Ces caractères sont proches de ceux que Poincaré attachait à l'*intuition mathématique* dont il faisait lui-même l'expérience dans son travail de création[4]. Et cependant, Poincaré n'invoquait l'analogie pour *les faits* que lorsqu'il commentait la nature des procédures de pensée en physique ou en mathématiques (y compris la sienne[5]), et n'en faisait pas état dans les exposés où il présentait les résultats de ses propres travaux. C'est que, en réalité, l'analogie n'a pas de fonction directement théorique, puisque ce ne sont pas les analogies apparentes et triviales qui sont fructueuses, en physique comme en mathématiques. Celles qui portent les rapprochements féconds entre des propriétés sont plutôt constatées comme telles

[1] Paty [à paraître, c].

[2] Poincaré [1908d], in [1908a], éd. 1918, p. 14. (souligné par moi, M.P.)

[3] Poincaré [1908b], in [1908a], éd. 1918, p. 22 (souligné par moi, M.P.).

[4] Paty [1999b].

[5] *Ibid.*

après coup, dans le moment où intervient la réflexion sur le résultat obtenu et sur le travail effectué. Dans le travail créatif, où opère la faculté d'intuition, les propriétés à considérer se proposent à l'entendement sous leur forme propre, sur laquelle le raisonnement opère directement. L'analogie n'est que la leçon que l'on en tire, quand les rapprochements se sont fait jour, que les termes en ont été identifiés, et que leur fécondité s'est manifestée. Dans ce sens, l'analogie n'a qu'un rôle méta-théorique, qualifiant et généralisant une propriété des objets du raisonnement révélée par celui-ci, plutôt que désignant un aspect de ce dernier. En d'autres termes, l'analogie ne concerne pas tant la méthode, que la signification.

Cela vaut pour les mathématiques comme pour la physique, même la plus expérimentale. Lorsque Poincaré écrit, par exemple, que les rayons β, de découverte récente avec la radioactivité, « sont analogues aux rayons cathodiques »[6], il ne fait qu'exprimer la conclusion qui ressort d'expériences précises - liées à des considérations théoriques -, établissant l'identité des propriétés de ces deux types de particules issues de phénomènes très différents.

La conclusion, encore provisoire, que l'on peut tirer de ceci est que l'analogie n'est pas un *principe d'explication*, mais une constatation d'*identité* profonde *de structure* (dans les théories mathématiques ou dans les phénomènes physiques).

Il est cependant un type de procédure où l'analogie semble avoir, pour Poincaré, une fonction plus directe dans le raisonnement : par exemple, les « analogies physiques » sont utiles au raisonnement mathématique, en permettant de « pressentir » des vérités mathématiques qui échappent encore à la rigueur du raisonnement : telle l'utilisation par Félix Klein des propriétés des courants électriques pour résoudre certaine question relative aux surfaces de Riemann (il existe de multiples autres exemples, notamment chez Riemann lui-même)[7]. La rigueur au sens de l'analyste viendra plus tard : du moins le résultat est-il acquis, et nous n'en doutons pas, bien que sans en avoir encore la certitude mathématique.

Il s'effectue, dans un tel processus de pensée, une transposition fonctionnelle d'un domaine à un autre, en l'occurrence, de la physique vers les mathématiques. Le processus inverse existe aussi, et nous allons y revenir : ce sont, précisément, les « analogies mathématiques » entendues dans le sens strict : la forme d'une relation mathématique suggère les relations de grandeurs physiques et les phénomènes correspondants.

Telle qu'elle est décrite en ce qui concerne l'invention, l'analogie fonctionne dans le moment du raisonnement qui se rapporte à l'intuition elle-même et elle figure, pour Poincaré, au rang des propriétés qui constituent l'intuition. C'est, en somme, l'un des aspects de l'intuition, qui fonctionne en vérité d'elle-même chez le mathématicien, sans qu'on la voit apparaître comme un stade de son travail auquel il se serait explicitement arrêté. On dira, certes, que les

[6] C'est-à-dire aux électrons. Poincaré [1908a], Liv. 3, chap. 1 ("La mécanique et le radium"), éd. 1918, p. 219.

[7] Poincaré [1897a].

mathématiciens (et, à un degré peut-être moindre, les physiciens) présentent leurs résultats par leurs raisonnements, sans exposer leurs méthodes implicites. Mais c'est bien, précisément, que l'analogie telle que Poincaré l'invoque en rapport à l'invention reste souterraine, et n'est énoncée explicitement que dans la constatation du résultat ou dans une réflexion méthodologique ou épistémologique postérieure.

En vérité, l'idée d'analogie à laquelle Poincaré recourait fréquemment à propos des phénomènes et des lois de la physique n'était pas celle, superficielle, de l'apparence, des images ou des modèles. Cette dernière, comme nous allons le voir, avait au plus un rôle propédeutique, préparant à une autre forme de l'analogie, la seule réellement intéressante et justifiée en raison : « l'analogie mathématique », c'est-à-dire l'analogie dans la forme que donne l'*analyse* (mathématique). Cette dernière permet à la physique d'établir les lois générales des phénomènes, et il sera tentant d'en esquisser le rapprochement avec l'appréhension « les analogies de l'expérience » dont parlait Kant.

Nous verrons aaussi comment les conceptions de Poincaré sur la « physique mathématique » et sur la nature de la théorie physique sont étroitement liées au rôle fonctionnel de l'analogie, qui, à travers le travail sur la forme (mathématique), atteint la structure des phénomènes. L'analyse et l'intuition apparaissent implicitement liées dans ce processus de la pensée, en physique aussi bien qu'en mathématiques, sous le signe d'une «harmonie» qui est le signe de la réalité objective.

2

LE PREMIER STADE DE L'ANALOGIE EN PHYSIQUE : LES ANALOGIES MECANIQUES

L'analogie des faits entre eux est essentiellement, pour Poincaré, de nature structurelle : elle est similitude profonde, souvent cachée sous la dissemblance apparente. La question est cependant d'abord de savoir sur quoi porte cette similitude. Si la plupart des physiciens, contemporains de Poincaré ou non, considèrent l'appel à la notion d'analogie comme important pour la connaissance, de l'un à l'autre les nuances d'appréciation varient. Le philosophe Abel Rey, qui étudia en détail les conceptions des physiciens du XIX^{e} siècle, distinguait parmi eux trois écoles, suivant leur attitude par rapport à la *conception mécaniste*, c'est-à-dire à une représentation en termes concrets de mouvement de corps (en fait, d'atomes).

La première, qu'il appelait « conceptuelle » ou « énergétique », représentée notamment par Rankine, Ostwald, Mach, Duhem, était en opposition totale au mécanisme. La seconde, dont il donnait Poincaré pour chef de file, admettait l'utilité de « schèmes mécanistes » et le droit de s'en servir, au nom de l'intuition empirique, mais sans leur reconnaître de valeur ontologique concernant la réalité physique. La troisième était l'école mécaniste, dont William Thomson - Lord Kelvin - et dans une certaine mesure James Clerk Maxwell étaient des représentants éminents. De ces trois écoles, écrivait Rey, la première « n'admet *jamais* », le seconde « admet d'une façon *accessoire* », et la troisième « admet *toujours* et d'une façon *essentielle* des éléments figuratifs, empruntés à la représentation du mouvement »[8].

Bien qu'Abel Rey ne mentionne pas le rôle de l'analogie dans les raisonnements qui conduisent à la théorie pour chacun de ces courants de pensée respectivement, nous pouvons assez facilement l'attribuer grâce à sa classification même. Dans une première acception, favorite des « mécaniciens », l'analogie se rapporterait en effet directement à la constitution de modèles mécaniques, tels ceux chers à William Thomson qu'évoque parfois Poincaré. Pour Thomson, comprendre en physique signifiait : « peut-on faire un modèle mécanique correspondant »[9]. Mais cette acception n'était pas exclusive d'une autre analogie, plus profonde, à laquelle la première pouvait conduire, comme celle entre la propagation de la chaleur et les phénomènes électriques, suggérée dès 1842 par le même William Thomson[10]. Maxwell avait également utilisé l'analogie dans le sens de représentations figuratives à l'aide de modèles mécaniques dans ses premiers travaux sur l'électromagnétisme, mais s'en était abstenu dans son *Traité*. C'est qu'il en avait éprouvé lui-même les limites - et l'excès de complication de ses modèles, que Poincaré souligne dans ses exposés sur la théorie de Maxwell[11].

