LA STRUCTURE DE FINANCEMENT DES FIRMES : UN MODELE STOCHASTIQUE EN TEMPS CONTINU.

Patrick Guy

LA STRUCTURE DE FINANCEMENT DES FIRMES : UN MODELE STOCHASTIQUE EN TEMPS CONTINU.

Patrick Guy*

Dans cet article, nous développons un modèle de la firme qui, pour le choix de sa structure de financement, prend en compte une fonction d'utilité liée à la richesse générée par sa fonction de production. Nous montrons alors, en appliquant notre modèle à deux cas particuliers, que les choix de cette structure de financement sont en relation directe avec les contraintes environnementales de la firme et la technologie accessible. Ils évoluent en étroite corrélation avec l'évolution des paramètres qui leur sont rattachés. En outre, le fait de tenir compte d'une déutilité, liée à la perte de pouvoir qu'engendre l'appel à des capitaux extérieurs, permet de mieux comprendre les hiérarchies dans les appels de capitaux et leurs évolutions temporelles.

The financial structure of the firms: A stochastic model in continuous time.

In this paper, we develop a model of the firm which use a utility function of the generated wealth for the choice of its financial structure. In using two special cases, we show that the choices of this financial structure are closely linked with the environmental constraints and the accessible technology. The evolution of this structure is correlated with the evolution of these parameters. Besides, the fact to use a negative utility function, linked with the loss of power when the firm has external shareholder, is a good way to understand the hierarchy between the different types of the funds and their evolution in the financial structure of the firm.

Classification JEL : D42, D81, G11, G32

Mots clefs : Aversion aux risques, structure de financement, imperfection des marchés, monopole, évolution stochastique.

*LAMETA, Université de Montpellier I, Faculté des sciences économiques, avenue de la mer, BP 9606, 34054 Montpellier Cedex 1. Tel : 04 67 15 84 95 Fax : 04 67 15 84 67 E-mail : pguy@sceco.univ-montp1.fr

I INTRODUCTION :

Les récents développements de la théorie économique sur les structures de financement des firmes ont tous été principalement initiés par l'article de Modigliani et Miller de 1958. Ces auteurs montrent que la valeur de l'entreprise est indépendante de sa structure de financement, à “ cash flow ” et à classe de risque donné. Modigliani et Miller en 1963 et Miller en 1977 sont revenus sur ce résultat et, d'ailleurs, la plus part des travaux effectués depuis montrent que cette structure de financement n'est pas neutre.

L'article de synthèse de Harris et Raviv [1991], sur la littérature économique concernant la structure de financement des firmes, classe les travaux pertinents en 4 catégories, en fonction de la théorie de base qui les sous-tend :

1 - Les articles basés sur les coûts d'agence.
2 - Les articles basés sur les asymétries d'information et leur réduction par le signalement.
3 - Les articles basés sur les interactions de marchés.
4 - Les articles basés sur les relations de gouvernance, en particulier les droits sur l'entreprise que procure la possession de ses actions.

De l'avis de Harris et Raviv , ces différents modèles ont identifié un grand nombre de déterminants potentiels pour la structure de financement des firmes. Mais les études empiriques n'ont pas pu les classifier en fonction des différents contextes. Finalement, il apparaît que la catégorie, traitant de la relation entre la structure de financement des firmes et des interactions de marchés, a été peu explorée au regard des autres dont certaines ont peut-être atteint leur niveau de rendement décroissant. Paradoxalement à cette conclusion, Harris et Raviv ne citent aucun des travaux faisant appel à la théorie de l'utilité en environnement aléatoire, théorie qui est pourtant la clef de voûte des théories financières Il est vrai que ces travaux s'intéressent plus aux choix d'une structure de financement qu'à la valorisation de la firme une fois ces choix faits.

Dans cet article, nous développons un modèle qui met en relation le choix d'une structure de financement avec une fonction d'utilité rattachée à la richesse générée par la firme. Cette richesse évolue de manière stochastique à cause de l'évolution temporelle de la demande. Ce modèle montre clairement le lien direct entre l'évolution de la structure de financement et l'évolution des paramètres environnementaux de la firme, ainsi que de la technologie accessible.

II LE MODELE :

Dans ce modèle, nous privilégions le point de vue qui met en relation la structure de financement des firmes avec la richesse qu'elle procure au décideur de la firme en fonction des choix dont il dispose. Le décideur est ici soit un agent seul, ce qui est souvent le cas pour les petites ou moyennes entreprises, car les actionnaires sont souvent uniquement des prêtes noms, soit une structure hiérarchique d'agents dont les intérêts sont communs, au moins en ce qui concerne la structure de financement, des divergences d'intérêts étant sous-jacentes pour les autres domaines.

Dans ce cadre, pour que le comportement du décideur puisse s'exprimer pleinement au niveau du choix de l'investissement de ses propres capitaux dans l'entreprise, un choix alternatif doit être disponible, et, de plus, il faut tenir compte de la totalité de sa richesse (voir Katz [1983]). Comme une firme est essentiellement un actif risqué, nous prendrons un actif non risqué comme alternative. Des choix plus complexes sont évidemment possibles, mais ils occulteraient, au moins en partie, les résultats du modèle.

