D'Alembert et les probabilités

Michel Paty

in Rashed, Roshdi (ed.), *Sciences à l'époque de la Révolution française. Recherches historiques,* Blanchard, Paris, 1988, p. 203-265.

D'Alembert et les probabilités

Michel PATY

SOMMAIRE

1. LES CONTEMPORAINS ET LA POSTERITE, CRITIQUES DES CRITIQUES DE D'ALEMBERT SUR LES PROBABILITES.

1.1 "UN APPORT NEGLIGEABLE".

De Pascal, Fermat, Huygens, qui leur donnèrent le jour au milieu du dix-septième siècle, à Laplace qui en établit, au début du dix-neuvième, une remarquable synthèse théorique, le calcul des probabilités a vu tout au long du dix-huitième siècle ses bases s'assurer et sa théorie connaître des développements considérables. En même temps, comme pour les autres branches des mathématiques, très liées à cette époque à leurs applications aux phénomènes naturels, aux connaissances utiles, le calcul des probabilités et l'analyse statistique faisaient de plus en plus l'objet d'utilisations économiques et sociales. Les "jeux de hasard", jets de dés et pile ou face (croix ou pile, comme on disait), ne sont que la face "curieuse", gratuite, de phénomènes socialement significatifs. Tout comme la connaissance des lois astronomiques - le problème à trois corps, les tables de la lune... - devait beaucoup aux impératifs de la navigation commerciale, celle des lois des probabilités et des statistiques se développèrent en liaison avec les nécessités de l'avènement du capitalisme. C'est en Angleterre que la pratique des assurances sur la vie se répandit au cours du siècle - ainsi que celle des assurances maritimes - et que furent établies les premières tables de mortalité. Le calcul des probabilités, qui fut appliqué par La Condamine et Daniel Bernoulli à l'inoculation, servait aussi à déterminer les rentes viagères. L'intérêt se porta plus généralement aux études démographiques (1), et c'est à partir du calcul des probabilités et des problèmes de son application que Condorcet tenta par la suite de fonder une mathématique politique et sociale, sans commune mesure avec les premières applications effectuées au début du siècle par Nicolas Bernoulli (2).

D'Alembert, qui s'intéressa à tous les aspects des mathématiques de son temps, se pencha également comme ses contemporains, sur le calcul des probabilités et ses applications. Dans l'effervescence féconde que nous venons de rappeler, son intérêt pour les problèmes soulevés se manifeste de façon constante ; mais son apport apparaît à première vue négligeable, sinon négatif, se marquant surtout par des "doutes et questions". Cela est à première vue étonnant si l'on considère, d'une part, sa perspicacité en mathématiques et dans cette "physique mixte" (théorique et mathématique) qui élargit substantiellement avec lui le domaine de la mécanique, ainsi que son intérêt pour la rationalisation des aspects d'une vie sociale et politique où il mena un combat militant ; et, d'autre part, le fait que ses disciples les plus proches, qui continuèrent son oeuvre, furent Condorcet et Laplace à qui l'on doit dans ce domaine les travaux considérables que l'on sait. C'est à tenter de situer cet aspect de la pensée de d'Alembert, par rapport aux problèmes de la théorie des probabilités et de ses applications, et par rapport au reste de son oeuvre, que le présent travail est consacré.

Une évaluation de la pensée probabiliste de d'Alembert (ou, pour mieux dire, de sa pensée des probabilités), est *a priori* intéressante à deux égards: d'abord, par ce qu'elle peut révéler des insuffisances du concept et de la théorie même des probabilités, dont le statut encore incertain oscille entre l'assignation objective de phénomènes et l'interprétation subjective, comme de leurs applications à l'époque considérée ; ensuite, par ce qu'elle peut enseigner sur la structure de sa pensée, sur les présupposés de son "système" propre, en ce qui concerne notamment les conditions d'applications des mathématiques aux phénomènes naturels (par exemple sur le rapport répétition-causalité, l'hypothèse d'équiprobabilité, l'indépendance d'évènements successifs et le rapport au temps).

1.2 ATTITUDE CRITIQUE.

Les probabilités ont préoccupé d'Alembert de façon constante au long de sa vie. Elles font l'objet d'articles de sa plume dans l'*Encyclopédie*, tels que “Absent”, “Avantage” (1751), “Bassette”, “(Franc-)Carreau” (1752), “Combinaison” (1753), “Croix ou Pile”, “Dé” (1754), “Gageure” (1757), “Loterie”, “Pari” (parus en 1765) (3), du moins dans la période qui précède l'interruption de 1759, car, après la crise qui accentua les divergences entre Diderot et lui, certains articles importants comme “Jeu” et “Probabilité”, parus en 1765, lui échapperont (ils ne sont pas de sa plume contrairement à ce qui avait été annoncé dans les articles antérieurs) (4) ; et de mémoires ou fragments de mémoires parus dans ses *Mélanges* (5) ainsi que dans les *Opuscules mathématiques* (6). Ces textes, certes d'inégale importance, s'échelonnent du premier volume de l'*Encyclopédie* (1751) aux derniers volumes parus des *Opuscules mathématiques* (1780). D'Alembert y aborde les probabilités sous les trois directions des calculs mathématiques, des applications au domaine social, et des conjectures (probabilité des raisonnements). Dans tous ces textes, ce sont ses "doutes" qui dominent, repris avec constance et obstination, non seulement contre des erreurs de conception et de méthode dans les applications, mais semble-t-il contre la théorie reçue des probabilités elle-même. D'Alembert n'y développe ni vues théoriques ni calculs mathématiques importants, mais - fidèle en cela à son souci permanent de clarification des concepts et de délimitation des conditions d'application du calcul qu'il marquait par ailleurs dans les autres domaines des mathématiques et de la théorie physique -, une critique conceptuelle des présupposés qui gouvernent l'utilisation de la théorie des probabilités, et un examen de la nature des problèmes à propos desquels ces dernières sont convoquées, qu'il s'agisse d'espérance mathématique ou de gains dans les jeux, d'annuités ou d'inoculation.

Son apport, si apport il y a, est essentiellement critique, et il est utile, avant même de nous attacher au contenu de la pensée probabiliste de d'Alembert, de nous interroger sur la place que les probabilités tiennent dans son "système" de la connaissance tel qu'on le voit exposé dans le *Discours préliminaire de l'Encyclopédie* et dans cette oeuvre de récapitulation qu'est l'*Essai sur les éléments de philosophie*. Dans le premier ouvrage, les probabilités ne sont pas mentionnées, sinon dans "l'explication détaillée du système des connaissances humaines" qui figure en annexe, au titre de "la quantité considérée dans la possibilité des évènements", qui "donne l'art de conjecturer ; d'où naît l'analyse des jeux de hasard " (7). Dans le second, le "probable" comme opposé au "vrai rigoureux" est relatif à "l'art de conjecturer", vu comme une branche de la Logique ; c'est seulement dans les *Eclaircissements* à l'*Essai*, de 1765, qu'un long développement expose avec détail les vues de d'Alembert sur cette matière. Mis à part ce texte postérieur qui vient cependant s'insérer naturellement dans l'économie de l'ouvrage (8), aucun chapitre ou paragraphe des *Eléments de philosophie* n'est consacré aux probabilités ou à l'analyse des hasards, qui tiennent donc manifestement une place mineure, aux yeux de d'Alembert, par rapport aux autres domaines du savoir.

1.3 COMPARAISONS.

Le contraste est frappant avec la place qu'occupe l'évocation du calcul des probabilités dans l'*Esquisse d'un tableau historique des progrès de l'esprit humain* de Condorcet, *Esquisse* qui reprend à de nombreux titres, quarante années après, le propos du *Discours préliminaire*. Les probabilités se sont hissées à l'un des rangs les plus élevés des connaissances, à la jonction des diverses sciences qui par ailleurs s'interpénètrent désormais, car elles fournissent des méthodes de généralisation, à partir des données empiriques, applicables à toutes les branches de la connaissance, et permettent d'établir des degrés de vraisemblance et de certitude en matière de conduite sociale (9). Le contraste est analogue avec l'*Essai philosophique sur les probabilités* de Laplace, qui fait en quelque sorte de la théorie analytique des probabilités la clé de voûte du "système entier des connaissances", puisque ces dernières ne peuvent être que probables et que, en outre, le calcul des chances est d'un grand avantage pour les conduites humaines (10). Plusieurs années plus tard, un autre physicien mathématicien, André-Marie Ampère, entérinera la place fondamentale faite à "l'analyse des probabilités" en la situant, dans sa "classification naturelle de toutes les connaissances humaines", au rang des "Sciences cosmologiques [...] qui n'empruntent à l'observation que des notions de grandeur et de mesure", après "l'arithmographie", l'analyse mathématique et la théorie des fonctions, qu'elle vient compléter ; il s'agit d'un "genre de recherches dont nous trouvons partout à faire des applications, quelle que soit la nature de l'objet que nous étudions" (11).

