Les commentaires aimablement apportés par Giuseppe Longo à notre article nous semblent de nature à éclaircir certains de nos propos. Ils leur ajoutent d'autre part des développements qui lui sont propres, et constituent de nouvelles contributions à la discussion à laquelle notre article s'efforce de participer.

Nous convenons volontiers de la plupart des considérations et des thèses avancées par Longo. Nous le remercions en particulier d'avoir d'abord attiré particulièrement notre attention sur une possible ambiguïté de notre usage du terme « formel » (ambiguïté que nous avons cherché à pallier dans notre rédaction finale : cf. en particulier la note (4) de notre article), puis d'avoir souligné dans ses commentaires les dangers d'une position qui identifie les mathématiques à un jeu formel, au sens explicité dans la section I de ses commentaires. Nous sommes, d'ailleurs, d'autant plus sensibles à ces dangers, que nous pensons que c'est justement au point même où le formel, conçu au sens large comme relevant de fonctions établies à l'intérieur d'un système, se distingue du formel conçu au sens du programme formaliste (qui, rappellons-le, était dans sa formulation originaire bien loin de plaider pour une identification des mathématiques à des systèmes formels en ce dernier sens), que, dans la constitution des théories mathématiques, opèrent des conditions cognitives. Au premier sens de ce terme, qui est celui que nous retenons, la géométrie d'Euclide est certainement un système formel ; néanmoins ce système intègre une définition de la ligne en tant que « longueur sans largeur » (Euclide, *Eléments*, définition I,2), qui serait demeurée incompréhensible aux membres de la communauté à qui cette théorie était destinée s'ils n'avaient pas disposé de capacités cognitives similaires à celles discutées par Longo dans la section IV de ses commentaires. Voici donc un exemple de collaboration possible et profitable entre analyse cognitive et analyse historique, visant à la reconstruction du processus de constitution d'une théorie mathématique. Et c'est à des collaborations de ce type que nous faisons allusion dans la partie finale de notre article.

Le seul point sur lequel il nous semble utile, pour éclairer nos positions, d'ajouter quelques remarques aux commentaires de Longo, est celui que ce dernier aborde dans la section II. Il concerne la « grande stabilité et fiabilité » des mathématiques (cf. en particulier la note (17) de notre article). Longo insiste sur le fait qu'il n'y a pas de miracle derrière la stabilité des mathématiques, et qu'il ne faut pas y voir le résultat surprenant d'une sorte d'illumination (ou encore celui d'une capacité à scruter un monde d'objets transcendants ou une structure cachée derrière la surface du monde sensible), mais bien plutôt un but orientant dès le départ les constructions intellectuelles que nous voulons mathématiques.

L'idée que les mathématiques sont un « fragment de nos formes de construction de connaissance maximalement invariant et stable » est bien de Longo et nous ne voulons nullement la revendiquer comme nôtre. Mais nous pouvons au moins remarquer qu'elle formule plus clairement, et de manière explicite, un des présupposés à partir desquels est partie notre réflexion : le fait que la constitution des théories mathématiques soit une forme de constitution d'une objectivité. En insistant sur la nécessité de « comprendre comment et pourquoi une construction humaine [qui est par sa nature][…] imparfaite et révisable parvient à manifester de si grandes stabilité et fiabilité », nous voulions déplacer le point de mire de nombreuses réflexions philosophiques visant à montrer qu'en dépit d'une croyance répandue les mathématiques sont imprécises et faillibles, car elles ne sont qu'une construction humaine. Mais nous ne voulions pas le faire en niant la dernière spécification, qu'au contraire nous prenons comme une évidence. Nous voulions justement observer que, comme les mathématiques relèvent certainement d'une construction humaine (il nous semble à cet égard que la charge de la preuve reviendrait à qui soutiendrait le contraire), il est naturel qu'elles soient imprécises et faillibles, de sorte que le problème majeur de la philosophie des mathématiques n’est pas de montrer qu'il en est ainsi, mais de comprendre comment une telle construction peut parvenir au degré de stabilité et de fiabilité que nous constatons dans les mathématiques.