Soit donc u(W(t)) la fonction[1] d'utilité, par unité de temps, du décideur lorsque celui-ci à une richesse totale W(t) à l'instant t considéré[2]. Cette fonction est croissante et concave en la richesse, donc $u'(W(t)) > 0$ et $u''(W(t)) < 0$. L'agent maximise son utilité globale, sur une période donnée, à l'aide de ses variables de décision. En supposant que les axiomes de Savage s'appliquent au décideur, que ses préférences sont intertemporellement séparables, et si δ représente son taux d'impatience alors ce dernier résout le programme suivant :

$$\mathrm{Max}\ \{E_A [\int_0^T \exp(- \delta t)\ u(W(t))\ dt]\}$$

Avec les différentes contraintes qui s'appliquent sur la valeur possible de ses variables de décision, l'intervalle [0 , T] représentant son horizon de décision.

A chaque instant t, le décideur répartit sa richesse entre l'actif sans risque et son niveau d'investissement dans les capitaux permanents de la firme. Pour compléter ces derniers, il a la possibilité de faire appel à des capitaux extérieurs : soit sous forme d'endettement, donc à un coût élevé, soit sous forme d'actionnariat, mais avec le risque de perdre son pouvoir de décision. A la fin de la période t + dt, la richesse du décideur W(t + dt) est donc composée de 2 éléments : un investissement sans risque ayant un taux d'intérêt r_1, par unité de temps, et imposé à un taux τ_1 , un investissement dans un projet d'entreprise, qui par essence est risqué, imposé à un taux τ_2 . Donc, si W(t) est la richesse du décideur à l'instant t, $\alpha(t)$ la partie de celle-ci investie dans l'actif sans risque, $dBe\ (1 - \tau)$ le bénéfice aléatoire distribué par la firme après impôt[3] et V_F la valeur de la firme[4], ces 2 termes étant pris à la fin de la période t + dt, et si $\gamma(t)$ est la part de la firme qui revient au décideur, sa richesse de fin de période, après imposition, est devenue :

$$W(t + dt) = \alpha(t)\ W(t)\ (1 + r_1\ dt\ (1 - \tau_1))$$

$$+ (\gamma(t)\ V_F - (1 - \alpha(t))\ W(t) + \gamma(t)\ dBe\ (1 - \tau))\ (1 - \tau_2) + (1 - \alpha(t))\ W(t)$$

L'impôt considéré ici est un impôt simple sur les plus-values. Il est égal à : $\alpha(t)\ W(t)\ r_1\ \tau_1\ dt$, en ce qui concerne la plus-value sur le placement sans risque, et à : $(\gamma(t)\ V_F - (1 - \alpha(t))\ W(t) + \gamma(t)\ dBe\ (1 - \tau))\ \tau_2$ en ce qui concerne la plus-value sur la richesse issue du projet d'entreprise[5]. Cette définition est bien sûr restrictive et ne correspond que à une partie de la réalité, qui est d'ailleurs souvent très complexe, et dépend des caractéristiques propres du

1 Pour l'instant, nous ne tenons pas compte de la fonction de déutilité induite par le partage du pouvoir.
2 Comme le décideur représente l'organe de décision de la firme, l'utilité de sa consommation n'intervient pas directement dans ses choix. Par contre, nous introduisons par la suite un coût fixe non nul dont une partie peut être considéré comme la rémunération du décideur, sa consommation intervient donc indirectement à travers la réduction du niveau de profit généré par l'entreprise.
3 τ représente le taux d'imposition sur les sociétés. En France, il est égal, aujourd'hui en 1999, à : (1/3)*1,1.
4 Après remboursement des créanciers, en particulier des emprunts contractés pour l'investissement.
5 La plus-value sur la valeur de l'entreprise est, dans ce cas, imposée au fur et à mesure de sa création.

décideur et des lois nationales[6]. Mais cette approche, comme nous le verrons par la suite, est tout à fait suffisante dans notre contexte.