Maxwell voyait bien que l'analogie n'est pas explicative, qu'elle porte sur les relations à l'intérieur des phénomènes, et non pas sur les choses : il l'appelait aussi « métaphore scientifique », la concevant comme transfert de mouvements et de concepts d'un phénomène à un autre : ces métaphores doivent garder la forme des relations, comme des homéomorphismes. Il s'interrogeait sur la légitimité de l'usage que la physique mathématique peut en faire, et jusqu'à quel point elle pouvait s'appuyer sur des modèles (mécaniques), par exemple à propos de l'analogie entre les phénomènes électrostatiques et la conduction uniforme de la chaleur, qui correspondait au rapprochement de la structures des phénomènes[12]. Dans un texte manuscrit datant des environs de 1873, Maxwell évoquait les analogies entre la chaleur, l'électrostatique, l'électrocinétique et l'induction magnétique suggérées par une même équation de continuité[13]. La fonction (V) qui

---

8 Rey [1907], p. 42.

9 Thomson [1904], p. 132.

10 Thomson [1842].

11 Pour les premiers travaux de Maxwell, voir Maxwell [1995], vol. 1 ; Poincaré [1894a, 1894b].

12 Maxwell [1995], vol. 1.

13 $k\frac{dV}{dz}+\frac{d}{dz}(k\frac{dV}{dz})\delta z=0$. Le texte de Maxwell est une critique d'un travail d'étudiant : cf. Maxwell [1873b].

vérifie cette équation, faisait-il remarquer, peut représenter aussi bien une température, un potentiel électrique ou un potentiel magnétique, et cependant il y a une différence dans la signification physique de ces grandeurs : la température est un état physique des corps, tandis que des potentiels ne sont pas des états physiques, étant définis à une constante près. En quelque sorte, la signification physique limite la portée de l'analogie.

En physique théorique, comme on le sait, Poincaré se situait dans la lignée, entre autres, de Thomson et de Maxwell. Cependant, sa compréhension de la physique ne passait pas par les modèles *à la* Thomson. D'un autre coté, Thomson pratiquait également la physique mathématique (il avait notamment travaillé, longtemps avant Poincaré, sur le problème des trois corps), et son « style » physico-mathématique porte la marque des deux genres d'approches. Par exemple, dans une lettre à Poincaré où il interroge ce dernier sur la signification de certains de ses résultats, concernant le problème de la stabilité d'un système dynamique dans son étude du problème des trois corps récemment couronné par l'Académie suédoise[14], Thomson-Kelvin n'hésite pas à transporter imédiatement le problème à un système d'optique géométrique donnant lieu à des configurations analogues (« problème des lentilles périodiques », « *periodical lens problem* »)[15]. Comme en mécanique, le trajet du rayon lumineux est donné par une condition de stabilité. Thomson avait une conception mécaniste de l'optique, se donnant des modèles mécaniques pour le mouvement des rayons lumineux. L'exemple ne concerne cependant pas à strictement parler un modèle *mécaniste*, puisque la physique mathématique de W. R. Hamilton avait établi que l'on peut traiter par un formalisme semblable l'optique et la mécanique[16]. Il illustre, du moins, l'ambivalence de l'analogie chez Thomson, celle des modèles se superposant à celle du formalisme.

Dans sa réponse[17], Poincaré s'en tient à la considération de l'aspect mathématique du problème, en termes de l'« équation aux exposants caractéristiques », dont la nature des solutions (si le produit de deux racines est réel ou imaginaire, etc.) détermine l'équilibre ou l'instabilité. Si analogie il y a, elle est celle de la forme mathématique, dont il parle à d'autres occasions (voir plus bas).

Dans le premier volume d'*Electricité et optique*, Poincaré rappelle cet aspect remarquable de la théorie électromagnétique de Maxwell, de réaliser l'unification de l'éther optique et de l'éther électrique et magnétique. Maxwell avait lui-même fait observer, dans son *Traité d'électricité*, que cette identification avait été obtenue indépendamment dans chacune des deux branches différentes de la physique, l'optique et l'électromagnétisme, à partir des *propriétés* de leurs

---

[14] Poincaré [1890c].

[15] W. Thomson, lettre à H. Poincaré du 22 décembre 1892. (Lettre inédite, Archives Poincaré).

[16] Hamilton [1834].

[17] H. Poincaré, lettre à Lord Kelvin, 26 déc. 1892 (Archives Kelvin, Cambridge, U.K., communiquée aux Archives Poincaré).

milieux (éthers) respectifs pour rendre compte des phénomènes électromagnétiques d'une part, des phénomènes de la lumière d'autre part. Il voyait dans cette identification un sérieux indice de « l'existence physique d'un pareil milieu »[18]. Cette « *identité des propriétés essentielles* de l'éther [de] Fresnel (…) et du fluide que Maxwell suppose présider aux actions électromagnétiques », souligne Poincaré, « est une confirmation de l'existence d'un fluide servant de véhicule à l'énergie »[19]. Le mot analogie n'est ici employé ni par l'un ni par l'autre, l'*identité* étant plus forte. On peut cependant considérer qu'il s'agit d'une forme particulière (ou limite) de l'analogie au sens privilégié par Poincaré. Ce sens était également conçu par Maxwell. Pour ce dernier comme pour Poincaré, une exacte attribution de propriétés de ce genre, étayée par des relations (qui renvoient à des proportions) de concepts ou grandeurs, se traduit, à partir de la théorie physique, en propriétés de la nature.

Cependant, à la suite de Maxwell et comme bien d'autres physiciens, Poincaré admettait un sens plus faible de l'analogie en physique, en dehors de celui, banal, d'images voisines. Ce sens plus faible est celui de l'« analogie figurative »[20] par les modèles, et notamment par les modèles mécaniques. Mais, à la différence de l'analogie au sens fort (l'« analogie mathématique », qui peut aller jusqu'à l'identification), la « figurative » est indifférente (comme les hypothèses de même nom) à la réalité physique. Elle a cependant, pour Poincaré, une certaine fonction : la pensée peut s'appuyer sur de telles analogies mécaniques (ou figuratives) pour parvenir aux rapports d'analogie plus profonds, structurels, mathématiques, qui expriment des propriétés physiques réelles. Ce passage correspond, dans l'histoire de la physique, à celui d'une mécanique des forces centrales (la mécanique newtonienne) à une physique des principes, qui est analytique : la *physique mathématique* dans le sens où il l'entend, lagrangienne et hamiltonienne.

C'est précisément à propos du rôle des explications sur le mode « analogique » des lois de l'électrodynamique et de la constatation de leur « parfait parallélisme » avec les principes de la dynamique, que Poincaré montre, par ailleurs, ce passage où le rôle des principes devient prépondérant, au détriment de modèles particuliers. La physique mathématique transcende ces derniers tout en les rendant possibles, et même, pour lui, ils restent nécessaires dans le principe - mais, comme ils ne sont jamais uniques et que l'on peut même en envisager une infinité, leur intérêt particulier est devenu très relatif. Toutefois, leur maintien potentiel dans la fonction de l'analogie a cet effet que la physique de Poincaré reste encore tributaire de certains concepts attachés aux représentations mécaniques, comme

---

18 Maxwell [1873a]. Poincaré cite cet ouvrage d'après la traduction en français, t. 2, § 781 (1887). Souligné par moi (M.P.).