Les deux premiers auteurs, disciples de D'Alembert, ont fait de l'étude des probabilités qu'ils placent si haut une part importante de leur oeuvre. Pour d'Alembert, au contraire, les probabilités sont une discipline secondaire à laquelle il n'a consacré que peu d'efforts. La différence ne vient pas seulement des progrès de cette branche des mathématiques et de la naissance des sciences sociales qui sont survenus en l'espace d'une génération. Car, à l'époque de D'Alembert, les probabilités étaient déjà pourvues d'un statut fort honorable, à la suite des recherches, après les fondateurs déjà cités, de Jacques Bernoulli, de Thomas Bayes (ce dernier ne fut lu sur le continent que tard ; d'Alembert le cite en 1780, et Laplace lui rend son dû dans la "Notice historique" qui clôt son *Essai philosophique sur les probabilités*). Les premières contributions significatives de Lagrange et de Laplace (sur le calcul de moyennes de résultats d'observations) sont trop tardives pour être prises en compte de manière significative en relation aux considérations proposées par D'Alembert (12), sinon, comme on le verra, dans ses dernières remarques de 1780. Peut-être eussent-elles été plus propres à le convaincre que les domaines d'application dominants en son temps, car elles permettaient d'asseoir sur une base observationnelle plus sûre la théorie par éminence la plus proche de la certitude selon lui, l'astronomie physique (13).

1.4 CONTEMPORAINS ET DISCIPLES.

Que le chapitre des probabilités soit la partie faible, voire sans importance, de l'œuvre de d'Alembert, c'est ce dont plusieurs de ses contemporains étaient persuadés, encore que peu de savants se soient publiquement elevés contre ses objections. La position de notre auteur allait à contre-courant des conceptions généralement admises et remettait en cause non seulement les applications mais la théorie elle-même. C'est sans aménité que Daniel Bernoulli le renvoyait à l'étude du Calcul. La *Correspondance littéraire* de Grimm, à laquelle Diderot collabora, ne se faisait pas faute de donner de ses mémoires sur le sujet, lors de leur parution, les commentaires les plus défavorables. Diderot lui-même, qui s'intéressait bien davantage aux problèmes des sciences de la vie et à ceux de la société qu'aux sciences physico-mathématique exactes, lesquelles avaient à ses yeux donné tout ce qu'elles avaient à donner et devaient désormais laisser la place, et qui réclamait ainsi pour la science de nouvelles normes épistémologiques, manifestait un intérêt fort vif pour le calcul des chances : il confia à la *Correspondance littéraire*, en 1761, un compte-rendu très vif des thèses de d'Alembert, et enleva à ce dernier l'article "Probabilité" de l'*Encyclopédie* (celui qui fut publié dans le volume 13, paru en 1765, lui a souvent été attribué mais sa paternité est incertaine). La divergence de vues entre d'Alembert et Diderot sur le statut des sciences et l'intérêt des mathématiques se prolongeait naturellement dans une appréciation divergente de l'analyse des hasards et de l'importance des conjectures.

Condorcet et Laplace, ses disciples, ont eux-mêmes donné une appréciation critique de la pensée de d'Alembert au sujet des probabilités. Bien que formulée de manière nuancée (17), la critique de Condorcet, dans son "Eloge de d'Alembert" présenté devant l'Académie française un an après la mort du Géomètre, est nette : Condorcet reproche à d'Alembert une certaine étroitesse de pensée qui lui a fait négliger l'importance de la connaissance du probable en ne prenant en compte que les sciences de la certitude, c'est-à-dire physico-mathématiques.

Quant à Laplace, qui se pencha sur les probabilités dès 1772, à l'âge de 23 ans (18), et leur consacra trois mémoires entre 1772 et 1774 (19), dont le fameux "Mémoire sur les probabilités des causes par les événements" (20), il se détacha visiblement très tôt de l'influence de d'Alembert sur cette matière. Le texte qui devait vraisemblablement servir d'introduction à ce dernier mémoire fondamental, paru indépendamment (21), est une manière de justification de l'importance des probabilités dans une perspective "déterministe" (bien que le terme soit anachronique, il désigne ici ce newtonianisme sans faille des lois de la mécanique appliquées aux corps matériels que l'on désignera ensuite comme le "déterminisme laplacien"). Or il contient une référence aux "objections très fines de d'Alembert" qui, sous l'attitude déférente qui justifie ces objections en soulignant les confusions de nombreux auteurs (notamment entre l'espérance mathématique et l'espérance morale), revient en réalité à les critiquer implicitement, en les réfutant sur le sujet de l'équipossibilité (la question de "l'inégale pente"), sur celui des possibilités mathématique et physique, et de l'indépendance des coups consécutifs au jeu de dés ou de croix ou pile. Il convient toutefois de remarquer que les conceptions critiques de d'Alembert sur la théorie des probabilités ont eu une influence immédiate aussi bien sur Condorcet que sur Laplace, et même à un certain degré sur Lagrange, comme nous le verrons dans la suite.

1.5 LA POSTERITE.

Quant aux commentateurs ultérieurs, ils affirment pour la plupart sans ambages que les conceptions de d'Alembert sur les probabilités sont dénuées d'intérêt et tout simplement fausses (23). Certaines opinions sont malgré tout plus nuancées. Dans ses cours sur l'histoire de la statistique aux XVII^{e} et XVIII^{e} siècle publiés seulement récemment, Karl Pearson, tout en estimant que "d'Alembert n'a contribué absolument en rien" à la théorie mathématique des probabilités, considère que l'on peut toutefois "trouver bien des choses à apprendre de d'Alembert" sur le sujet, car les chausse-trappes dans lesquelles un mathématicien de cette envergure a pu tomber ne peuvent que nous inviter à aiguïser notre clairvoyance sur une matière difficile comme celle-ci. Pour sa part, Pearson voit la leçon principale des erreurs de d'Alembert dans la nécessité, qu'il souligne avec force, d'expérimenter pour tester la validité des propositions de la théorie (24). Il ressort d'autres travaux plus récents que la position de d'Alembert sur les probabilités présente un intérêt philosophique tant sur l'état de la théorie elle-même et le statut de ses applications que relativement à la structure propre de sa pensée (25).

1.6 ESSAI D'EVALUATION.

Même dans l'hypothèse où les considérations de d'Alembert sur les probabilités et leurs applications ne seraient qu'erronées, elles présenteraient pour l'histoire des sciences et l'épistémologie l'intérêt de tout "obstacle épistémologique", fût-il réel ou seulement subjectif. Or, la polémique contemporaine, aussi bien que les jugments de la postérité effectués quand les obstacles ont été franchis, sont en général réducteurs. Peut-être d'Alembert n'a-t-il, tout compte fait, "pas compris" les probabilités ; mais, même dans ce cas, les raisons de cette incompréhension méritent d'être étudiées, surtout pour un penseur de cette stature ; et nous verrons qu'elles méritent mieux qu'une simple caricature. Nous nous proposons donc de reprendre les interventions de d'Alembert sur le sujet, en les exposant tout d'abord selon l'ordre chronologique de leur composition ; nous y verrons une pensée soucieuse de rigueur aux prises avec un objet que l'approche scientifique n'a pas encore réussi à cerner avec la clarté conceptuelle désirable, et qui met le doigt sur des difficultés réelles, certes à sa manière et avec les présupposés qui lui sont propres. Puis nous reprendrons certains aspects thématiques relatifs tant à la théorie des probabilités elle-même qu'à certaines de ses applications, en les soumettant à une analyse épistémologique, susceptible précisément de mettre en lumière les aspects problématiques soulevés - à tort ou à raison - par d'Alembert.

2. LES PROBABILITES ET LEURS APPLICATIONS, EXAMENS CRITIQUES, REPRISES ET DEVELOPPEMENT (HISTOIRE DES INTERVENTIONS DE D'ALEMBERT SUR LE SUJET).

2.1 PREMIERES REACTIONS.

Etant donné ce que l'on sait de la formation de d'Alembert, de sa fringale juvénile d'ouvrages de mathématiques, de son excellente connaissance des classiques qui l'ont précédé (29), il est très vraisemblable de penser qu"il a connu très tôt les considérations de mathématiciens sur le calcul des probabilités, et sans doute directement celles de Pascal et de Fermat.