Nous devons maintenant définir le bénéfice et la valeur de l'entreprise en fin de période t + dt. Ils sont bien sûr dépendants du marché et des choix du décideur. Le décideur investit dans l'entreprise une partie de sa richesse[7], soit : $(1 - \alpha)\ W$. Mais il peut aussi faire appel à de l'investissement externe de 2 façons : soit de la dette externe[8] à un taux d'intérêt, par unité de temps, égal à r_2 soit une participation d'apporteurs[9] de capitaux qui se traduit par une réduction de la part lui revenant au niveau du bénéfice et de la valeur finale de l'entreprise. Si E est la valeur d'endettement de l'entreprise et W_e la valeur de la participation des apporteurs de capitaux. Nous pouvons alors écrire que la part de l'entreprise revenant au décideur est : $\gamma = (1 - \alpha)\ W / ((1 - \alpha)\ W + W_e)$. De plus, $CP = (1 - \alpha)\ W + W_e = (1 - \alpha)\ W / \gamma$ représente les capitaux propres de l'entreprise et $CPe = (1 - \alpha)\ W + W_e + E = CP + E$ représente les capitaux permanents de l'entreprise. Cette dernière expression définit les capacités de la structure de production de la firme, donc le niveau d'investissement. Introduisons maintenant les autres termes permettant de définir le bénéfice et la valeur de l'entreprise en fin de période. Le premier terme est un terme de revenu que l'on peut assimiler dans la pratique au chiffre d'affaires de la période, qui est aléatoire car dépendant du marché, soit : dY . Le deuxième terme est un terme de coût qui est aussi aléatoire pour des raisons similaires, soit : dC . Le troisième terme dAm est un terme d'amortissement qui, par principe, sert à maintenir de manière comptable la valeur des investissements. C'est une fonction du niveau des capitaux permanents qui, en général, est une fonction linéaire de ces capitaux et du temps[10]. Le quatrième et dernier terme V_R est la valeur résiduelle de l'entreprise. Elle peut dépendre de beaucoup de paramètres, en particulier si l'appel aux apporteurs de capitaux s'est fait à travers la bourse[11] de paramètres complètement exogènes. Nous supposerons dans notre modèle qu'il n'y a pas d'appréciation ou de dépréciation de cette valeur par rapport à la valeur de l'investissement[12], soit donc : $V_R = CPe$.

L'imposition étant une imposition sur la plus-value, la richesse totale générée par l'entreprise en fin de période est alors :

$$W_{ent}(t + dt) = (dY - dC - dAm - r_2\ E\ dt)\ (1 - \tau) + V_R - E$$

Le terme $dBe = dY - dC - dAm - r_2\ E\ dt = dY - dC - (1 + r_2\ dt)\ E - (dAm - E)$ représente le bénéfice avant impôt sur la période, c'est donc bien sur lui que s'applique l'impôt sur les sociétés. Pour le décideur, il n'y a pas d'imposition sur la valeur liquidative puisque celle-ci est considérée comme constante sur la période, donc ne générant pas de plus-

[6] En France par exemple, il faut tenir compte, sur la partie des bénéfices distribués, de l'avoir fiscal.
[7] Dorénavant, nous cesserons d'écrire la dépendance temporelle des fonctions, celle-ci étant évidente en général. Pour l'instant, les taux d'intérêt sont supposés constants.
[8] Cette dette est supposée remboursable, en totalité ou en partie, à tout instant et sans frais.
[9] Les apporteurs de capitaux restent externes aux décisions dans l'entreprise, mais ils sont une menace pour le décideur qui peut perdre son pouvoir de décision dans la mesure où : $W_e > (1 - \alpha)\ W$.
[10] D'autres type d'amortissement sont possibles, mais ils sont très peu utilisés en règle générale.
[11] L'introduction en bourse d'une entreprise a plusieurs effets, et les enquêtes faites auprès des décideurs montrent souvent que les objectifs de cette introduction ne concernent pas que des besoins de capitaux. Par exemple, la liquidité des avoirs est un paramètre sous-jacent. Ici, nous les supposons suffisamment liquides sur la période pour qu'il n'y ai pas de prime de risque attachée à une quelconque illiquidité.
[12] Nous pouvons, par exemple, imaginer que la valeur de l'entreprise réside dans des machines que l'amortissement a permis de garder intact, leur valeur de revente restant égale en permanence à leur valeur d'achat.

value. Nous ne tenons pas compte d'une possibilité de banqueroute de l'entreprise, ni du fait que Be puisse être négatif[13].

Le terme : $d\prod = dY - dC$ correspond au profit utilisé classiquement dans la théorie de la firme. La richesse finale générée par la firme peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$W_{ent}(t + dt) = (d\prod - (1 + r_2 dt) E) (1 - \tau) - (dAm - E) (1 - \tau) + V_R - E$$

Comme par hypothèse, nous avons : $CP = CPe - E = V_R - E = V_F$, nous pouvons réécrire l'expression de la richesse finale générée par la firme :

$$W_{ent}(t + dt) = (d\prod - (1 + r_2 dt) E) (1 - \tau) + CP - (dAm - E) (1 - \tau)$$

Puisque, nous avons : $\gamma V_F = ((1 - \alpha) W / CP) CP = (1 - \alpha) W$. La valeur de la richesse finale du décideur est donc :

$$W(t +dt) = \alpha W (1 + r_1 dt (1 - \tau_1))$$

$$+ \gamma (d\prod - (1 + r_2 dt) E - (dAm - E)) (1 - \tau) (1 - \tau_2) + (1 - \alpha) W$$

Cette expression permet de mettre en évidence la variation de richesse du décideur entre les instants t et t + dt :

$$dW = \alpha W r_1 dt (1 - \tau_1) + \gamma (d\prod - (1 + r_2 dt) E - (dAm - E)) (1 - \tau) (1 - \tau_2)$$

Expression qui montre que, dans les décisions du décideur concernant son arbitrage entre son investissement dans l'actif non risqué et son investissement dans l'entreprise, c'est le rapport : $(1 - \tau) (1 - \tau_2) / (1 - \tau_1)$ des différents taux d'imposition qui intervient, et non pas leur valeur absolue. Pour des raisons de simplification des formules, nous poserons dorénavant : $(1 - \tau) = \zeta$ et $(1 - \tau_1) = (1 - \tau_2) = 1$.