19 Poincaré [1890a], §175. Souligné par moi, M. P.

20 Le terme n'est pas de Poincaré, mais je le reprend des expressions « hypothèse », ou « représentation », « figurative », et « éléments figuratifs » employées par Abel Rey (*op. cit.*) à propos de l' école mécaniste et de l'école critique (voir plus haut).

celui d'éther[21].

L'induction électrique fournit un exemple frappant d'explication sur le mode "analogique" des phénomènes de l'électrodynamique par rapport à la mécanique : elle est une sorte d'équivalent de l'inertie. « *La self-induction est donc une sorte d'inertie* », expose Poincaré dans son ouvrage *La théorie de Maxwell et les oscillations électriques* : « il semble que, pour mettre l'électricité en mouvement, on ait à surmonter une résistance contre-électromotrice ; mais qu'une fois commencé, il tende à se continuer de lui-même ». L'induction électrodynamique dans l'attraction entre les courants selon la théorie de Maxwell « n'est autre chose que l'inertie de l'éther », résistance qui s'oppose à l'augmentation de l'intensité des courants. Poincaré analyse de cette manière d'autres concepts de la théorie électromagnétique en analogie avec ceux de la mécanique : ils ont leur équivalent dans les différents principes de cette dernière[22].

Poincaré concevait les « explications mécaniques détaillées », rendues possibles par la théorisation des phénomènes électromagnétiques grâce à la « physique mathématique », sur le mode des flux de forces de Faraday, ou des constructions qui interviennent dans les premiers travaux de Maxwell en électrodynamique : elles eurent un rôle de support d'une induction (pour la pensée), intermédiaire entre l'expérience des phénomènes et l'élaboration théorique. Elles constituaient à ses yeux proprement une « description mécanique », en termes d'éther : « Ainsi, les phénomènes électrostatiques seraient dus à l'élasticité de l'éther, et les phénomènes électrodynamiques à sa force vive »[23]. Mais il ne raisonnait pas en termes de réduction à des mécanismes : il serait oiseux, écrit-il, « de chercher à se représenter dans tous ses détails le mécanisme des phénomènes électriques », mais il est par contre « très important (...) de montrer que ces phénomènes obéissent aux lois générales de la mécanique » (entendons : la mécanique analytique). Cette représentation reste en fait tributaire de concepts relevant de la mécanique, dans la mesure où les analogies sont formulées par rapport aux propriétés de l'éther. Mais elle ne s'y réduit pas et appelle à un certain dépassement de la mécanique, ou du moins de ses modèles : « Ces lois, en effet, sont indépendantes du mécanisme particulier auquel elles s'appliquent. Elles doivent se retrouver invariables à travers la diversité des apparences »[24].

Cette « invariance » n'est autre que celle de la physique mathématique formulée autour de ses principes physiques. La « conformité des lois de l'électrostatique et de l'électrodynamique avec les principes de la dynamique » est précisément ce qui les constitue en physique mathématique. On peut éviter de déployer l'appareil de cette dernière en s'en tenant à des comparaisons entre des phénomènes de l'une et de l'autre, qui mettent en évidence « leur parfait

---

[21] Cf. Paty [1996a].
[22] Poincaré [1894b], p. 6-9.
[23] Poincaré [1894b], p. 12.
[24] Poincaré [1894b], p. 6.

parallélisme ». L'analyse mathématique, ensuite, montre que cette concordance, esquissée dans ses grandes lignes, est vérifiée dans tous les détails (comme Poincaré l'établit par ailleurs dans son cours sur le même sujet)[25]. Et les explications mécaniques provisoires et relatives auront en quelque sorte constitué des échafaudages (supports mécaniques…) permettant la formulation de lois spécifiques pour des phénomènes (ici, électromagnétiques) qui sortaient à première vue du domaine de la mécanique, sans les réduire à cette dernière.

Il importe du moins de maintenir une distinction entre la mécanique au sens de tels modèles et la *mécanique analytique*, que Poincaré désignait éventuellement comme la *dynamique*. L'*explication mécanique générale*, englobant toutes les explications de détail, à laquelle il rapportait la connaissance théorique, n'était autre que l'expression, pour les phénomènes considérés, des lois fondamentales de la *physique mathématique*, à savoir le principe de moindre action de Hamilton et les lois de conservation, qui conduisent aux équations de Lagrange et de Hamilton. Cette physique mathématique-là, chez lui, va en fait au-delà de la mécanique au sens courant, même si elle fait de la mécanique analytique sa référence, car elle garde leur spécificité propre aux phénomènes du nouveau domaine exploré : la forme mathématique - empruntée à la mécanique analytique - est un outil puissant d'exploration en profondeur de la réalité physique, dépassant les cas ou les phénomènes particuliers. Mais il faut, pour y parvenir, avoir maîtrisé la formulation des principes, voire rendu compte des invariances. C'est ainsi que l'électrodynamique des corps en mouvement devient, chez Poincaré, une physique mathématique au sens plein du terme lorsqu'elle réussit à incorporer le principe de relativité[26].

3

LE DEUXIEME STADE : LES ANALOGIES MATHEMATIQUES

La possibilité d'intervention de nouveaux concepts est ainsi laissée ouverte. Quant à celui de champ, par lequel on peut considérer avec Einstein que s'effectue, pour l'électromagnétisme, le dépassement de la mécanique (telle fut la leçon de la théorie de la relativité restreinte de ce dernier)[27], Poincaré ne le séparait pas de celui d'éther, qui n'était pas, à ses yeux, un concept de la mécanique à proprement parler, puisqu'il avait été suscité par l'optique et l'électromagnétisme. Cet éther était, pour Poincaré, un éther dynamique, conçu

---

[25] Poincaré [1894a].

[26] Paty [1996a].

[27] Voir Paty [1993], chap. 3.

(par analogie) sur le modèle des corps de la mécanique (avec des propriétés de cette nature, comme celle de l'éther élastique, etc.). On peut dire que le concept d'éther chez Poincaré repose sur le lien qu'entretiennent l'électromagnétisme, l'optique et la mécanique. Il tient, en fait, son origine de la relation entre les équations aux dérivées partielles et la physique des milieux continus. On voit par là combien la physique mathématique au sens de Poincaré, bien qu'elle ne se confonde pas avec la mécanique, reste tributaire de ses représentations, et sans doute est-ce là un effet de sa conception des analogies mécaniques, qui préparent les analogies plus profondes.

On est déjà dans ces dernières, qui correspondent à la généralisation, avec, par exemple, la considération faite par Poincaré à propos de l'électrodynamique et du mouvement absolu et des effets du second ordre : la théorie de Lorentz, indique-t-il dans la deuxième édition d'*Electricité et optique*, permet de démontrer que « le mouvement de la Terre n'influe pas sur les phénomènes optiques si on néglige les carrés » de termes qui sont de l'ordre de l'aberration stellaire ; mais si l'on en tient compte, la théorie prévoit une influence du mouvement de la Terre sur les phénomènes optiques. Or l'expérience de Michelson montre que ce n'est pas le cas, quant aux phénomènes. Cette expérience particulière est sans doute révélatrice d'une propriété générale, vraie pour tous les effets du second ordre, et même pour les effets à tous les ordres[28]. Bien que Poincaré n'emploie pas ici le terme, on peut considérer que c'est l'*analogie des phénomènes* qui montre la voie de la généralisation, et elle n'est autre, du point de vue théorique, que l'*analogie mathématique*.

Car ce sont les analogies mathématiques qui donnent la possibilité de généraliser, ce qui ne peut être obtenu par les analogies figuratives des modèles mécaniques, qui se contentent d'illustrer - et peuvent, par là, aider l'intuition. La limitation du premier stade de l'analogie correspond à celle qu'Abel Rey diagnostiquait de son coté, avec ses propres catégories, dans la conception mécaniste, qu'il voyait comme un « nominalisme véritable » : car en rapportant la physique à des mouvements d'atomes, c'est-à-dire à des individus, elle conduit à une vue sur la marche de la science comme allant « toujours du particulier au particulier, d'un fait à un autre fait », et n'allant du particulier au général que « par la répétition indéfinie de ce procès ». Il n'y a de généralité selon le mécanisme, estimait-il, « que parce que les faits particuliers se ressemblent et se réduisent à des éléments semblables »[29]. On pourrait en dire de même pour l'analogie « au sens faible », figurative, des modèles de type mécaniste et des rapprochements provisoires et particuliers.