Pour nous, ceci signifie comprendre comment les hommes peuvent parvenir à constituer des objets abstraits, c’est-à-dire, non pas de simples concepts bien compris, aisément communicables et donc stables, mais de véritables objets, tels que sont les objets mathématiques. On ne saurait pas ici préciser cette question qui a fait et fait couler quantité d’encre dans la discussion philosophique concernant les mathématiques, sans dépasser de loin les objectifs de notre courte réplique. Nous voulons tout simplement rendre explicite que pour nous la notion d’objet mathématique n’est nullement une notion ontologique, dans la mesure où elle ne renvoie nullement à un univers qui nous préexiste. Elle est plutôt une notion épistémologique dans la mesure où elle concerne les formes d’organisation et de constitution de notre connaissance. Un des problèmes clefs de la philosophie des mathématiques — peut-être le problème clef — est pour nous justement celui de comprendre comment les mathématiques peuvent se constituer en tant que connaissance d’objets, sans que ces objets soient donnés à l’avance, en étant en revanche constitués par l’activité mathématique elle même. C’est exactement en répondant à cette question que nous pensons que les sciences cognitives peuvent apporter une contribution majeure, et peut-être même décisive. Elles peuvent nous dire quelles sont les conditions cognitives qui rendent possible une objectivation, c’est-à-dire le passage d’un concept (ou forme de classification d’un domaine d’objets préalables ou d’autres sortes de données) en un nouveau objet, conçu comme quelque chose qui peut se donner comme tel et à propos duquel il est donc possible d’acquérir une connaissance *de re* et non seulement *de dicto*.

Ceci est d’autant plus difficile que les hommes qui, d’après nous, parviennent à constituer des objets abstraits, et constituent de ce fait des théories mathématiques, sont justement des hommes au pluriel, des hommes concrets agissant dans des conditions historiquement déterminées, et non pas des sortes d’excroissances d’un unique « sujet cognitif » C’est bien, nous semble-t-il, ce que Longo veut dire aussi lorsque, après avoir soutenu qu’il « faut donner au mot histoire et contingence le sens de l’objectivité construite du sujet cognitif », il ajoute : « non pas celle des petites histoires psychologiques ou sociologiques : le défi scientifique est toujours dans l’équilibre difficile entre historie possible et subjective et objectivité construite de la connaissance. »

La notion de sujet cognitif est une fiction scientifique. Elle est néanmoins d’autant plus utile que de son introduction dépend la constitution des sciences cognitives elles-mêmes. Loin de nous l'idée de vouloir la refuser. Nous voulons simplement insister sur le fait que lorsqu’elles sont appelées à se combiner avec des recherches historiques, les sciences cognitives doivent s’appliquer à des cas particuliers. Nous sommes d’accord avec Longo à propos de la constitution de la théorie des ensemble (cf. la section III de ses commentaires) : « il y a un abîme entre bon sens et constitution du sens. » Et nous ajoutons que cette constitution du sens n’est pas un pur processus logique. Elle est plutôt une séquence d’actes, qui ont eu lieu en un contexte marqué par une histoire. Si la notion d’ensemble s’imposa à la fin du XIXème siècle comme une notion mathématiquement riche, et donc comme essentiellement distincte de la notion ordinaire de collection d’objets, ce fut parce que la constitution de son sens avait été rendue possible par une histoire dont Dedekind, Cantor et Frege n’ont été que des continuateurs. La différence cruciale entre ensembles au sens mathématique du terme et ensembles au sens ordinaire du terme n’aurait certainement pas pu être perçue sans des compétences cognitives assez élaborées, mais elle n’aurait certainement pas pu être non plus conçue mille ans plus tôt sans que les développements des mathématiques eussent mené à une vision quasi-structuraliste des théories mathématiques que Dedekind se chargea de rendre manifeste. Et quiconque n'aurait pas possédé une culture et des compétences mathématiques lui permettant de comprendre les textes de ce dernier, de Cantor ou de Frege, n'aurait jamais perçu, en tant que pur sujet cognitif, cette différence cruciale.

Il pourrait sembler étrange que, pour affirmer la possibilité d'une collaboration profitable entre philosophie des mathématiques et sciences cognitives, nous insistions sur la nécessité d'une application historique (ou pour être plus précis, d'une application à l'histoire) de ces dernières. Ceci peut paraître étrange à ceux qui pensent qu'il y a un abîme entre recherches historiques et réflexion philosophique à propos des mathématiques (ce qui n'est certainement pas le cas de Longo). Mais ceci nous ne le pensons guère, et nous continuons à croire que les mathématiques sont une réalité, et qu'en faire une philosophie ne revient à rien d'autre et ne peut revenir à rien d'autre qu'à comprendre cette réalité.