En tenant compte de la linéarité de l'amortissement qui s'effectue sur une période θ, nous avons :

$$dW = \alpha W r_1 dt + \gamma (d\prod - r_2 dt E - (CPe / \theta) dt) \zeta$$

La partie aléatoire de la variation de la richesse correspond au terme $d\prod$, nous devons donc spécifier sa loi d'évolution. Pour cela, nous devons l'exprimer en fonction de la quantité produite dQ que nous supposons égale à la demande[14]. Si p est le prix de vente à l'instant t et que la fonction de coût est linéaire dans la quantité produite, nous avons :

$$d\prod = dY - dC = (p - c) dQ + F dt$$

[13] En fait quand Be devient négatif, le facteur ξ traduisant l'imposition devient égal à 1 , car sinon l'imposition deviendrait une subvention. Toutefois, l'on peut justifier cette façon de faire par la procédure de "carry-back" qui permet d'obtenir un remboursement d'impôt suite à une perte.

[14] Nous supposons donc explicitement que le firme n'est pas limitée dans la quantité à produire par son outil industriel. De plus, avec la fonction de coût choisie, si le coût fixe est irrécupérable et engagé en début de période, la firme a toujours intérêt à produire.

Dans cette expression, c représente le coût marginal, qui est supposé dépendre seulement du niveau d'investissement, et F le coût fixe par unité de temps, que l'on suppose lui indépendant de l'investissement[15]. Nous supposerons, sans plus de justification, que la loi d'évolution de la demande est un mouvement Brownien standard[16], soit :

$$dQ = \mu \, dt + \sigma \, d\omega$$

Où μ est une fonction de p , σ est une constante et ω un processus de Wiener. Nous avons alors pour la variation de la richesse du décideur :

$$dW = (\alpha \, W \, r_1 + \zeta \, \gamma \, ((p - c) \, \mu + F - r_2 \, E - (CPe / \theta))) \, dt + \zeta \, \gamma \, ((p - c) \, \sigma \, d\omega$$

Nous pouvons maintenant expliciter le programme général que résout le décideur dans ses choix stratégiques concernant l'entreprise. Mais pour cela, nous devons prendre en compte la fonction de désutilité exprimant le fait que le décideur peut perdre son pouvoir sur la firme si les autres actionnaires détiennent une part suffisamment importante des capitaux propres. Le décideur résout alors le programme suivant :

$$\text{Max } \{E_A [\int_0^T \exp(- \delta \, t) \, (u(W(t)) - \varpi(\gamma(t)) \, dt]\}$$

Avec les contraintes suivantes :

$$\gamma \in [\gamma_{min} , 1] \quad \text{où} \quad \gamma_{min} \cong 0 \qquad \alpha \in [0 , \alpha_{max}] \quad \text{où} \quad \alpha_{max} \cong 1 \qquad E \in [0 , E_{max}]$$

et $p \in [0 , p_{max}]$ si la firme n'est pas régulée[17].

La fonction $\varpi(\gamma)$ traduit la désutilité[18] du décideur impliquée par le risque de partage du pouvoir de décision. Cette fonction joue un rôle important et a été mise en évidence par plusieurs économistes (voir Harris et al. [1988 , 1991] ou Stulz [1988]). Elle se traduit d'ailleurs concrètement lors d'une O.P.A. par une prime comprise entre 15 et 30 % de la valeur réelle des actions (voir Brilman et al. [1988]). Sa définition est relativement compliquée, car elle dépend de manière très concrète du type d'actionnariat de la firme. Qui plus est, suivant les lois nationales, il existe des seuils plus ou moins significatifs. Dans le cadre de notre analyse, les propriétés que nous supposons vérifiées par cette fonction de désutilité sont : $\varpi(\gamma) = 0$ si $\gamma \in \,]0.5 , 1]$ et $\varpi(\gamma) > 0$, $\varpi'(\gamma) < 0$, $\varpi''(\gamma) > 0$ si $\gamma \in [\gamma_{min} , 0.5]$. Nous supposerons, comme pour la fonction d'utilité, qu'il y a séparation intertemporelle et qu'il n'y a pas de dépendance explicite du temps. De plus, pour ne pas introduire de discontinuité inutile, étant donné la méconnaissance que nous avons de cette fonction, nous supposerons aussi que $\varpi(\gamma)$ et $\varpi'(\gamma)$ sont continues, donc que : $\varpi(0.5) = 0$ et $\varpi'(0.5) = 0$. L'ensemble de ces propriétés, nous rapproche d'un cadre analytique qui semble relativement naturel pour définir le programme résolu par le décideur.

Avant de résoudre le programme du décideur, quelques remarques s'imposent. Nous supposons que les taux d'intérêt sont indépendants du temps. En fait, supposer une

---

[15] Par exemple, le coût marginal représente les achats et le coût fixe les charges de personnel, incluant la rémunération du décideur.