Le second sens, le second stade de l'analogie tel que nous pouvons le déceler chez Poincaré, est donc celui des analogies mathématiques, qui expriment des rapports vrais (ce sont, en fait, des rapports de structure dans la profondeur des faits ou des phénomènes), et qui permettent de passer, par une extension

[28] Poincaré [1901a], troisième partie, chap. 6, p. 518, 536.

[29] Rey [1907], p. 259-260.

créatrice, du particulier au général et, pour ce qui concerne la physique, d'accéder pleinement à la physique théorique et mathématique[30]. L'analogie comprise dans ce sens est inséparable du mouvement de pensée qui échappe à la simple comparaison et à l'induction empiriste, pour « inventer librement ».

La fonction de l'analogie mathématique est précisément, pour Poincaré, de mener à la généralisation, aussi bien en mathématiques qu'en physique[31]. Dans son étude sur « Les rapports de l'analyse et de la physique mathématique », il l'examine aussi pour la physique, en partant, précisément, de la considération de l'établissement d'une loi (générale, exprimée mathématiquement) à partir de données d'expériences plus ou moins précises[32]. « La loi sort de l'expérience, mais elle n'en sort pas immédiatement. L'expérience est individuelle, la loi qu'on en tire est générale », fait-il remarquer, ajoutant que la loi se veut précise et simple alors que « l'expérience n'est qu'approchée (…) et se fait dans des conditions toujours complexes ».

Sur des données particulières de cette nature, il correspond autant de manières que l'on veut de formuler des propositions générales. Il faut donc « faire un choix, au moins provisoire » ; dans ce choix, notre seul guide sera l'analogie, mais conçue comme celle que nous avons vue à l'œuvre dans l'analyse. « Qui nous a appris à connaître les analogies véritables, profondes, celles que les yeux ne voient pas et que la raison devine ? C'est l'esprit mathématique, qui dédaigne la matière pour ne s'attacher qu'à la forme pure ». Son usage nous apprend « à rapprocher ce que les apparences séparent », et nous rend ainsi « plus aptes à pénétrer les secrets de la nature ».

Poincaré privilégie donc, pour sa « physique mathématique » (qui comprend la *physique théorique*, tournée vers les phénomènes et les concepts , ainsi que la *physique mathématique* au sens propre, tel qu'on l'entend aujourd'hui, ramenée au formalisme[33]), « l'analogie mathématiqu », l'analogie dans la forme que donne l'analyse. C'est elle qui permet à la physique d'appréhender « les analogies des phénomènes » et de l'expérience, et à l'esprit de saisir les relations de structure entre les grandeurs qui décrivent ces phénomènes, même s'ils sont éloignés en apparence, parce qu'elles correspondent, selon lui, à des connexions profondes entre ces phénomènes. L'analogie mathématique permet, grâce à la puissance de la forme mathématique qui exprime ces relations, d'aller au-delà des énoncés antérieurs, de généraliser. La connaissance des lois d'un phénomène aide à *deviner* celles de l'autre. « Les analogies mathématiques (…) peuvent nous faire *pressentir* les analogies physiques »[34]… L analogie par analyse et l'intuition apparaissent ici implicitement liées, en physique aussi bien qu'en mathématiques.

Pour Poincaré, les analogies mathématiques sous-tendent l'utilisation

[30] Paty [à paraître, b].

[31] Sur les mathématiques proprement dites, voir Paty [1999b].

[32] Poincaré [1897], *in* [1991], p. 22-28.

[33] Sur la « physique mathématique » au sens de Poincaré, voir Paty [1999a].

[34] *Ibid.* Souligné par moi, M.P.

que les physiciens font de l'analyse. Il en voit trois types d'exemples. Le premier est le passage de la loi de Kepler sur le mouvement des planètes (loi globale des orbites elliptiques) à celle de Newton (loi différentielle de la gravitation). La loi de Newton permet de « déduire, par une généralisation immédiate, tous les effets des perturbations et toute la mécanique céleste. Jamais, au contraire, si l'on avait conservé l'énoncé de Kepler, on n'aurait regardé les orbites des planètes troublées, ces courbes compliquées dont personne n'a jamais écrit l'équation, comme les généralisations naturelles de l'ellipse. Les progrès des observations n'auraient servi qu'à faire croire au chaos »[35]. Les analogies invoquées ici sont celles qui ramènent les mouvements perturbés complexes au mouvement qui dérive de la loi dans le cas le plus simple, les rattachant à une même cause.

Le second exemple est celui de l'électrodynamique de Maxwell, que celui-ci a développée, non pas sur une expérience nouvelle, mais en envisageant les faits connus « sous un biais nouveau », en s'apercevant « que les équations deviennent plus symétriques quand on y ajoute un terme » ; ce faisant, Maxwell « [devançait] de vingt ans l'expérience ». S'il est parvenu à ce succès, « c'est qu'[il] était profondément imprégné du sentiment de la symétrie mathématique (…), qu'il était habitué à 'penser en vecteurs' » : deux notions, symétries et vecteurs (ces derniers venus des grandeurs imaginaires), qui avaient été cultivées par les mathématiques pures. Et Poincaré de conclure, sur cet exemple : « Maxwell (…) avait au plus haut degré le sens intime des analogies mathématiques. C'est pour cela qu'il a fait de bonne physique mathématique. » Autrement dit, il avait le sens des conditions d'application en physique des grandeurs et des formulations mathématiques, ou encore, il savait penser la physique selon les rapports mathématiques, dont la symétrie est un trait particulier significatif : elle se manifeste par les propriétés des grandeurs mathématiques.

L'exemple de Maxwell enseigne en outre comment cette pensée de la physique selon les rapports mathématiques sait ne pas rester prisonnière de formes mathématiques, et les modifie en fonction de son objet même (c'est-à-dire de la spécificité des phénomènes physiques considérés). Le physicien ne se satisfait pas de seulement déduire des équations de la physique mathématique toutes leurs conséquences, en les « regard[ant] comme des réalités intangibles ». Ce que ces équations « doivent nous apprendre surtout, c'est ce qu'on peut et ce qu'on doit y changer, [pour en tirer] quelque chose d'utile ». L'usage de l'analogie mathématique en physique relève d'un processus dynamique de la pensée, qui construit ses objets en modifiant, s'il le faut, la forme considérée. La forme n'est pas un moule définitif et intouchable et peut être changée.

En soulignant combien, à l'exemple de Maxwell, le physicien ne doit pas prendre aveuglément les équations de la physique mathématique, mais doit savoir les modifier en fonction de la spécificité du problème physique qu'il étudie, Poincaré se révèle soucieux de préserver la *théorie physique*, au lieu d'en faire simplement, comme les « physiciens mathématiciens » le comprennent souvent,

[35] *Ibid.*

une application directement déductive de l'appareil mathématique et des équations de la « physique mathématique »[36]. C'est en quoi sa physique mathématique est aussi une *physique théorique* au sens propre du terme, et les analogies mathématiques qu'il y emploie sont davantage orientées vers la constitution de cette dernière que vers l'attention à la forme pour elle-même.

Le troisième exemple d'analogie mathématique concerne l'identité de la forme par celle des équations, pour des phénomènes qui n'ont physiquement aucun rapport ni apparent, ni même éventuellement réel. Poincaré reprend ici une constatation, intimement liée à ses travaux de physique mathématique, développée dans un article publié en 1890 dans l'*American Journal of Mathematics*, « Sur les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique ». Ces équations se rapportent à des problèmes posés par des chapitres très différents de la physique, mais présentant de fortes analogies. « Quand on envisage, écrivait-il dans l'article de 1890, les divers problèmes de Calcul Intégral qui se posent naturellement lorsqu'on veut approfondir les parties les plus différentes de la Physique, il est impossible de n'être pas frappé des analogies que tous ces problèmes présentent entre eux »[37].