On sait en tout cas avec certitude qu'il a lu l'*Ars conjectandi* de Jacques Bernoulli ainsi que l'Analyse des jeux de hasard de Montmort auxquels il se réfère, notamment, à l'article "Combinaison" de l'*Encyclopédie,* dans lequel il donne un exposé objectif et clair de la théorie des combinaisons "sur laquelle roule toute la science des probabilités" (30). Il est même possible de dater approximativement ces lectures, du moins la première, d'après son propre témoignage. Dans le 27ème mémoire des *Opuscules mathématiques* (tome 4, paru en 1768), d'Alembert laisse à entendre qu'il avait lu l'*Ars conjectandi* dès ses premiers pas dans l'étude des mathématiques - quand il avait une vingtaine d'années - et que, dès cette époque, les aspects insatisfaisants de la manière de traiter les problèmes de probabilités lui étaient apparus. "Il y a près de trente ans", écrit-il à propos du problème de Saint-Petersbourg, "que j'avais formé ces doutes en lisant l'excellent livre de M. Bernoulli *De Arte conjectandi*; il me semblait que cette matière avait besoin d'être traitée d'une manière plus claire". Et d'évoquer, parmi ces premiers doutes, celui sur l'espérance : "je voyais bien que l'espérance était d'autant plus grande ; 1° que la somme espérée était plus grande ; 2° que la probabilité de gagner l'était aussi. Mais je ne voyais pas alors avec la même évidence, et je ne le vois pas encore, 1° que la probabilité soit estimée exactement par les méthodes usitées ; 2° que quand elle le serait, l'espérance doive être proportionnelle à cette probabilité simple, plutôt qu'à une puissance ou même à une fonction de cette probabilité ; 3° que quand il y aurait plusieurs combinaisons qui donnent différents avantages ou différents risques (qu'on regarde comme des avantages négatifs) il faille se contenter d'ajouter finalement ensemble toutes les espérances pour avoir l'espérance totale" (31).

2.2 LES ARTICLES "ABSENT" ET "CROIX OU PILE".

C'est dans les premiers articles sur le sujet publiés dans l'*Encyclopédie* que d'Alembert expose publiquement ses doutes. Si les articles "Alternation", Avantage", "Bassette", "(Franc-)Carreau", "Combinaison", "Dé", puis "Loterie" (32), se contentent de simplement décrire, voire d'illustrer, la signification des termes ou des règles des jeux, "Absent", puis "Croix ou pile" et, plus tard, "Gageure" et "Pari" font mention d'objections aux règles ordinaires. Ces règles reçues reposent sur l'identification des probabilités d'occurrence d'événements à des dénombrements de combinaisons. Ces derniers sont évidemment sans problème pour d'Alembert, qui les décrit avec détails aux articles "Alternation" (c'est-à-dire permutation), "Combinaison" et "Dé".

Une première réserve apparaît à l'article "Absent" (33), paru en 1751, mais plutôt que sur le calcul des probabilités lui-même, elle porte sur le problème de la certitude morale, mettant en évidence la difficulté de choisir une valeur précise de probabilité pour l'exprimer et en tirer une règle de conduite. Le problème de savoir à partir de quel moment "un absent doit être réputé pour mort" avait été traité par Jacques Bernoulli dans le troisième chapitre de l'*Ars conjectandi*, relatif à "l'application du calcul des probabilités aux matières de jurisprudence" (*Ars conjectandi in jure*) ; Bernoulli estimait que ce devrait être quand "il y a deux fois plus à parier qu'il est mort que vivant ". Exposant le calcul d'espérance de vie effectué par Bernoulli, d'Alembert émet une double réserve qui touche d'une part au calcul, d'autre part à la définition de l'espérance. "Mais je crois notre calcul trop fort en cette occasion à un certain égard", écrit-il (il s'agit du choix d'une table de mortalité de rentiers, catégorie privilégiée), "et trop faible à une autre" : ce dernier égard, c'est le choix d'un deux à parier contre un pour édicter une décision ; car il faudrait savoir que sa mort est certaine pour s'autoriser à disposer des biens d'une personne. Il apparaît ici que d'Alembert situe ses restrictions - qui ne sont pas encore vraiment une objection au calcul - sur le terrain même où se jouent les raisonnements sur les applications sociales des probabilités. Il n'en nie pas le principe - il ne le niera jamais, mais objectera sur les degrés de l'utilisation -, et propose seulement d'améliorer les conditions d'application : d'une part en déterminant de meilleures tables - et, plus tard, à propos de l'inoculation, ce sera encore un de ses soucis principaux (34) -, d'autre part en discutant du rapport entre la probabilité et le choix ou la décision (35). A ce dernier sujet, il indique que "la solution de ce problème suppose une autre théorie sur la probabilité morale des événements que celle qu'on a suivie jusqu'à présent" : c'est, implicitement, une critique de l'espérance en tant qu'elle déterminerait la décision (35 bis).

Mais, si l'article "Probabilité" (qui ne paraîtra jamais de sa plume) est ici annoncé par l'auteur comme devant préciser ses réserves, il se contente pour l'instant de mentionner l'idée de Buffon, selon laquelle une sorte de certitude peut être acquise lorsqu'une faible probabilité est compensée par un grand nombre de cas (idée qui apporterait en même temps une solution au problème de Saint-Petersbourg, remarque d'Alembert qui, cependant, dès l'article "Croix ou pile" ne va plus s'en satisfaire).

L'article "Croix ou pile", paru dans le volume 4, en 1754 (36), est essentiellement consacré à l'examen des difficultés conceptuelles sur la théorie des probabilités en matière de jeux, dans un style qui correspond parfaitement à l'esprit de l'*Encyclopédie* où l'aspect philosophique de la question abordée prime sur la simple description ou sur l'érudition. D'Alembert l'exprime d'ailleurs clairement d'emblée, indiquant, dès le titre "Croix ou pile (analyse des hasards)", et dès les premières lignes, que telle est son intention : ce qui l'intéresse dans ce jeu, c'est la possibilité qu'il offre de s'interroger philosophiquement sur le sujet plus général de l'analyse des hasards ou théorie des probabilités.

Cet examen lui est l'occasion de soulever deux problèmes, celui de l'identification de la probabilité au nombre de combinaisons, et celui de la méthode de calcul de l'espérance, sur lesquels il ne cessera par la suite de revenir, leur ajoutant d'autres considérations tout aussi fondamentales. Ces deux problèmes touchent au caractère de la théorie des probabilités elle-même ainsi qu'à la considération des circonstances particulières de son application. On peut voir toutes les considérations ultérieures de d'Alembert sur les probabilités, que ce soit à propos des jeux ou des applications sociales, comme des développements à partir d'eux. C'est pourquoi il est opportun de les décrire ici au moins sommairement.

La solution donnée au jeu de croix ou pile (il s'agit d'amener croix en deux coups consécutifs) est, "d'après tous les auteurs, et suivant les principes ordinaires", qu'il y a à parier à 3 contre 1, puisqu'il y a 3 combinaisons sur 4 qui amènent au moins une fois croix. Dans le cas de trois coups, il y aurait 7 contre 1, et ainsi de suite : c'est la théorie des combinaisons (exposée comme telle par d'Alembert à cet article, auquel renvoie "Croix ou pile"). Or c'est sur cette conception même que d'Alembert s'interroge : "cependant, cela est-il bien exact ?" Il lui semble qu'il n'y a en réalité que trois cas à prendre en considération : C, arrivant au premier coup, qui termine le jeu ; PC, en deux coups, qui fait gagner, et PP, qui fait perdre. "Ne faut-il pas réduire à une les deux combinaisons qui donnent *Croix* au premier coup ?" demande-t-il (c'est-à-dire CP et CC, qui ne sont jamais joués) ; "car dès qu'une fois croix est venue, le jeu est fini et le second coup est compté pour rien. Ainsi il n'y a proprement que trois combinaisons de possibles. Donc il n'y a que 2 contre 1 à parier", et, pour trois coups, 3 contre 1, pour des raisons analogues. Et d'Alembert de conclure sur ce point : "ceci est digne, ce me semble, de l'attention des calculateurs, et irait à réformer bien des règles unanimement reçues sur les jeux de hasard". Remarquons, avant de revenir plus loin sur la règle proposée par d'Alembert, qu'il s'agit d'une interprétation particulière de la règle du jeu, et que la théorie (mathématique) des combinaisons n'est aucunement affectée par son objection ; il s'agit d'un problème d'application à un jeu déterminé par des règles. Ce qu'il conteste, c'est la transcription de la règle des combinaisons telle qu'on l'effectue couramment. C'est, certes, une critique de la théorie des probabilités, mais en tant qu'elle est appliquée à un problème pratique. La critique porte sur l'explicitation commune de la règle.