[16] Un Brownien géométrique correspondrait à un effet de club, nous supposons donc dans notre cas que la probabilité que la demande soit négative est négligeable.

[17] La fonction de coûts est sous-additive, donc nous sommes dans le cas d'un monopole naturel.

[18] Voir en annexe le graphe de la fonction de désutilité.

dépendance temporelle ne pose pas de problème particulier. Par contre, prendre en compte des modifications de taux en fonction de l'accroissement du niveau d'endettement et de ses niveaux antérieurs peut transformer les solutions. De plus, nous supposons que le niveau de la dette, ainsi d'ailleurs que des autres capitaux, peut être modifié (vers le bas ou vers le haut) de manière quelconque, à chaque instant, sans coût de transaction. Il existe donc un marché parfait pour ces capitaux[19] et pour les biens d'équipement de la firme, puisque les capitaux permanents représentent le niveau d'investissement dans l'outil de production. En ce qui concerne la possibilité d'une banqueroute, il y a plusieurs façon de l'exprimer. Si l'on veut se rapprocher du cas réel les conditions peuvent être complexes à prendre en compte. Donc, nous ne les utiliserons pas dans ce modèle, l'imposition peut alors devenir une subvention et la richesse du décideur peut être négative en fin de période[20].

III APPLICATION I, LE MONOPOLE LIBRE :

Dans le cadre de notre modèle, le monopole libre maximise à l'aide de ses variables de commande (α , E , γ , p) , soumises aux contraintes déjà définies, son espérance d'utilité sur son horizon [0 , T]. En introduisant, la fonction d'utilité indirecte, soit :

$$J(W(t)\ ,\ t) = \mathrm{Max}\ \{E_A\ [\ \int_t^T \exp(-\ \delta\ (s - t))\ (u(W(s)) - \varpi(\gamma(s))\ ds\ ]\}$$

La richesse du décideur W(t) est la variable d'état du système dont on connaît par ailleurs la loi d'évolution dans le temps, sous la forme :

$$dW = \mu_W\ dt + \sigma_W\ d\omega$$

En appliquant la version stochastique du principe de Bellman (voir Demange et al [1992]), le programme du décideur devient :

$$\delta\ J - \partial J/\partial t = \mathrm{Max}\ \{(u(W(t)) - \varpi(\gamma(t))) + \mu_W\ \partial J/\partial W + (1/2)\ \sigma_W^2\ \partial\partial J/\partial W^2\}$$

Pour résoudre le programme du décideur, nous devons donc résoudre d'abord le programme qui correspond au terme de droite de l'équation différentielle. Ce programme est un programme de maximisation sous contraintes qui s'écrit :

$$\mathrm{Max}\ \{(u(W(t)) - \varpi(\gamma(t))) + \lambda_1\ (\gamma - \gamma_{min}) + \lambda_2\ (1 - \gamma) + \lambda_3\ \alpha + \lambda_4\ (\alpha_{max} - \alpha)$$

$$+ \lambda_5\ E + \lambda_6\ (E_{max} - E) + \lambda_7\ p + \lambda_8\ (p_{max} - p) + \mu_W\ \partial J/\partial W + (1/2)\ \sigma_W^2\ \partial\partial J/\partial W^2\}$$

Où les λ représentent les constantes généralisées[21] de Kuhn-Tucker. Elles permettent de tenir compte des contraintes en les couplant avec les inégalités et égalités habituelles. Soit x une variable générique représentant une des variables de commande, les conditions de 1[er] ordre du programme sont de la forme :

$$-\ \varpi'\ \delta_{\gamma x} + \lambda_x - \lambda_{x+1} + (\partial J/\partial W)\ (\partial \mu_W/\partial x) + (\partial\partial J/\partial W^2)\ \sigma_W\ (\partial \sigma_W/\partial x) = 0$$

---

[19] Par contre, le marché des capitaux est imparfait pour le décideur car r_1 est supposé inférieur à r_2 .

[20] Le cas n'est pas aberrant dixit certaines entreprises nationalisées.

[21] En fait, elles sont fonction du temps et, de plus, dans le cas d'un programme non convexe, elles ne donnent que des conditions nécessaires pour les optimums si les conditions de Mangasarian-Fromowitz sont vérifiées.

Où $\delta_{\gamma x}$ est le symbole de Kronecker. Si l'on pose :

$$A = (\partial J/\partial W) \quad \text{et} \quad a = - (\partial\partial J/\partial W^2) / (\partial J/\partial W)$$

Il est facile de remarquer que suite aux hypothèses faites sur la forme de la fonction d'utilité u, les fonctions A et a sont obligatoirement à valeurs positives. De plus, a peut être considéré comme un indice absolu généralisé de Arrow-Pratt. En particulier, il est égal à une constante si l'on prend comme fonction d'utilité : $u(W(t)) = - \exp(- a\, W(t))$. Les conditions de 1er ordre prennent alors la forme suivante :

$$(\partial\mu_W/\partial x) - a\, \sigma_W\, (\partial\sigma_W/\partial x) + (- \varpi'\, \delta_{\gamma x} + \lambda_x - \lambda_{x+1}) / A = 0$$

Ces équations sont absolument identiques à celles obtenues dans le cas où le modèle ne prend en compte que 2 périodes. Il en est de même pour les valeurs du couple (μ_W , σ_W) si l'on pose : $T = \theta = 1$. Il est alors possible de déterminer à chaque instant quels sont les choix faits par le décideur dans les variables de commande (voir Guy [1999]).