Tels, par exemple, le problème, en théorie de la chaleur, « de trouver la température finale d'un corps solide conducteur, homogène et isotrope, lorsque les divers points de la surfce de ce corps sont maintenus artificiellement à des températures données », et celui, en électrostatique, de trouver « la distribution de l'électricité statique à la surface d'un conducteur donné ». Traduits « dans le langage analytique », ces deux problèmes reviennent à trouver une fonction qui satisfasse à l'équation de Laplace et qui prennent certaines valeurs dans les conditions aux limites : le premier correspond au problème de Dirichlet, le second à un cas particulier de celui-ci[38]. Ces deux problèmes, « absolument différents au point de vue physique, sont identiques au point de vue analytique ». Poincaré fait ensuite un inventaire d'« autres analogies (...) évidentes » de ce genre, qui sont à la base des traitements de la physique mathématique[39].

Dans l'article sur « Les rapports de l'analyse et de la physique mathématique », Poincaré reprend donc ces considérations pour éclairer son

---

[36] « Devons-nous simplement en déduire toutes les conséquences et les regarder comme des réalités intangibles ? Loin de là ; ce qu'elles doivent nous apprendre surtout, c'est ce qu'on peut et ce qu'on doit y changer. C'est comme cela que nous en tirerons quelque chose d'utile [pour la physique] » (Poincaré [1897]).

[37] Poincaré [1890b].

[38] L'équation de Laplace est, pour une fonction V : $\Delta V = \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0$. Pour le problème de chaleur, V doit satisfaire à l'équation à l'intérieur du volume du corps et prendre des valeurs données sur la surface (voir aussi Poincaré [1895]). Pour le problème d'électrostatique, V doit satisfaire à l'équation à l'extérieur du conducteur, et être = 0 à l'infini, et à 1 à la surface du conducteur. On passe du cas général du premier au second grâce à l'emploi des fonctions de Green. Voir aussi Poincaré [1899a et b]).

[39] Poincaté [1890b].

troisième exemple d'analogie mathématique correspondant à l'utilisation de l'analyse en physique. « Une même équation, celle de Laplace, expose-t-il, se rencontre dans la théorie de l'attraction newtonienne, dans celle du mouvement des liquides, dans celle du potentiel électrique, dans celle du magnétisme, dans celle de la propagation de la chaleur et dans bien d'autres encore », de telle sorte que « ces théories semblent des images calquées l'une sur l'autre ; elles s'éclairent mutuellement, en s'empruntant leur langage », et la loi, connue, de l'un de ces phénomènes aide à deviner celle d'un autre[40]. Les analogies mathématiques, qui « peuvent nous faire pressentir les analogies physiques », peuvent être utiles, même en l'absence de parenté physique entre des phénomènes (c'est alors la forme seule qui est utile, par les déductions qu'elle entraîne).

On voit assez bien par là comment « le but de la physique mathématique », par-delà l'octroi d'outils de calcul, « est surtout de (...) faire connaître l'harmonie cachée des choses en les (...) faisant voir d'un nouveau biais. De toutes les parties de l'analyse, ce sont les plus élevées, ce sont les plus pures, pour ainsi dire, qui seront les plus fécondes entre les mains de ceux qui savent s'en servir »[41].

4

ANALOGIES DE L'EXPERIENCE

L'exemple de la loi différentielle de la gravitation newtonienne, par lequel Poincaré illustrait la capacité de l'analogie mathématique à étendre et à généraliser la loi physique, comprend à la fois la loi de la gravitation donnant la force en fonction de l'inverse carré de la distance, et la seconde loi générale du mouvement de Newton, qui exprime le changement de la quantité de mouvement en fonction de la force et permet, à partir de la relation causale entre deux points infiniment voisins de la trajectoire, de connaître tous les points de celle-ci. Mais où se trouve ici, exactement, l'analogie ? Poincaré la rapporte à un changement de « langage »" qui permet d'embrasser des mouvements simples (à deux corps) et des mouvements perturbés (à trois corps ou davantage) en les reconnaissant comme soumis à la même loi fondamentale, et de dépasser la simplicité d'une trajectoire elliptique pour une courbe plus complexe. Ce « changement de langage » (compte tenu de la particularité du vocabulaire épistémologique de Poincaré[42]) consiste en la substitution à une loi globale d'une loi locale, différentielle (cette loi que l'on

[40] Poincaré [1897], *in* [1991].

[41] *Ibid.*

[42] Paty [à paraître, c].

appelle aujourd'hui de la « causalité classique »).

Einstein devait remarquer, pour sa part, sur ce même sujet, que « c'est dans l'association (loi du mouvement) + (loi de l'attraction) que réside le caractère admirable de cette construction intellectuelle qui permet, en partant de l'état d'un système à un instant donné, de calculer les états antérieurs et postérieurs - dans la mesure où les processus relèvent uniquement des forces de gravitation ». Et il ajoutait (marquant la continuité d'idées qui relie la théorie de Newton à celle de la relativité générale) : « La cohérence logique du système conceptuel de Newton tient au fait que l'accélération des masses d'un système a pour seule cause ces masses elles-mêmes »[43].

L'analogie à laquelle se réfère Poincaré pour cet exemple se présente, ici, d'une manière indirecte : elle ne réside pas tant dans un rapprochement, que dans une opération. On serait à vrai dire tenté d'employer un autre mot qu'analogie pour décrire une telle opération. Ou plutôt, cette opération nous découvre la signification que ce terme, « analogie » utilisé à dessein, recouvre chez Poincaré : il désigne une opération qui identifie en profondeur, par-delà ce qui est visible ou directement constatable, des traits structurels qui se rapportent aux phénomènes, et qui rapprochent les mouvements dus à la même attraction mutuelle de deux aussi bien que de plusieurs corps. Plus largement qu'au sens étymologique (mathématique) de l'analogie comme rapport entre des grandeurs, c'est à un sens plus général, transcendé de ce dernier, que cela fait penser : au sens philosophique des « analogies de l'expérience » tel qu'on le trouve développé par Emmanuel Kant dans la *Critique de la raison pure* (dans l'« Analytique transcendantale », section sur l'« Analytique des principes »)[44].

Dans sa préface à l'édition de 1970 de *La valeur de la science*, Jules Vuillemin indique que, pour Poincaré, l'analyse fait appréhender à la physique « ce que Kant appelait 'les analogies de l'expérience' », et relève que Poincaré utilise le même exemple que Kant dans la *Critique de la raison pure*, à savoir la loi de Newton[45]. Kant s'inspire effectivement de cette loi pour analyser la « seconde analogie de l'expérience ». Revenons donc sur les analogies de l'expérience dans la philosophie kantienne, pour examiner l'écho éventuel qu'on en retrouve dans l'épistémologie de Poincaré.

Chez Kant, les « analogies de l'expérience » sont des « principes synthétiques a priori de l'entendement pur », avec les « axiomes de l'intuition », les « anticipations de la perception » et les « postulats de la pensée empirique en général », qui conditionnent la possibilité de l'expérience[46]. En ce qui les concerne, il s'agit d'exprimer « la représentation d'une liaison nécessaire des perceptions », laquelle renvoie à l'« unité synthétique », posée *a priori*, « de tous les phénomènes

---

[43] Voir, par exemple, Einstein [1927] ; cf. Paty [1987].

[44] Kant [1781, 1787], trad. fr., p. 914-948.

[45] J. Vuillemin, *in* Poincaré [1905], éd. 1970, p. 12.