Le deuxième problème abordé dans l'article, également relatif au jeu de croix ou pile, est celui, fort célèbre, de Saint-Petersbourg (37), lequel présente une situation paradoxale, objet des préoccupations de bien des mathématiciens qui en ont depuis lors proposé des solutions variées, mais dont aucune n'apparaît, aux yeux de d'Alembert, réellement satisfaisante. Pierre joue à croix ou pile contre Paul et il s'agit de déterminer quel enjeu doit mettre ce dernier, étant donné la règle du jeu suivante : si Pierre amène croix au premier coup, il paie 1 écu à Paul ; si ce n'est qu'au deuxième coup, 2 écus; au troisième, 4 écus, et ainsi de suite. Les règles ordinaires donnent l'espérance de Paul, qui est ce qu'il doit mettre au jeu : $1/2 + 2/2^2 + 4/2^3 + \ldots + 2^{n-1}/2^n + \ldots = n/2$, qui va à l'infini.
"Cependant", commente d'Alembert, "il n'y a personne qui voulût mettre à ce jeu une somme un peu considérable". Dans l'absence de solution satisfaisante, il voit dans ce problème "quelque scandale qui mérite bien d'occuper les algébristes". Pour sa part, d'Alembert s'en tient, dans l'article, à remarquer que la raison du paradoxe n'est pas dans un défaut de la théorie des probabilités, en tant que méthode de calcul, puisque la condition de l'égalité de l'espérance de Paul et du risque de Pierre est respectée (soit que, en un nombre infini de coups, les deux aillent à l'infini, soit que l'on s'en tienne à un nombre fini de coups) (38). Elle

réside dans le caractère insuffisant et irréaliste de la définition de la règle du jeu : outre que celle-ci laisse indéfini le nombre des coups (39), il faudrait tenir compte du bien fini des joueurs, et de leur jugement sur le caractère raisonnable ou non du jeu (40), qui dépend de considérations subjectives (fortune relative des joueurs, etc...), ou, selon les termes de d'Alembert, de "considérations morales, relatives, soit à la fortune des joueurs, soit à leur état, soit à leur situation, soit à leur force même (quand il s'agit des jeux de commerce), et ainsi du reste". Mais, de telles considérations sont "presque impossibles à soumettre au calcul" : "à cause de la diversité des circonstances, on est obligé d'en faire abstraction, et de résoudre les problèmes mathématiquement, en supposant d'ailleurs les circonstances morales parfaitement égales de part et d'autre, ou en les négligeant totalement. Ce sont ensuite ces circonstances, quand on vient à y faire attention, qui font croire le calcul en faute, quoiqu'il n'y soit pas" .

2.3 Objections aux premiers doutes de d'Alembert.

On imagine comment fut reçue, par les partisans de la doctrine commune des probabilités, l'interprétation de d'Alembert qui allait à contre-courant de ce qui apparaissait déjà à certains savants - et au public cultivé - comme l'une des branches les plus prometteuses des mathématiques, susceptible d'importantes applications notamment dans le domaine social. Toutefois, il y eut peu de critiques ouvertes dans le milieu scientifique proprement dit, sans doute parce que d'Alembert figurait comme une autorité. Le seul mathématicien dont on ait rapporté l'attitude hostile est Daniel Bernoulli, qui trouva "ridicules" les objections de d'Alembert (41). Ce sont les correspondances entre savants qui laissent le mieux voir les réactions hostiles ou mitigées de ce milieu. Certains lui écrivirent directement ; c'est ainsi qu'à l'article "Gageure", paru en 1757, dans le volume 7 de l'*Encyclopédie*, d'Alembert fait état d'une correspondance de M. Necker le fils, de Genève, dans laquelle ce dernier critique son objection à la doctrine commune. Beau joueur, d'Alembert consacre la quasi totalité de l'article à reproduire, en le citant intégralement, l'argument de Necker, significatif à ses yeux de la réaction rencontrée par ses considérations. Sa position n'est pas dogmatique et il accepte la divergence d'opinion. "Cet article", écrit-il au début de "Gageure", "nous fournit une occasion que nous cherchions d'insérer ici de très bonne objections qui nous ont été faites sur ce que nous avons dit au mot "Croix ou pile"...". Pour Necker fils, la manière de compter de d'Alembert suppose qu'il a énuméré tous les cas possibles (C, CP et PP), ce en quoi il est d'accord, et que tous ces cas sont également possibles ("aeque proclives" comme dirait Bernoulli), ce en quoi il objecte, montrant que la probabilité de croix est double de celle de PC et PP. D'Alembert ne reprend pas sa propre argumentation, mais se contente de déclarer que "ces objections (...) mériteront sans doute beaucoup d'attention", tout en soulignant qu'il ne comprend pas, pour sa part, pourquoi l'avantage serait triple alors qu'il n'y a que deux coups favorables. Pour lui, la réponse de Necker est une position possible, la sienne en est une autre - elle lui semble évidemment plus naturelle -, et il reviendra plus tard sur cette variété possible de choix des chances, laissant le problème ouvert (42). C'est bien cette indécidabilité qu'il conclut de la diversité d'opinions et elle lui paraît mettre en défaut la règle (univoque, rigide) du calcul ordinaire : "et l'on conviendra du moins", écrit-il à la fin de l'article "Gageure", "que la méthode ordinaire par laquelle on estime les probabilités dans ces sortes de jeu, est très-fautive, quand bien même on prétendrait que le résultat de cette méthode serait exact".

Parmi les philosophes et encyclopédistes, les objections de d'Alembert à la doctrine courante des probabilités furent diversement reçues mais l'hostilité fut probablement dominante. Diderot lui-même dut réagir d'autant plus violemment que les hérésies de d'Alembert parurent d'abord dans l'*Encyclopédie*. Ce n'est qu'en 1761 qu'il écrira sa réfutation très polémique des thèses de d'Alembert, après la publication par celui-ci de ses deux mémoires des *Opuscules mathématiques* dont nous allons reparler. Ce texte (43), dont l'audience ne dépassa pas les quelques abonnés princiers de la *Correspondance littéraire* de Grimm, et qui ne fut peut-être pas connu de d'Alembert lui-même, rappelle l'article "Croix ou pile" et justifie contre la proposition alternative de d'Alembert la solution admise : ce rappel témoigne pour une réaction immédiate à la publication de l'article. Après la grande crise de l'*Encyclopédie* survenue en 1759, qui détermina l'arrêt de la publication de l'ouvrage, et fut l'occasion d'une rupture entre les deux amis, les articles "Jeu" et "Probabilité" furent confiés à d'autres (44), la contribution de d'Alembert en étant soit retirée, soit supprimée (45). A cette époque, Diderot et d'Alembert n'étaient pas séparés que sur le chapitre des probabilités (et de l'inoculation) ; ils l'étaient par des divergences fondamentales, théoriques sur le rôle des mathématiques dans les sciences, et stratégiques sur la politique à conduire dans l'œuvre et le combat encyclopédiques.

Il est en tout cas significatif que d'Alembert, dans un de ses textes postérieurs sur les probabilités, évoque avec insistance l'écho que ses objections ont rencontré chez l'auteur de l'article "Fatalité" de l'*Encyclopédie*, lequel n'était autre que l'abbé Morellet, marquant par là combien il devait lui tenir à cœur que sa position ne fût pas isolée parmi les encyclopédistes (46).

2.4 TROIS ETAPES OU GROUPES DE PUBLICATIONS.

Il est possible de distinguer trois étapes dans les interventions de d'Alembert sur les probabilités et leurs applications. La première est marquée par les articles de l'*Enclyclopédie* que nous venons d'évoquer, et constitue comme une approche préliminaire ou un galop d'essai : d'Alembert ne s'avance encore qu'avec prudence sur un terrain où il ne se sent pas à l'aise. Le tournant des années 1760 le voit s'enhardir, et présenter d'une manière plus systématique des "Réflexions sur le calcul des probabilités", reprenant les doutes exprimés à propos des applications aux jeux de hasard et les prolongeant en une critique décidée, qui voit l'introduction de nouveaux éléments, et qui correspond à un examen plus systématique et fondamental des présupposés du calcul tel qu'on le considère communément (47). Ces réflexions sur la théorie sont accompagnées d'une analyse nouvelle, "Sur l'application du calcul des probabilités à l'inoculation de la petite vérole", communiquée en novembre 1760 à l'Académie des sciences (48), et qui se présente comme une intervention dans un débat alors vif sur un cas d'application sociale de la théorie mathématique des probabilités : c'est une contribution à l'étude des conditions d'application du calcul, et elle se trouve être à quelque égard, par là-même, relative aux fondements conceptuels de ce calcul. Ces deux interventions sont pour cela inséparables et s'accompagnent en doublet, telles qu'elles furent d'abord publiées dans le deuxième volume des *Opuscules mathématiques* en 1761, respectivement comme dixième et onzième Mémoires. Les arguments en seront repris ultérieurement dans de nouvelles publications de leur auteur, et une version définitive refondue, présentée encore en doublet, en sera donnée dans le cinquième volume des *Mélanges*, paru en 1767. Les "Réflexions sur le calcul des probabilités" deviendront, reprises d'une manière plus systématique et comme un exposé philosophique, des "Doutes et questions" sur ce même calcul (49), qui pourraient être - mais plus tardivement composée - la version de d'Alembert de l'article "Probabilité". Le texte sur l'inoculation sera repris et augmenté de façon substantielle par des ajouts successifs jusqu'aux "Réflexions sur l'inoculation" parues dans les *Mélanges* (50). Les deux séries de textes, sur les probabilités et sur l'inoculation, toujours allant de pair, sont comme les deux volets d'une même question fondamentale sur le calcul des probabilités et sur ses applications à des phénomènes réels, physiques ou sociaux. On ne peut les séparer totalement dans l'analyse, dans la mesure où les considérations sur les calculs des risques en matière d'inoculation de la petite vérole sont tributaires de la conception que l'on se fait des probabilités, conception qu'elles contribuent par ailleurs à éclairer, ainsi que de l'acception de l'espérance et de la notion de risque.