Ces choix, qui définissent à chaque instant la structure financière de la firme, sont fonction de ses anticipations (termes : μ et σ), de son degré d'aversion au risque (terme : a), de données exogènes (termes : r_1 , r_2 et ζ) et de la forme de sa fonction de désutilité (terme : ϖ'). Ils définissent une hiérarchie dans les capitaux appelés. En particulier, si $\zeta\, r_2$ est supérieur à r_1 alors le décideur investit d'abord sa propre richesse dans la firme avant de faire appel à de la dette. Ces choix correspondent à une structure de financement optimale pour la firme qui dépend d'une part de ses caractéristiques propres, qui sont celles du décideur et de la fonction de coûts, et d'autre part de variables environnementales, qui sont à la fois déterminées par le cadre institutionnel et le marché.

Dans le cadre des suppositions suivantes :
1 - le coût marginal est une fonction linéaire de l'investissement global, soit : $c = - e\, CPe + f$, avec f et e positif, c restant à valeur positive dans le domaine de variation de CPe.
2 - la moyenne de la demande est une fonction linéaire du prix affiché, soit : $\mu = h - g\, p$, avec h et g positif, μ restant à valeur positive dans le domaine de variation de p.
3 – l'indice absolu généralisé de Arrow-Pratt a est une constante.
4 - $\zeta\, r_2$ est supérieur à r_1 .
5 - la pente de variation de la demande moyenne g est forte.

Nous pouvons donner une solution pratiquement explicite des choix du décideur dans la structure de financement de la firme :

Cas 1 / Si : $\mu(\alpha = 0 , E = 0 , \gamma = \gamma_{lim1}) > (1 + r_1 / \zeta) / e$
alors : $\mu(\alpha , 0 , \gamma) \cong (1 + r_1 / \zeta) / e)$ $\quad c \cong p$ (avec $c < p$)
et : $\gamma \in [\gamma_{min} , 0.5]$ avec $(1 + r_1 / \zeta) (- (f - c)) - e\, F + (- \varpi'(\gamma) + \lambda_1)\, e / A\, \zeta \cong 0$
γ_{lim1} est la valeur de γ lorsque l'équation reste vérifiée alors que $\alpha = 0$.

Cas 2 / Si : $(1 + r_2) / e < \mu(\alpha = 0 , E = 0 , \gamma = \gamma_{lim1}) < (1 + r_1 / \zeta) / e$
alors : $\mu(0 , 0 , \gamma) \cong (1 + r_1 / \zeta + \lambda_3 / A\, W\, \zeta) / e)$ $\quad c \cong p$ (avec $c < p$)
et : $\gamma \in [\gamma_{min} , 0.5]$
avec $(1 + r_1 / \zeta + \lambda_3 / A\, W\, \zeta) (- (f - c)) - e\, F + (- \varpi'(\gamma) + \lambda_1)\, e / A\, \zeta \cong 0$

Cas 3 / Si : $\mu(\alpha = 0 , E = 0 , \gamma = \gamma_{lim1}) < (1 + r_2) / e < \mu_D(\alpha = 0 , E = E_{max} , \gamma = \gamma_{lim2})$
alors : $\mu(0 , E , \gamma) \cong (1 + r_2) / e$ $c \cong p$ (avec $c < p$)
et : $\gamma \in [\gamma_{min} , 0.5]$ avec $(1 + r_2) (- (f - c)) - e F + (- \varpi'(\gamma) + \lambda_1) e / A \zeta \cong 0$
γ_{lim2} est la valeur de γ lorsque l'équation reste vérifiée alors que : $E = E_{max}$.

Cas 4 / Si : $\mu(\alpha = 0 , E = E_{max}, \gamma = \gamma_{lim2}) < (1 + r_2) / e$
alors : $\mu(0 , E_{max} , \gamma) \cong (1 + r_2 + \lambda_6 / A \gamma \zeta) / e$ $c \cong p$ (avec $c < p$)
et : $\gamma \in [\gamma_{min} , 0.5]$
avec $(1 + r_2 + \lambda_6 / A \gamma \zeta) (- (f - c)) - e F + (- \varpi'(\gamma) + \lambda_1) e / A \zeta \cong 0$

Ces choix évoluent avec le temps en fonction de l'évolution des paramètres impliqués dans ces équations, donc en particulier de l'évolution de la richesse du décideur. Toutefois, ces équations montrent que l'évolution de la structure de financement en fonction de la richesse du décideur sera faible, car le décideur peut ajuster constamment le coût marginal c au prix affiché p. Par contre, si les taux d'intérêts évoluent ou si les anticipations sur la demande changent alors cette structure peut évoluer considérablement.