[46] Kant [1781, 1787], trad. fr., p. 899- 901.

selon leur rapport au temps »[47]. Les analogies de l'expérience sont au nombre de trois : la permanence de la substance, l'existence dans la nature de lois fixes de succession (selon la formulation de la première édition de la *Critique*), précisée comme constituant le « principe de causalité » (dans la seconde édition), et enfin le principe universel de réaction réciproque entre les substances à chaque moment du temps.

Rapportées respectivement aux trois modes du temps selon Kant, qui sont la permanence, la succession, et la simultanéité, leur formulation évoque celle des lois du mouvement de Newton, portées sur un autre plan que la physique, celui du transcendantal. (Par ailleurs, la conception kantienne des grandeurs des phénomènes, tant *extensives* - pour lesquelles la représentation des parties rend possible la représentation du tout, et qui sont objet d'*intuition* dans l'espace ou dans le temps - qu'*intensives* - relatives au degré de la *sensation* occasionnée -, considérées comme continues[48], évoque les fluxions et le calcul différentiel[49]). C'est que Kant a constitué ses principes de l'entendement pur en fonction de son projet d'assurer la possibilité de penser tant la mathématique du continu qu'une physique (fondée sur les concepts newtoniens) où les grandeurs traitées par l'analyse rendent compte du donné de l'expérience[50].

Les analogies de l'expérience semblent calquées sur les lois du mouvement des corps des *Principia* de Newton. La formulation de la première, la permanence de la substance (cette dernière étant entendue comme « substrat du réel »), rappelle la conservation de la masse, mais aussi celle de la quantité de mouvement, qui correspond au principe d'inertie (permanence dans l'état de mouvement). L'énoncé de la seconde (loi continue de succession, ou de causalité, dans le temps), présente un parallélisme avec la loi du changement continu et infinitésimal de la vitesse du mouvement, c'est-à-dire son accélération à chaque instant, en fonction de la force (loi de causalité différentielle de la dynamique). Quant à la troisième (réactions réciproques de toutes les substances dans le temps), elle ressemble étonnament à la loi de l'action et de la réaction, tout en exprimant bien davantage, puisqu'il en découle directement l'unité de l'univers, c'est-à-dire la liaison de tous les phénomènes entre eux[51].

Mais cette évidente parenté de formulation n'autorise cependant pas à établir une relation directe entre les analogies kantiennes, et en particulier la deuxième, avec la loi newtonienne de la dynamique. Cette dernière, en effet, comme les autres lois du mouvement de Newton et toutes les lois des phénomènes empiriques d'une manière générale, concerne des grandeurs quantitatives et

---

[47] *Ibid.*, p. 914-948.

[48] *Ibid.*, p. 902-914.

[49] Paty [à paraître, d].

[50] Jules Vuillemin a proposé, dabns ce sens, une analyse éclairante de la relation qui existe entre la *Critique de la Raison Pure* (Kant [1781] 1786) et et les *Premiers Principes Métaphysiques de la Science de la Natur* (Kant [1791]). Vuillemin [1955].

[51] *Ibid.*, p. 914-948.

constitutives des phénomènes, alors que les analogies de l'expérience désignent tout autre chose : la condition transcendantale de la possibilité de l'expérience des phénomènes. Kant est parfaitement explicite à cet égard : les analogies de l'expérience ne portent pas sur « les phénomènes et sur la synthèse de leur intuition empirique », mais « seulement sur l'existence [de ces phénomènes] et sur leur rapport entre eux relativement à cette existence ». Car, précise-t-il, « en philosophie, les analogies signifient quelque chose de très différent de ce qu'elles représentent en mathématique" : elles sont qualitatives, et non quantitatives et constitutives des grandeurs. Une analogie de l'expérience n'est « qu'une règle suivant laquelle l'unité de l'expérience [conçue en général] doit résulter des perceptions ». Elle vaut comme principe régulateur (et non constitutif) des objets ou des phénomènes, principe, précise Kant, de l'*usage empirique* de l'entendement.

Ce sont des « lois transcendantales de la nature », par lesquelles les phénomènes ont la possibilité de nous être donnés, et d'apparaître reliés entre eux, alors qu'en partant des seuls concepts portant sur des objets ou sur leur existence, on ne pourrait assurer la possibilité d'une telle relation. Les analogies des phénomènes assurent la possibilité d'une *connexion* entre eux et donc de l'expérience, par laquelle le sujet trancendantal peut les connaître, tous les objets devant pouvoir lui être donnés « si leur représentation doit avoir pour [lui] une réalité objective ». (Le terme « analogie » se justifie sans doute par l'idée de connexion ou relation, comme extension dans le raisonnement, dans l'« entendement pur », de la notion mathématique de rapport). Avec l'expérience, par cette « unité synthétique a priori », l'anticipation de l'expérience est également rendue possible. En résumé, les analogies de l'expérience sont, pour notre entendement, ce qui assure la condition de l'expérience des phénomènes et de leur représentation théorique[52].

Pour revenir à la deuxième analogie, elle constitue la possibilité *a priori* de penser le rapport de deux phénomènes dans le changement, tel, par exemple, que le formule la seconde loi du mouvement de Newton, par la loi de causalité (sans doute Kant emprunte-t-il la formulation plus récente et précise d'Euler, voire celle de d'Alembert qui porte expressément sur les vitesses et leurs différentielles[53]). A l'image de cette loi, la seconde analogie s'établit par un raisonnement qui pose la continuité des changements en appelant à des considérations sur des différences infinitésimales et sur des accroissements continus de changements. On peut par là connaître *a priori* la *forme* de la loi du changement[54] - mais non cette loi elle-même. La deuxième analogie de l'expérience

[52] *Ibid.*, p. 947.

[53] Euler [1750] ; D'Alembert [1743]. Sur la formulation de ce dernier, voir Paty [2004].

[54] Ceci pourrait conforter l'évocation (par l'allusion ci-dessus) du point de vue de d'Alembert sur la Dynamique (science des changements de mouvement), qui privilégiait le mouvement plutôt que les forces, ce qu'il rattachait à la possibilité de fonder les principes du mouvement en raison (cf. Paty [1977] ; mais Kant ne cite pas d'Alembert, dont il connaissait au moins les articles de l'*Encyclopédie*).

constitue la « condition formelle » (qui réside dans le sujet) de la connaissance de la loi de la causalité pour les phénomènes[55].

Ces précisions étant rappelées, on peut considérer que, pour Poincaré, les mathématiques, essentiellement par l'Analyse, ont pour la physique la fonction de procurer une réalisation effective (ou une application ?) de ces lois transcendantales que sont les analogies de l'expérience au sens kantien. Lorsqu'il invoque les analogies mathématiques, Poincaré se situe, en effet, pour une part sur le plan des conditions transcendantales, et pour une autre sur celui de la connaissance des grandeurs « quantitatives et constitutives » - selon la terminologie kantienne - des phénomènes. Dans son introduction à *La valeur de la science*, il mentionne les « cadres vides » quant au contenu physique que sont le temps et l'espace, que la pensée impose à la nature, dans une conception qui parait assez proche, ici, de celle de Kant : mais à ceci près que, pour Poincaré, nous ne les imposons « que parce que nous les trouvons commodes » : tous deux, du moins, se situent du point de vue du sujet transcendantal, de sa constitution selon la sensibilité pour Kant, des choix de son entendement pour Poincaré, qui opposait son conventionalisme à l'apriorisme kantien. L'étude de ces « cadres vides », l'espace et le temps, était précisément, pour Poincaré, l'objet principal de l'analyse mathématique : celle-ci, n'ayant pas non plus de contenu, n'est, considérait Poincaré, qu'un « langage commode ». Mais sans ce langage, « la plupart des analogies intimes des choses nous seraient demeurées à jamais inconnues »[56].