De l'un à l'autre de ces deux doublets, de 1761 à 1767, se développe la seconde période ou étape de la pensée de d'Alembert sur les probabilités. On ne peut s'empêcher de penser qu'elle s'affirme, certes, à l'occasion d'un débat très général et d'une importance aiguë (marqué notamment par les applications sociales de la doctrine probabiliste), mais plus précisément en réaction et polémique contre l'un des maîtres de la théorie des hasards et de ses applications, Daniel Bernoulli, auquel d'autres controverses sur des chapitres de physique avaient déjà opposé d'Alembert. Ce dernier avait été mortifié du jugement peu amène du géomètre de Bâle sur ses propositions alternatives à propos du jeu de Croix ou pile ; or Daniel Bernoulli venait de présenter, au début de l'année 1760, un mémoire à l'Académie des sciences de Paris bien susceptible de le faire considérer comme l'un des principaux théoriciens des probabilités et de leurs applications. Ce mémoire s'intitulait "Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et les avantages de l'inoculation pour la prévenir "(51), et venait à un moment où la cause de l'inoculation, ranimée par l'action de La Condamine (52), et qui suscitait depuis quelques années un vif débat, en France et ailleurs, prenait les armes des mathématiques elles-mêmes. L'occasion dut être tentante pour d'Alembert de donner, sur ce terrain aussi, une leçon de rigueur mathématique et de rationalité à son concurrent qu'animait un souci plus empiriste. Les deux séries de mémoires sont marquées au coin de l'esprit polémique contre les assurances trop affirmées en matière de probabilités, contre l'utilisation précipitée du calcul dans les affaires humaines, et Daniel Bernoulli y est fréquemment désigné comme cible principale.

La troisième et dernière étape des publications de d'Alembert, après cette série cohérente qui le voit affiner et compléter ses arguments dans le feu du vif débat sur les probabilités et sur l'inoculation, débute dès 1768, avec une reprise d'arguments dans le quatrième tome des *Opuscules mathématiques* où probabilités et inoculation s'accompagnent toujours (53), pour prendre fin vers 1780, date de parution des volumes 7 et 8 des mêmes *Opuscules mathématiques* où d'Alembert aborde derechef le problème des probabilités (volume 7) et s'attache à celui des annuités (volume 8). Cette période ne s'achève à vrai dire qu'avec la mort de d'Alembert, puisque nous voyons, aux manuscrits composés pour le volume 9 des *Opuscules*, que les probabilités et leur applications le préoccupent encore dans ses derniers écrits.

Cette périodisation n'est que commode, et correspond davantage à un essai de cerner le rythme et la nature des publications de d'Alembert qu'à une véritable différence dans l'argumentation, bien qu'une telle différence puisse être décelée entre les deux premières périodes, et, quant à la dernière, pour l'essentiel dans les textes à partir de 1780. Après les premiers doutes vient la mise au point sur l'ensemble des problèmes qui incluent les probabilités (mise au point reprise et affinée), puis une dernière série d'écrits qui sont autant de retouches, surtout de détails, mais importantes malgré tout sur certains points. Les considérations de 1768, parues dans le tome 4 des *Opuscules mathématiques*, que nous avons rattachées pour la commodité au dernier groupe de textes, ont été écrites en réalité en même temps qu'était composée la présentation définitive des textes du volume 5 des *Mélanges* parus en 1767 (55). Mais nous avons préféré les séparer de ces derniers, qui sont simplement supposés parfaire les textes de 1760-1761, avec lesquels ils forment un bloc cohérent. Nous avons distingué ainsi davantage des groupes de textes que des périodes à strictement parler. Il nous reste, dans cette première présentation suivant l'ordre chronologique, à examiner les deux derniers.

2.5 DES "REFLEXIONS SUR LE CALCUL DES PROBABILITES" DE 1760 AUX "DOUTES ET QUESTIONS" DE 1767.

Le texte de 1761 propose, sous la forme d'un ensemble de 27 articles ou paragraphes, un certain nombre de remarques, essentiellement critiques, sur la théorie des probabilités telle qu'elle est couramment appliquée aux jeux de hasard. Cette fois, l'accent est mis en premier lieu sur le problème de l'espérance, dont, après en avoir exposé la règle communément reçue, d'Alembert annonce qu'elle est en défaut dans plusieurs cas, et qu'il va le démontrer. C'est évidemment le paradoxe de Saint-Petersbourg qui lui sert d'exemple privilégié : l'espérance est infinie. Etudiant les diverses théories proposées, notamment celle sur un temps de jeu fini, d'Alembert évoque l'*équipossibilité* des combinaisons, qui appartient à la théorie ordinaire des probabilités, et suggère qu'elle est peut-être en défaut, avec d'autres hypothèses du calcul : "si l'on attaque cette supposition" (contraire à l'idée que *Croix* doive "arriver nécessairement après un nombre fini de coups"), "il faudra nécessairement réformer, à plusieurs autres égards, l'analyse des probabilités" (56).

Vient ensuite l'argument sur l'inégalité des chances qui rend la solution insatisfaisante, même avec un nombre de coups fini : pour un jeu en cent coups, la mise sera de 50 écus, mais la somme ne sera rattrapée que si *Croix* ne vient qu'au septième coup, ce qui ne correspond qu'à une chance sur 127 (que *Croix* arrive avant) (57). D'où une mise en cause de la signification de l'espérance calculée de cette façon, et une considération sur les petites valeurs de probabilités qui doivent être traitées comme si elles étaient nulles : "que conclure de ces réflexions ? C'est que, quand la probabilité d'un évènement est fort petite, elle doit être regardée et traitée comme nulle ; et qu'il ne faut point multiplier (comme on l'a prescrit jusqu'à présent) cette probabilité par le gain espéré, pour avoir l'enjeu ou l'espérance" (58).

Affirmant la relative improbabilité de séquences répétées, d'Alembert effectue à ce propos une distinction entre "ce qui est *métaphysiquement* possible et ce qui est possible *physiquement*", qui servira de point de vue liminaire à la reprise de ses réflexions de 1767, et qui le justifie dans sa critique de l'équipossibilité des suites d'événements. Cette critique apparaît en fait comme un des éléments les plus importants de ses conceptions. Elle intervient à deux égards : à propos de l'hypothèse de l'indépendance des événements consécutifs, que d'Alembert conteste en demandant "si le nombre de fois que *croix* est déjà arrivé de suite (...) ne rend pas plus probable l'arrivée de *pile* au coup suivant" (59) ; et, à propos de l'équiprobabilité des combinaisons : une combinaison dans laquelle un même événement est répété (CCCC...) ne lui paraît pas aussi probable qu'une combinaison particulière où les événements sont mélangés. D'Alembert met en doute l'équiprobabilité des séries pour la raison "que la variété des événements successifs est un phénomène constant de la nature ; et que leur similitude constante ou répétée un grand nombre de fois, est au contraire un phénomène qui n'arrivera jamais" (60). (Les deux considérations sont évidemment liées ; elles constituent deux points de vue sur un même état de chose).

Reprenant le premier problème de l'article "Croix ou pile", celui du jeu en deux coups, d'Alembert s'efforce de montrer que la solution commune (trois contre un à parier) est un paralogisme, car l'on combine des probabilités de nature différente, celle du premier coup et celle du second coup. C'est, par la répugance à accepter sans discussion des probabilités conditionnelles, une explicitation de la critique de l'identification de la probabilité au nombre relatif de combinaisons. Certes, dit-il en substance, étant donné un jet de pièces, la probabilité de *croix* ou de *pile* est 1/2. Mais, pour deux jets, il n'est pas évident que l'on soit en droit de combiner la probabilité du premier coup et celle du second, car c'est combiner une incertitude (celle qui marque la probabilité du premier coup avant sa réalisation, 1/2) avec un certitude (au deuxième coup, la possibilité du premier coup est réalisée, on a la certitude d'avoir eu P au premier puisqu'il a fallu re-jouer). Multiplier la probabilité du second coup par celle du premier, "n'est-ce pas regarder à la fois ce second coup comme devant avoir lieu et comme étant néanmoins simplement probable ? Ce qui me paraît impliquer contradiction". C'est, à ses yeux, "multiplier l'une par l'autre deux probabilités de différente nature, une probabilité (savoir le première) qui reste toujours = 1/2, et une probabilité (savoir la seconde) qui ne reste pas toujours 1/2, mais qui devient certitude dès qu'on la multiplie par la première". La composition des deux probabilités successives fait changer la seconde "de nature et la suppose *certaine*, de simplement probable qu'elle était auparavant" (61).

C'est contre l'idée qu'une probabilité serait neutre, mathématiquement transparente, que d'Alembert réagit : une probabilité, pour se rapporter à un événement physique, possède une marque, celle de l'histoire de cet événement, celle de son objet (physique). Et la combinaison de probabilités hétérogènes est illicite.