IV APPLICATION II, LE MONOPOLE REGULE :

Pour le monopole régulé, nous supposons que la régulation se fait tout simplement par le prix imposé à chaque instant par le régulateur. Le programme que résout le décideur est formellement identique au cas précédent sauf que le prix n'est plus une variable de commande. Nous sommes encore ramenés à un programme identique à celui du modèle à 2 périodes. Il est possible de déterminer à chaque instant quels sont les choix faits par le décideur dans les variables de commande (voir Guy [1999]).

Dans le cadre des suppositions suivantes :
1 - le coût marginal est une fonction linéaire de l'investissement global, soit : $c = - e\, CPe + f$, avec f et e positif, c restant à valeur positive dans le domaine de variation de CPe.
2 – l'indice absolu généralisé de Arrow-Pratt a est une constante.
3 - $\zeta\, r_2$ est supérieur à r_1 .
4 - $d_0 = p - f$ est petit.

Les choix du décideur dans la structure de financement de la firme sont :

Cas 1 / Si : $W > (\mu - (1 + r_1 / \zeta) / e) / a \zeta \sigma^2 e$
alors : $(1 - \alpha) W = (\mu - (1 + r_1 / \zeta) / e) / a \zeta \sigma^2 e$ $E = 0$
et : $\gamma \in [\gamma_{min} , 0.5]$ avec $- F + (- \varpi'(\gamma) + \lambda_1) / A \zeta = 0$

Cas 2 / Si : $(\mu - (1 + r_2) / e) / a \zeta \sigma^2 e < W < (\mu - (1 + r_1 / \zeta) / e) / a \zeta \sigma^2 e$
alors : $\alpha = 0$ $E = 0$
et : $\gamma \in [\gamma_{min} , 0.5]$ avec $- F + (- \varpi'(\gamma) + \lambda_1) / A \zeta = 0$

Cas 3 / Si : $W < (\mu - (1 + r_2) / e) / a \zeta \sigma^2 e < W + \gamma_{lim} E_{max}$
alors : $\alpha = 0$ $W + \gamma E = (\mu - (1 + r_2) / e) / a \zeta \sigma^2 e$
et : $\gamma \in [\gamma_{min} , 0.5]$ avec $- F + (- \varpi'(\gamma) + \lambda_1) / A \zeta = 0$
γ_{lim} est la valeur de γ lorsque l'équation reste vérifiée alors que $E = E_{max}$.

Cas 4 / Si : $W + \gamma_{lim} E_{max} < (\mu - (1 + r_2) / e) / a \zeta \sigma^2 e$

alors : $\alpha = 0$ $E = E_{max}$ $\gamma \in [\gamma_{lim} , 1]$

Dans ce cas, les choix du décideur évoluent fortement avec son enrichissement. En particulier, plus sa richesse s'accroît moins il fait appel à des capitaux sous forme de dette et, simultanément, il ne fait appel à des investisseurs externes que dans la mesure où son pouvoir de décision ne peut pas être remis en compte. De plus, il a tendance à favoriser l'investissement sans risque par rapport à l'investissement dans la firme. Par contre, si l'on considère que ses anticipations de la demande sont de plus en plus fines avec le temps ($\partial\sigma/\partial t < 0$) alors ce phénomène est inversé, car l'actif risqué le devient de moins en moins. Si la supposition 4 est levée, les résultats sont similaires à des termes additifs près. Alors en jouant sur la valeur de p, le régulateur modifie le profit de l'entreprise, donc l'évolution de la richesse et, par suite, l'évolution de la structure financière.

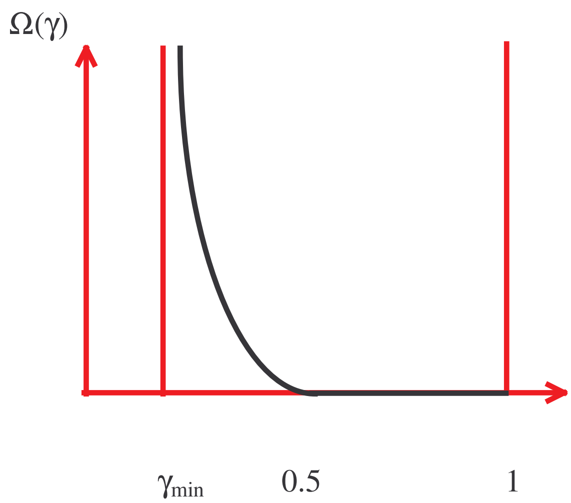
V CONCLUSION :

En résumé, cet article nous a permis de mettre en évidence que la structure de financement d'une firme n'est pas une structure figée, mais évolue dans le temps au fur et à mesure de l'évolution de la richesse du décideur. De plus, l'évolution des paramètres externes à la firme peut modifier considérablement cette structure. En particulier, des chocs économiques soit sur le marché des biens de consommations soit sur les marchés financiers vont créer obligatoirement des réajustements de cette structure qui peuvent amplifier les effets de ces chocs.

Plusieurs extensions de cette approche sont possibles. Par exemple, la prise en compte de l'existence de la clause de responsabilité limitée et d'une quantité limite dans la fonction de production, ou encore la variation de la valeur résiduelle de l'entreprise en fin de période. Il est certain qu'une extension de ce modèle peut contribuer à une meilleure compréhension de la structure de financement des firmes et de son évolution en fonction du temps.