La portée de l'analyse mathématique semble ainsi dépasser, chez Poincaré, la considération des seules relations quantitatives entre les grandeurs. D'ailleurs, ces grandeurs, en tant qu'elles sont abstraites et purement mathématiques (déliées de leurs conditions d'origine dans l'expérience), sont indépendantes des phénomènes. Il est intéressant de remarquer aussi que Poincaré a développé, même en mathématique pure, une conception du comportement qualitatif des phénomènes par rapport aux grandeurs. Dans ce sens, l'analyse mathématique ne serait pas éloignée de définir directement, chez lui, la condition transcendantale de possibilité de la connaissance des phénomènes, et les analogies mathématiques, tout en étant plus précises, particulières et constitutives que les analogies de l'expérience de Kant, auraient alors une fonction assez voisine dans l'entendement.

[55] *Ibid.*, p. 940-941.

[56] Poincaré [1905], Introduction.

5

ANALOGIE, HARMONIE ET REALITE

"L'harmonie interne du monde", révélée par "les analogies intimes des choses", est "la seule véritable réalité objective", écrit Poincaré dans l'introduction à *La valeur de la science*[57]. Il exprime même l'idée que ce que l'on appelle "la réalité objective (…) est, en dernière analyse, ce qui est commun à plusieurs êtres pensants, et pourrait être commun à tous", et cela ne peut être que « l'harmonie exprimée par des lois mathématiques". On peut voir dans cette proposition le fondement de la conception poincaréenne de l'analogie. Analogie, harmonie et mathématiques s'appellent en effet naturellement dans sa pensée, et il n'est pas indifférent que soit confiée à l'analogie (dans le sens profond, celui de l'analogie mathématique) la fonction d'exprimer l'harmonie de la réalité qui se donne dans les lois mathématiques (ou, plus exactement, dans les lois physiques exprimées mathématiquement).

S'interrogeant, dans un texte de 1902, sur "La valeur objective de la science", il rappelait cette idée, caractéristique de sa philosophie, que la science ne nous fait pas connaître la véritable nature des choses (question mal posée, estimait-il), mais qu'elle nous fait connaître les véritables *rapports* des choses. Il l'entendait en ce sens que quelque chose reste, d'une théorie (comme par exemple celle de Fresnel) à une autre (celle de Maxwell)[58]. « Sans doute, remarquait-il, bien des rapprochements qu'on croyait bien établis ont été abandonnés », ce qui correspond aux analogies au sens faible, figuratif ou mécanique, des rapprochements superficiels, facultatifs ou provisoires, dont on a parlé plus haut. Mais d'autres subsistent, que l'on peut considérer comme objectifs, dans le même sens où l'on parle d'objets extérieurs : ils ont la solidité des liens qu'ils tissent entre eux et, à l'instar des objets que nous tenons pour réels, ils nous font éprouver des sensations qui "nous apparaissent comme unies entre elles par je ne sais quel ciment indestructible".

Les sciences nous révèlent, de même, entre les phénomènes, des rapports plus déliés mais tout aussi solides, et qui ne sont « pas moins riches que ceux qui donnent leur réalité aux objets extérieurs ». Ces liens sont ceux qu'ont aidé à révéler les analogies mathématiques. D'où cette proposition : « La seule réalité objective, ce sont les rapports des choses d'où résulte l'harmonie

---

[57] Poincaré [1905], Introduction.

[58] Poincaré [1902b], *in* [1905], p. 181.

universelle »[59]. Mais l'harmonie, est-il besoin de le préciser, existe également en mathématiques : "Il en est des symboles mathématiques comme des réalités physiques ; c'est en comparant les aspects différents des choses que nous pourrons en comprendre l'harmonie intime, qui seule est belle et par conséquent digne de nos efforts"[60].

Nous avons rappelé plus haut comment Poincaré voyait le but de la physique mathématique (qui était inséparablement pour lui la physique théorique), par-delà l'outil de calcul et le pouvoir du formalisme, dans sa capacité à faire connaître au physicien « l'harmonie cachée des choses » en les lui montrant sous un nouveau jour, grâce au recours aux analogies mathématiques[61]. Cette harmonie, c'est aussi bien l'unité du monde, ou du moins de parties de celui-ci, pour laquelle la physique dispose de l'intuition que lui donnent les liens d'unité qu'expriment les mathématiques, cette science des relations. Telle est, en dernière instance, la pensée qui fonde aussi bien les analogies de l'expérience de Kant (dans une « esthétique transcendantale ») que les analogies mathématiques de Poincaré (rapportées par lui à une harmonie fondamentale).

REFERENCES, BIBLIOGRAPHIE

ALEMBERT, Jean le Rond D' [1743]. *Traité de dynamique*, David, Paris, 1743. 2ème éd., modif. et augm., David, Paris, 1758.

EINSTEIN, Albert [1927]. Newtons Mechanik und ihr Einfluss auf die Gestaltiung der theoretischen Physik (1927). Tr. fr., La mécanique de Newton et son influence sur la formation de la physique théorique, *in* Einstein [1989-1993], vol. 5, p. 235-241.

EINSTEIN, Albert [1989-1993]. *Oeuvres choisies*, trad. fr. par le groupe de trad. de l'ENS Fontenay-St-Cloud *et al.*, édition publiée sous la dir. de Françoise Balibar. Seuil/éd. du CNRS, Paris, 6 vols., 1989-1993.

EULER, Leonhard [1750]. Découverte d'un nouveau principe de méchanique, *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*, 6 (1750), 1752, p. 185-217. Repris dans L. E., *Opera Omnia*, series 2 : *Opera mechanica et astronomica*, vol. 5, éd. par Joachim Otto Fleckenstein, Lausanne, 1957, p. 81-109.

HAMILTON, Willam Rowland [1834]. On a General methods in Dynamics, *Philosophical Transactions of the Royal Society*, pa rt I I for 18 34, pp. 247–308.

KANT, Immanuel [1781, 1787]. *Critik der reinen Vernunft*, J.F. Hartknoch, Riga, 1781; 2è éd., modifiée, 1787. Trad. fr. par Alexandre J.L. Delamarre et François

59 *Ibid.*, p. 182-184. Poincaré ajoutait que ces rapports et cette harmonie « ne sauraient être conçus en dehors d'un esprit qui les conçoit ou qui les sent », mais ils sont objectifs parce qu'ils peuvent être communs à tous les êtres pensants.

60 Poincaré [1897], *in* [1991], p. 25.

61 *Ibid.*.

Marty, *Critique de la raison pure*, *in* Kant, Emmanuel, *Oeuvres philosophiques*, vol. 1, Gallimard, Paris, 1980, p. 705-1470.

KANT, Immanuel [1796]. *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft* (1796). Trad. fr. par François de Gandt, *Premiers principes métaphysiques de la science de la nature*, *in* Kant, Emmanuel, *Oeuvres philosophiques*, vol. 2, Gallimard, Paris, 1985, p. 347-493.

MAXWELL, James Clerk [1873a]. *A Treatise on electricity and magnetism*, Clarendon Press, London, 2 vols.. 2nd ed., 1891 ; 3rd ed., 1891 ; re-publ., Dover, New York, 2 vols., 1954. Trad. fr., *Traité d'électricité et de magnétisme*, Paris, 2 vols, 1885 et 1887.

- [1873b]. The equation of continuity and physical analogy, Manuscrit publié dans Maxwell [1995], vol. 2, p. 1812-1873.

- [1995]. *The scientific lectures and papers of J.C.M.*, edited par P. M. Hartman, 2 vols. (Vol. 1 : *1846-1862*; Vol. 2 : *1862-1873*), Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

PATY, Michel [1977]. *Théorie et pratique de la connaissance chez Jean d'Alembert*, Thèse de doctorat en philosophie, Université des Sciences Humaines, Strasbourg 2, 1977, dactyl., 468 p.

PATY, Michel [1987]. Einstein et la pensée de Newton, *La Pensée* (Paris), n° 259, 1987, 17-37.

PATY, Michel [1993]. *Einstein philosophe. La physique comme pratique philosophique*, Presses Universitaires de France, Paris, 1993.