Mais , dans l'expression de son objection, d'Alembert se garde de donner l'impression de disposer d'une solution. D'ailleurs, s'il conclut ses "Réflexions" en soulignant les problèmes que devrait à ses yeux résoudre une théorie satisfaisante des probabilités, c'est en indiquant qu'ils sont peut-être insolubles. Ces problèmes sont les suivants : "assigner le vrai rapport des probabilités dans les cas qui ne sont pas également possibles, ou qui peuvent n'être pas regardés comme tels" ; "déterminer quand la probabilité doit être regardée comme nulle" ; "fixer enfin comment on doit estimer l'espérance ou l'enjeu, selon que sa probabilité est plus ou moins grande". (62)

Diderot

L'une des réactions les plus vives au mémoire de d'Alembert fut assurément celle de Diderot, significative par la nature de son argumentation, sinon par sa portée, puisqu'elle ne fut pas publique (63), et bien que son pamphlet soit d'écriture hâtive et peu soignée. Dans ce texte, de 1761, Diderot résume en langue ordinaire les deux mémoires des *Opuscules mathématiques* (64) et, sur chacun des points où d'Alembert voit une difficulté ou une objection, il réfute l'argument, parfois sous la forme d'un dialogue imaginaire dans lequel d'Alembert est mis en contradiction avec lui-même ou avec le sens commun. C'est ainsi que Diderot rejette les arguments sur le comptage de croix ou pile en deux coups, les réticences à composer les probabilités, la distinction du certain et du probable qu'il considère comme illogique, les critiques sur l'estimation des mises ou l'espérance ; il accuse d'Alembert de refuser la simple conséquence des prémisses du calcul des probabilités qui sont la définition même de ces dernières comme rapports de combinaisons. Il récuse en particulier ses doutes sur l'équiprobabilité, tout en admettant "qu'il n'y a et qu'il ne peut y avoir aucun jeu où des causes physiques n'introduisent une inégalité secrète inappréciable", mais en considérant que cette inégalité se compense de ce que "l'effet des causes physiques change perpétuellement". Diderot conteste évidemment l'annulation des faibles probabilités, la dépendance des probabilités de coups consécutifs, reprochant à d'Alembert de donner une critique seulement négative sans proposer de solutions (d'Alembert n'a pas de réponse sur la valeur de la probabilité dans les cas qu'il soulève), et le taxe d'inconséquence (64 bis). Il lui paraît qu'en laissant indéterminées les probabilités ainsi critiquées (terme à partir duquel la probabilité devient nulle, variation de la loi de probabilité, etc...), d'Alembert les laisse à la détermination de l'expérience, et renvoie ainsi l'exactitude dans le calcul des probabilités à un futur hors d'atteinte (64 ter). Mais, voulant montrer le peu de fondement de ces objections, Diderot ne fait que reprendre sans recul les règles *reçues*, et sa réfutation ne dépasse pas la simple paraphrase de ces règles ; en regard de l'examen critique de d'Alembert - fût-il ou non convaincant -, il propose des opinions davantage que des réflexions, et le contraste est flagrant entre le décousu et le caractère confus de son texte et la clarté et l'appel à la rigueur de celui de d'Alembert.

Mais, à vrai dire, sous ces divergences se tient une différence fondamentale de conceptions sur la connaissance, notamment pour ce qui est du rôle des mathématiques dans l'approche des phénomènes naturels. Au lieu de distinguer, comme le fait d'Alembert, à propos des probabilités, ce qui relève du caractère physique (entendu comme appartenant aux phénomènes de la nature (64-4)), et ce qui relève des mathématiques, Diderot fait un départ entre les probabilités vues comme une "science *abstraite*" et comme une "science *physico-mathématique*". Sous le second aspect, la science des probabilités "est une science restreinte à des petits moyens, à une expérience d'un moment, un être qui passe comme l'éclair et qui rapporte tout à sa durée" ; entendons qu'elle est bornée par les limites étroites de l'expérience humaine sur des durées finies (conception empiriste qui s'oppose évidemment au rationalisme de d'Alembert). Sous le premier aspect, elle se met à la place d'un entendement divin qui pourrait considérer sans limitation toutes les possibilités. Tel est à ses yeux le sens des mathématiques, ou elles ne sont rien : c'est une science idéale, et générale. Diderot n'a que faire de considérations particulières d'application des mathématiques à des situations physiques, et sa conception de la science met en valeur l'analogie et le qualitatif bien plutôt que les élaborations de concepts précis et mathématisés dont se préoccupait d'Alembert. C'est sans s'embarrasser de nuances qu'il ajoute : "Toute la science mathématique est pleine de ces faussetés que M. d'Alembert reproche à l'analyse des probabilités". En fait, la clé de la divergence se trouve dans cette proposition liminaire du texte de Diderot affirmant que le calcul des probabilités "est proprement la science *physico-mathématique* de la vie", qui renvoie la connaissance à des normes épistémologiques radicalement différentes de celles de la physique mathématisée, ou des "mathématiques mixtes" au sens de d'Alembert (64-5).

"Probabilité" (Encyclopédie)

Le ton mesuré et le contenu équilibré de l'article "Probabilité" paru dans le volume 13 de l'*Encyclopédie* contrastent avec le pamphlet polémique de Diderot. Sa paternité est difficile à établir et il serait vraiment intéressant d'en connaître l'auteur. Enlevé à d'Alembert (ou retiré par ce dernier au moment de la crise ? Mais cela paraît peu vraisemblable), l'article n'a sans doute pas été repris par Diderot, et il semble occuper un moyen terme entre les deux positions (64-6). Tout en faisant siennes les conceptions communément acceptées du calcul, il fait indirectement allusion à plusieurs reprises aux remarques de d'Alembert, et se préoccupe dans une certaine mesure de justifier les conditions d'application. Il présente donc un intérêt particulier dans le débat, par sa position ouverte sinon conciliatrice, et, sur le sujet qui nous occupe, témoigne d'une attention réelle aux objections de d'Alembert, qui a aidé à nuancer les positions. La première partie du texte est reprise en bonne part de Jacques Bernoulli, et l'article dans son ensemble laisse transparaître l'influence de s'Gravesande et de Hume (65). Sans en reprendre une description complète, contentons-nous d'indiquer quelques aspects pour lesquels il tient compte des remarques de d'Alembert et leur répond - sans toutefois le nommer. Reprenant l'exemple de l'absent (proposé par Jacques Bernoulli, discuté par d'Alembert), l'article apporte des arguments en sens contraire de ceux avancés par ce dernier, tout en prenant en considération ceux qui peuvent rabaisser aussi bien les facteurs défavorables à la probabilité de survie ; il convient, ce faisant, qu'en matière de probabilité "il n'y en a point de si forte qu'elle ne puisse être combattue et détruite par une contraire encore plus forte", et qu'il faut se contenter "des à peu près que nous pouvons obtenir", sans chercher trop de précision pour fixer des degrés de probabilités. N'est-ce pas encore à d'Alembert que l'auteur répond en estimant que "c'est un art que de savoir s'éloigner de la perfection en certains articles, pour s'en approcher davantage en d'autres, plus essentiels et plus intéressants ?" N'est-ce pas de lui qu'il reprend l'exigence de déterminer avec une grande précision des tables de probabilités de suites d'événements (pris de registres baptistaires et mortuaires), en se fondant sur la loi des grands nombres de Jacques Bernoulli ?

Quant aux remarques de l'article relatives à l'équiprobabilité et à la composition des probabilités, elles semblent formulées en fonction des réserves de d'Alembert, en accentuant le côté pratique de ces notions, prises comme simplement raisonnables et utiles. L'équipossibilité n'est qu'une supposition : nous ignorons la causalité exacte par tous les facteurs qu'il faudrait prendre en compte et nous n'avons pas de raison de préférer une des possibilités à une autre ; mais nous pouvons fort bien nous tromper en faisant cette supposition. Ce qui est précisément reconnaître qu'il n'est pas de justification plus précise de l'équiprobabilité sinon ce principe de raison non suffisante (65 bis). Quant à la probabilité composée, elle "s'estime donc en prenant de la première une partie telle qu'on la prendrait de la certitude entière, si cette *probabilité* était convertie en certitude" : le vocabulaire est celui-là même employé par d'Alembert, et la définition se propose comme une règle pratique qui ne préjuge pas d'interrogations plus fondamentales (65 ter). L'article apporte donc toutes sortes de nuances, tout en se situant dans une perspective subjective (les degrés de probabilité sont rapportés à notre plus ou moins grande ignorance ; car "toute proposition considérée en elle-même est vraie ou fausse, mais relativement à nous, elle peut être certaine ou incertaine"), admettant le caractère approché des propositions du calcul des probabilités. Mais il en appelle à la possibilité d'une théorie plus exacte : "concluons qu'il ne serait pas entièrement impossible de réduire toute cette théorie des probabilités à un calcul assez réglé", si l'on voulait s'en donner la peine. Et : "nous convenons qu'il y a encore beaucoup à faire, mais la considération de ce qui manque doit exciter à remplir ces vides, et l'importance de l'enjeu offre de quoi dédommager amplement des difficultés". Pour l'auteur, en tout cas, l'intérêt des probabilités est fondamental : il faut "cultiver cette branche si importante de nos connaissances, et si utile dans la pratique continuelle de la vie".