ANNEXE :

Graphe I représentant la fonction de désutilité :



REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES :

Baldursson F.M., [1998], “ Irreversible investment under uncertainty in oligopoly ” , *Journal of economic dynamics and control*, n° 22, p 627-644.
Baron D.P., [1971]; “ Demand uncertainty in imperfect competition ”; *International Economic Review* ; vol 12 n° 2, juin 71, p 196-208.
Brander J.A., Lewis T.R., [1986]; “ Oligopoly and financial structure : the limited liability effect ”; *American economic review* , vol 76 n° 5, p 956-970.
Brilman J., Maire C., [1988]; *Manuel d'évaluation des entreprises* ; Les Editions des Organisations.
Cox J., Ingersoll J., Ross S., [1985a]; “ An intertemporal general equilibrium model of asset prices ” ; *Econometrica* , vol 53 , 85 , p 363-384.
Cox J., Ingersoll J., Ross S., [1985b)]; “ A theory of the term structure of interest rates ” ; *Econometrica* , vol 53 , 85 , p 385-407.
De Angelo H., Masulis R.W., [1980]; “ Optimal capital structure under corporate and personal taxation ”; *Journal of financial economics* , n° 8, p 3-30.
Demange G., Rochet J.C., [1992], *Méthodes mathématiques de la finance* , Economica.
Dixit A.K., Pindyck R.S., [1994], *Investement under incertainty*, Princeton University Press.
Dréze J.H., [1987]; *Essays on economic decisions under uncertainty* ; Cambridge University Press.
Guy P., [1999]; “ Les aspects stratégiques de la structure de financement des firmes ”; *Thèse de doctorat de l'université de sciences économiques de Montpellier I.*
Harris M., Raviv A., [1988] ; “ Corporate control contests and capital structure ”; *Journal of financial economics* , n° 20, p 55-86.
Harris M., Raviv A., [1991]; “ The theory of capital structure ”; *The journal of finance*, vol 46 n° 1, mars 91, p 297-355.
Holthausen D.M., [1976]; “ Input choices and uncertain demand ”; *American Economic Review* , vol 66 n°1, mars 76, p 94-103.

Jensen M.C., Meckling W.H., [1976]; “ Theory of the firm : managerial behavior agency cost and capital structure ” ; *Journal of financial economics* , vol 44 n° 4 , oct 76 , p 305-360.
Katz E., [1983]; “ Relative risk aversion in comparative statics ”; *American Economic Review*, vol 75 n° 3, juin 83, p 452-453.
Leland H.E., [1972]; “ Theory of the firm facing uncertain demand ”; *American economic review* , n° 62, p 278-291.
Leland H.E., Pyle D.H., [1977], “ Informationnal asymmetries, financial structure, and financial intermediation ”; *The journal of finance*, vol 34 n° 2, mai 77, p 371-387.
Leland H.E., Toft K.B., [1996], “ Optimal capital structure, endogenous bankruptcy, and the term structure of credit spreads ” , *The journal of finance*, vol 51 n° 3, jul 96, p 987-1019.
Merton R., [1973]; “ An intertemporal capital asset pricing model ” ; *Econometrica* , n° 41 , 73 , p 867-888.
Miller M., Modigliani F., [1958] ; “ The cost of capital, corporation finance, and the theory of investments ”; *American economic review* , n° 48, juin 58, p 261-297.
Miller M., Modigliani F., [1963]; “ Corporate income taxes and the cost of capital : a correction ” ; *American economic review*, n° 53, p 433-443.
Miller M.H., [1977]; “ Debt and taxes ”; *The journal of finance* , vol 32 n° 2, p 261-275.
Myers S.C., [1984]; “ The capital structure puzzle ”; *The journal of finance*, vol 39 n° 3 , jul 84, p 575-592.
Myers S.C., Majluf N.S., [1984]; “ Corporate financing and investissement decisions when firms have information that investors do not have ”; *Journal of financial economics*, n° 13, p 187-221.
Pratt J.W., [1964]; “ Risk aversion in the small and in the large ” ; *Econometrica*, vol 32 n° 1/2, jan/avril 64, p 122-136.
Ross S.A., [1977]; “ The determination of financial structure : the incentive signalling approach ”; *Bell journal of economics* , n° 8 , 77 , p 23-40.
Sandmo A., [1971]; “ On the theory of the competitive firm under price uncertainty ”; *American Economic Review*, n° 61, p 65-73.
Stulz R., [1988]; “ Managerial control of voting rights : Financial policies and the market for corporate control ”; *Journal of Financial Economics* , vol 26, p 3-27.
Tapiero S.C. [1990], *Applied stochastic models and control management* , North Holland.
Wang J., [1993]; “ A model of intertemporal asset prices under asymmetric information ”; *Review of economics studies* , n° 60 , 93 , p 249-282.
Zwiebel J. [1996], “ Dynamic capital structure under management entrenchment ” , *American Economic Review*, vol 86 n° 5, dec 96, p 1197-1215.