- [1996]. Poincaré et le principe de relativité, *in* Greffe, Jean-Louis ; Heinzmann, Gerhard et Lorenz, Kuno (éds.), *Henri Poincaré. Science et philosophie. Congrès international, Nancy, France, 14-18 mai 1994*, Akademie Verlag, Berlin/Albert Blanchard, Paris, 1996, p. 101-143.

- [1999a]. La place des principes dans la physique mathématique au sens de Poincaré, *in* Sebestik, Jan et Soulez, Antonia (éds.), *Actes du Colloque Philosophie et Science au tournant du siècle: Mach, Boltzmann, Poincaré et Duhem, Paris, 29 mai-1er juin 1995*, *Fundamenta philosophiæ* (Nancy) 3 (2), 1998-1999, 75-90.

- [1999b]. La création scientifique selon Poincaré et Einstein, *in* Serfati, Michel (éd.), *La recherche de la vérité*, Coll. Ecriture des Mathématiques, Editions ACL, Paris, 1999, p. .

PATY, Michel [2004f]. L'élément différentiel de temps et la causalité physique dans la dynamique de Alembert, *in* Morelon, Régis & Hasnawi, Ahmad (éds.), *De Zénon d'Elée à Poincaré. Recueil d'études en hommage à Roshdi Rashed*, Editions Peeters, Louvain (Be), 2004, p. 391-426.

PATY, Michel [à paraître, a]. Poincaré et la relativité des mouvements pour l'optique, *Revue d'histoire des sciences*.

PATY, Michel [à paraître, b]. '*Mathesis universalis*' et intelligibilité chez

Descartes, *in* Karine Chemla *et al* (éds.), *Ceci n'est pas un Festschrift. Mélanges offerts à Imre Toth* (29.12.1996).

PATY, Michel [à paraître, c]. La nature du raisonnement analogique chez Poincaré.

PATY, Michel [à paraître, d]. Structures du rationnel et grandeurs mathématiques dans la philosophie kantienne, *Colloque "Kant et le calcul infinitésimal"*, Nancy, 18 et 19 février 2005, à paraître .

POINCARE, Henri [1890a]. *Electricité et optique, I. Les théories de Maxwell et la théorie électromagnétique de la lumière. Leçons professées pendant le second semestre 1888-1889* [en réalité, 1887-1888], rédigées par Jules Blondin, Cours de physique mathématique, Carré, Paris, 1890, 314 p. [Voir la ré-éd. revue et augm., Poincaré [1901a]).

- [1890b]. Sur les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique, *Americal Journal of Mathematics*, 12, 1890, 211-294.

- [1890c]. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique, *Acta mathematica*, 13, 1890, 1-270.

- [1891a]. *Electricité et optique, II. Les théories de Helmhotlz et les expériences de Hertz. Leçons professées pendant le second semestre 1889-1890*, rédigées par Bernard Brunhes, Cours de physique mathématique, Carré, Paris, 1891, 262 p. [Voir la ré-éd. revue et augm., Poincaré [1901a]).

- [1894a]. *Les oscillations électriques.* Leçons professées pendant le premier trimestre 1892-1893, rédigées par Charles Maurain. Cours de la Faculté des sciences de Paris, Carré, Paris, 1894, 343 p.

- [1894b]. *La théorie de Maxwell et les oscillations hertziennes*, Collection Scientia, Carré et Naud, Paris, 1894.

[1895]. *Théorie analytique de la propagation de la chaleur*, Leçons professées pendant le premier semestre 1893-1894, rédigées par MM. Rouyer et Bair, Carré et Naud, Paris, 1895.

- [1897]. Sur les rapports de l'analyse pure et de la physique mathématique, *Acta mathematica* 21, 1897, 331-341 ; republié dans Poincaré [1991], p. 17-30. Egalement paru, avec des modifications, sous le titre "Les rapports de l'analyse et de la physique mathématique", *Revue générale des sciences pures et appliquées* 8, 1897, 857-861 ; repris dans Poincaré 1905a [chapitre 5 : "L'analyse et la physique"], éd. 1970, p. 103-113.

- [1899a]. *Théorie du potentiel newtonien.* Leçons professées à la Sorbonne pendant le premier semestre 1894-1895, rédigées par Edouard Le Roy et Georges Vincent, Carré et Naud, Paris, 1899. Reprod., J. Gabay, Paris, 1990.

- [1899b]. *Cinématique et mécanismes. Potentiel et dynamique des fluides*, Carré et Naud, Paris, 1899.

- [1901a]. *Electricité et optique. La lumière et les théories électrodynamiques. Leçons professées à la Sorbonne en 1888, 1890 et 1899. Cours de physique mathématique*. Deuxième édition, revue et complétée par Jules Blondin et Eugène

Néculcéa, Carré et Naud, Paris, Gauthier-Villars, Paris, 1901. [Voir la première édition: Poincaré [1890] et [1891], comportant les cours de 1888 et 1890].

- [1902a]. *La science et l'hypothèse*, Flammarion, Paris, 1902 ; 1968.

- [1902b]. Sur la valeur objective de la science, *Revue de métaphysique et de morale* 10, 1902, 263-293. (Repris et augm. dans [1905a], chap 10 et 11).

- [1903a]. L'espace et ses trois dimensions, *Revue de métaphysique et de morale* 11, 1903, 281-301; 407-429. Repris dans Poincaré 1905 a (chap. 3: La notion d'espace, et 4: L'espace et ses trois dimensions), ed. 1970, p. 55-76, 77-100. (Cf. Poincaré 1898 b.)

- [1904]. L'état actuel et l'avenir de la physique mathématique, *La revue des idées*, novembre 1904, 801-818. Egalement, *Bulletin des sciences mathématiques* 28, 1904 (décembre), 302-324 [Conférence au Congrès international des arts et des sciences, Saint-Louis, Missouri, 24 septembre 1904]. Egalement dans Poincaré [1905] [chapitres 7: L'histoire de la physique mathématique, 8: La crise actuelle de la physique mathématique, et 9: L'avenir de la physique mathématique], éd. 1970, p. 123-128, 129-140, 141-147].

- [1905]. *La valeur de la science*, Flammarion, Paris, 1905; 1970.

- [1908a]. *Science et méthode*, Flammarion, Paris, 1908 ; 1918.

- [1908b]. L'avenir des mathématiques, *Atti IV Congr. Internat. Matematici, Roma, 11 aprile 1908)*, p. 167-182 ; repris dans Poincaré [1908a], livre 1, chap. 2, éd. 1918, p. 19-42.

- [1908c]. L'invention mathématique, *Bulletin de l'Institut Général de Psychologie*, 8è année, 1908 (n° 3), 175-196. Repris dans Poincaré [1908a], livre 1, chap. 3, p. 43-63.

- [1908d]. Le choix des faits, *The Monist* , 1909, 231-232. Publié dans Poincaré [1908a], livre 1, chap. 1, éd. 1918, p. 16-18.

- [1916-1965]. *Oeuvres*, Gauthier-Villars, Paris, 11 vols., 1916-1965.

- [1991]. *L'analyse et la recherche*, choix de textes et introductio de Girolamo Ramunni, Hermann, Paris, 1991.

REY, Abel [1907]. *La théorie de la physique chez les physiciens contemporains*, Alcan, Paris, 1907.

THOMSON, William (Lord Kelvin) [1842]. On the uniform motion of heat in homogeneous solid bodies, and its connection with the mathematical theory of electricity, *Cambridge Mathematical Journal* 3, 1842, 71-84.

- [1904]. *Baltimore lectures on molecular dynamics and the wave theory of light*, Clay, London, 1904.

- [1892-1911]. *Mathematical and physical papers*. Arranged and revised by Sir Joseph Larmor, Cambridge University Press, Cambridge, 1892-1911, 6 vols.

VUILLEMIN, Jules [1955]. *Physique et métaphysique kantiennes*, Presses Universitaires de France, Paris, 1955.