Doutes et suggestions

Qu'il y ait eu débat et controverses dans le milieu des savants et dans le public cultivé, à la suite de la publication des "Réflexions sur les probabilités", c'est ce dont témoigne abondamment le texte de 1767, "Doutes et questions sur le calcul des probabilités", qui les évoque à plusieurs reprises (66) et qui se propose de présenter un exposé clair et d'accès plus facile, par lequel chacun puisse juger des termes du débat d'idées et se prononcer en connaissance de cause sur le point de savoir si les doutes exposés sont fondés ou non.

Les réflexions morcelées de 1761 y sont refondues en un exposé plus systématique où il est précisé d'emblée qu'il s'agit d'un problème d'application de "formules des mathématiciens" aux "objets de la nature", non de mathématiques pures, et que ce qui est ici questionné, ce n'est pas la *théorie ordinaire des probabilités*, que d'Alembert adopte, "ou plutôt admet" (sic) "pour bonne dans la rigueur mathématique" ; il se propose seulement "d'examiner si les résultats de cette théorie, quand ils seraient hors d'atteinte dans l'abstraction géométrique, ne sont pas susceptibles de restriction, lorsqu'on applique ces résultats à la nature" (67).

Les doutes de d'Alembert, mis en forme philosophique, apparaissent, dans le nouveau texte, essentiellement centrés autour de la question de l'équipossibilité des événements d'une suite, qui gouverne les divers aspects de l'application de la théorie à des occurrences réelles.

Pour spécifier l'équiprobabilité comme problème, d'Alembert reprend la distinction entre possibilité, non plus, cette fois, *métaphysique*, mais *mathématique* (mais c'est la même), qui est une simple affaire de définition et règle la distribution égale des combinaisons, et possibilité *physique*, laquelle est d'une autre nature et se réfère à l'ordre des choses. Le paradoxe de Saint-Petersbourg est pris comme cas typique et exemple-clé des problèmes fondamentaux des probabilités ; délaissant toutes les solutions particulières proposées, différentes les unes des autres (68) et "tirées de circonstances étrangères à la question", il expose comment la raison profonde de la difficulté n'est autre, à ses yeux, que, précisément, l'hypothèse de l'équipossibilité de toutes les séries. Elle est responsable, en particulier, du résultat infini de l'espérance ou de l'enjeu. D'Alembert met donc en cause cette hypothèse, en s'appuyant sur la pratique même des joueurs, qui ont coutume de parier croix au quatrième coup si pile est déjà arrivé trois fois de suite, témoignant ainsi pour la probabilité décroissante des répétitions à mesure que leur longueur augmente (69). Dans le cas des grands nombres de coups, il lui paraît qu'il faut exclure, pour s'accorder à l'ordre de la nature et considérer les choses *physiquement*, certaines combinaisons qui seraient possibles *mathématiquement*. Il propose de remplacer l'équiprobabilité, dans les suites d'événements physiques, par une diminution de la probabilité en fonction du nombre de répétitions antérieures (70). Pour lui, il en va des combinaisons à répétition comme pour les suites de lettres qui font sens (par exemple, celles qui donnent un nom tel que *Constantinopolitanensibus*) (71), ou pour un ordre donné d'arrangement des planètes : dans les deux derniers cas, on n'hésite pas (et le dernier est rapporté, précisément, à Daniel Bernoulli) à conclure que cet ordre particulier résulte d'une cause. L'emprunt du dernier exemple à un mémoire d'astronomie de Bernoulli est hautement polémique, puisque ce dernier trouvait "ridicule" l'opinion de d'Alembert concernant le premier cas.

En conclusions d'Alembert, estime non pas proposer une autre théorie des probabilités, mais montrer que l'on doit s'interroger sur l'exactitude d'application de la théorie mathématique des probabilités à des cas naturels, et il en appelle à "des géomètres, qui méritent qu'il les lise ou [qu'il] leur réponde", attendant d'eux "qu'ils combattent ou appuient les nouvelles vues qu'[il] leur propose sur le calcul des probabilités" (73). On ne peut s'empêcher ici de penser à une sorte d'appel à ses disciples, Condorcet et Laplace, qui d'ailleurs y répondront dans des écrits postérieurs, et qui furent, chacun à sa manière, attentifs aux critiques de d'Alembert (73 a). D'autres savants réagirent positivement. C'est le cas notamment de Nicolas Béguelin, qui donna un important mémoire sur le calcul des probabilités et notamment sur le paradoxe de Saint-Petersbourg, en 1768 (73-6). Annonçant son travail à d'Alembert, Béguelin lui écrit : "C'est la lecture du Vème tome de vos mélanges" (73-7) "qui m'en a fourni l'idée. Votre but est de faire penser, et il serait bien flatteur pour moi que les pensées que vous m'avez fait naître sur cette matière eussent votre approbation" (73-8). La réaction de Lagrange apparaît plus réservé : les difficultés soulevées par d'Alembert sont plutôt de nature philosophique, mais il les juge dignes de susciter la réflexion (73-9).

Dans le public plus large les réactions furent plus variées. Le *Journal Encyclopédique*, par exemple, s'en fit l'écho. Evoquant certaines de ces critiques faites à d'Alembert, le même Béguelin écrit à ce dernier qu'elles ont "le défaut commun d'être tirée(s) de considérations étrangères au problème, et je ne vois pas qu'en restant dans les termes généraux du problème, on puisse rien opposer de solide à votre principale difficulté".

2.6 LES REFLEXIONS SUR L'INOCULATION, DE 1760 A 1767

La communication de novembre 1760 à l'Académie des sciences, parue dans le volume 2 des *Opuscules mathématiques* l'année suivante (74), s'attache, davantage qu'au problème de l'inoculation lui-même, objet d'un vif débat entre partisans et adversaires de l'opération, à celui de l'application du calcul des probabilités à ce problème. Bien qu'il s'affirmât partisan de l'inoculation, d'Alembert se livre à une critique des conceptions prévalant à l'époque en matière de calculs en faveur de cette pratique. On peut l'y voir soutenir deux arguments, l'un relatif au problème théorique lui-même, qui réclame une grande rigueur dans le traitement mathématique de questions aussi complexes, l'autre exprimant que des considérations en termes d'espérance de vie sont assez peu susceptibles de gagner à la cause de l'inoculation les intéressés eux-mêmes qui demandent d'autres justifications. C'est la même thèse qui sera reprise dans l'écrit de 1767, lequel incorpore tout le texte de 1760 en insérant des passages complémentaires et en l'organisant en chapitres et paragraphes. On ne peut pas dire qu'il y aît d'éléments nouveaux, dans la version de 1767, les ajouts consistant en détails supplémentaires, donnés en fonction d'arguments avancés depuis dans le débat et en informations nouvelles sur les mortalités ou sur les résultats relatifs à l'inoculation. On peut voir ces textes (celui de 1760 et sa reprise de 1767) comme dirigés essentiellement contre l'approche de Daniel Bernoulli, et le type de mathématisation qu'il proposait de l'inoculation et de ses avantages. Théoricien de l'application des mathématiques aux phénomènes du monde réel (ou, mieux, selon son vocabulaire, de la nature) , d'Alembert fut apparemment piqué au vif par l'approche de Bernoulli, et ne résista pas à la tentation de lui opposer une attitude visant à une véritable rigueur : nous sentons bien ici, en effet, un parallèle avec la nature si différente de leurs travaux en mécanique, et notamment en hydrodynamique où, aux modèles empiriques développés par Bernoulli (qui leur appliquait, pour les traiter, par exemple, la "recette" de la loi des forces vives), d'Alembert opposait l'application de son principe de la dynamique, éliminant le recours à des modèles particuliers (75).

A cette différence de "styles" de recherche, s'adjoint la polémique sur les probabilités, lesquelles se trouvaient constituer précisément la théorie mathématique susceptible d'être appliquée à ce domaine. Dès lors, nous verrons dans les textes sur l'inoculation deux intérêts distincts - mais liés entre eux cependant - : le premier sera d'y retrouver des considérations relatives aux probabilités en tant que telles reprises dans ces circonstances d'applications, et de les confronter à celles rencontrées dans les textes sur les probabilités elles-mêmes ; le deuxième sera de voir comment d'Alembert tente de déterminer les exigences et les critères d'application de la théorie des probabilités - une théorie mathématique - à un objet social où il est question de statistiques, de risques et de décisions.

Nous nous contenterons, ici, d'analyser sommairement le contenu des textes sur l'inoculation, de 1760 à 1767.

L'écrit publié en 1761 est fait de trois textes (un texte principal (76) et deux annexes), dont seul le premier et des éléments du second seront repris dans les "Réflexions sur l'inoculation" de 1767, le troisième consistant en une "Théorie de l'inoculation" accessible seulement aux mathématiciens et qu'il n'était pas question d'inclure dans un ouvrage destiné à un public large. Le second texte consiste en notes explicatives de passages du premier, sur les statistiques de mortalités de la petite vérole, sur les variations entre les diverses listes et la critique de leur absence de réels critères, sur une hypothèse de travail relative à la loi dans le temps des décès de petite vérole naturelle, et au rapport de ce risque à celui de l'inoculation, sur l'inoculation comme une loterie. La première partie, qui constitue le texte principal, se propose deux objets : une critique des calculs "faits jusqu'à présent, pour déterminer les avantages de l'inoculation", montrant qu'ils "sont insuffisants et prématurés" ; un essai de déterminer des arguments plus solides en faveur de l'inoculation, essai qui, dans la version de 1760, est assez peu développé. La critique porte sur les estimations des risques et leurs difficultés propres (en particulier quant à la prise en compte de la durée), sur l'absence de tables satisfaisantes, suffisamment précises et détaillées (en fonction de l'âge, par exemple), sur le caractère gratuit et très grossier des hypothèses de Daniel Bernoulli sur les proportions de contamination et de décès de la petite vérole, sur l'insuffisance du critère de la vie moyenne et sur le rapport entre le risque et l'augmentation de celle-ci, sur les intérêts respectifs de l'Etat et du citoyen. Dans les pages qui tentent de fournir des arguments en faveur de l'inoculation, d'Alembert propose un critère pour établir un risque tolérable (en l'occurrence qu'il soit égal ou inférieur à celui de mourir de la petite vérole naturelle en un mois), susceptible d'entrainer l'adhésion des individus, laquelle demande en outre la démonstration que l'inoculation immunise vraiment et qu'elle n'entraîne pas des effets négatifs. Pour bannir toute cause de doute qui susciterait la méfiance du public, on doit, insiste d'Alembert, expérimenter en inoculant et faire des tables précises (77).

La conclusion du mémoire de 1760 (78) est que "si les avantages de l'inoculation ne sont pas de nature à être appréciés mathématiquement, il est néanmoins vraisemblable que ces avantages sont réels pour ceux qui le subiront avec les précautions convenables" ; d'Alembert précise que "[ses] objections n'attaquent que les mathématiciens qui pourraient trop se presser de réduire cette matière en équations et en formules...".

La "théorie mathématique de l'inoculation" présentée comme supplément au mémoire est intéressante quant au problème posé par d'Alembert, d'appliquer avec rigueur le calcul à l'objet social considéré. Il s'agit en l'occurrence d'une véritable théorie de statistique sociale, où l'on considère des éléments différentiels qui expriment les variations en fonction du temps, et qui utilise les ressources du calcul intégral.

Cette tentative, qui suffit à elle seule à montrer que d'Alembert n'était pas hostile par principe à toute mathématisation d'un problème social, et sa déclaration en faveur de l'inoculation ne réussirent pourtant pas à tempérer l'indignation aussitôt ressentie par les partisans militants de l'inoculation, notamment Diderot. Mais le ton polémique de d'Alembert - à l'égard de la tentative de mathématisation de Bernoulli - et l'agressivité de son ton de "donneur de leçon" n'étaient sans doute pas propres à rasséréner les esprits.

Lorsqu'il eût des échos de la lecture faite par d'Alembert à la séance de rentrée de l'Académie des sciences, à l'automne 1760, sur l'inoculation, Diderot y réagit déjà très vivement, parlant "d'action déshonnête" (79). Son texte de 1761 dont on a parlé plus haut, écrit à la lecture des mémoires des *Opuscules mathématiques* sur les probabilités et l'inoculation, donne libre cours à son indignation (79 bis). "Scandale aux honnêtes gens", "inepties", il n'a pas de mots assez durs pour qualifier l'intervention de d'Alembert dans un domaine où, à ses yeux, le point de vue militant devrait primer sur toute autre considération (79 ter). Le souci théorique de d'Alembert quant à l'application d'une théorie mathématique à un problème social ne le retient aucunement. Pour lui, d'Alembert n'a rien apporté d'intéressant au traitement du sujet, pour lequel La Condamine et Daniel Bernoulli ont tout fait : "A quoi se réduit le travail de M. d'Alembert ? A donner aux x et aux y de M. Bernoulli d'autres valeurs, à rendre ses courbes un peu plus ou un peu moins convexes, et puis c'est tout". Ce qui prime à ses yeux, c'est la nécessité de persuader l'opinion du bien-fondé de l'inoculation, et toutes les considérations méthodiques de d'Alembert ne sont que de vaines arguties qui risquent d'affaiblir la cause. A l'incertitude de d'Alembert sur une probabilité non nulle de décès par inoculation, il répond : "pourquoi effrayer les hommes par de fausses suppositions ?" ; et, à l'allusion aux mères dont d'Alembert doutait qu'elles fussent convaincues par le calcul, il réplique : "il est fort mal d'ajouter encore par des subtilités à leurs alarmes mal fondées". Quant à la distinction, faite par d'Alembert, entre l'intérêt individuel (auquel est lié le libre-arbitre) et celui de l'Etat, elle ne suscite que son ironie mordante : "celui qui apprend aux hommes à séparer ces deux intérêts est un bon géomètre, à la bonne heure, mais un très-mauvais citoyen". En sorte que toutes les considérations déployées par d'Alembert pour préciser les conditions d'application des probabilités au domaine social ne reçoivent de lui que ce jugement lapidaire : "Il faut convenir que voilà bien de l'esprit, bien de la pénétration et bien du travail mal employés..." (79-4).

Quant à Daniel Bernoulli, il se contenta de faire paraître son mémoire dans le volume de l'*Histoire de l'Académie* pour 1760, qui ne fut publié qu'en 1766. Il n'y fait qu'une brève allusion aux critiques de d'Alembert, sans le nommer, dans une note liminaire datée de 1765 (80). Il prit donc l'affaire avec hauteur, conscient de la prééminence de son travail, qui avait été le premier à mathématiser le problème, et dont les répercussions avaient été immédiates. Le mémoire de d'Alembert pouvait paraître n'apporter du point de vue de la théorie que des corrections de détail et, quant à l'interprétation, simplement une autre opinion possible. C'est d'ailleurs ce que, pour l'essentiel, l'histoire devait en retenir, bien que son influence réelle ait été plus importante, notamment sur la réflexion de Condorcet.

Mentionnons également la réaction de La Condamine, dans un mémoire de 1765 (80 bis). Reprenant l'objection de d'Alembert sur la différence des risques (celui de la petite vérole naturelle, et celui de la petite vérole inoculée), La Condamine en tient compte, en exagérant la différence dans un sens (défavorable) qui ne prête pas à la critique, ce dont il tire une conséquence qui paraît donc acceptable. Il reconnaît avec d'Alembert que l'inoculation "peut-être perfectionnée au point de la rendre exempte de tout risque" ; "et", ajoute-t-il, "mon illustre adversaire paraît ne pas s'éloigner de ce sentiment".

Peu à peu augmentée au cours d'éditions ultérieures, la contribution de d'Alembert au probème de l'inoculation prend sa forme définitive dans le volume 5 de ses *Mélanges* (81).

Son argumentation se développe en trois temps. Le premier est une critique de la manière de raisonner des partisans de l'inoculation, portant sur la notion reçue de risque et sur son calcul, lesquels soulèvent des problèmes de principe (comparaison de risques différents, complexité des éléments dont il faudrait tenir compte, caractère subjectif de la notion de risque), et des problèmes de calcul et d'informations (validité des hypothèses, insuffisance de la notion de vie moyenne, absence de tables précises). Cette critique est nécessaire, aux yeux de d'Alembert, si l'on veut parvenir à une meilleure résolution de la question : il y a bien problème, il est de nature difficile (insoluble peut-être, mais d'Alembert ne l'élude pas, il ne le nie point, contrairement à ce que lui reprocheront Diderot ou Daniel Bernoulli), et sa solution éventuelle demande, en condition préalable, une estimation précise de ses difficultés : "s'il est quelqu'un à qui la solution de ce problème soit réservée, ce ne sera sûrement pas à ceux qui la croiront facile" (82).

Le second temps (83) propose des *considération alternatives* aux approches critiquées, fondées sur une estimation plus exacte des proportions de décès par la petite vérole naturelle et par suite de l'inoculation ; c'est une argumentation qualitative, qui "ne donne pas et ne saurait donner la valeur précise, mathématique et rigoureuse, de l'avantage qu'il y a à se faire inoculer", mais, ajoute d'Alembert, "elle montre, et cela suffit, que l'avantage est très considérable" (84).

En fait, ces considérations substituent, à une théorie des avantages de l'inoculation se prétendant mathématique, un raisonnement pratique et qualitatif, où les probabilités n'interviennent que modestement : par la considération de ce que, lorsqu'elle a été effectuée dans des conditions favorables, l'inoculation ne provoque pas la mort du patient ou du moins avec une probabilité si faible qu'on ne peut la regarder comme nulle. "On ne meurt point de la petite vérole inoculée, quand elle est donnée avec prudence et dans les circonstances convenables" (85) : car les tables de décès dans ces cas indiquent que la probabilité de succomber à l'inoculation est moindre que celle de succomber à la petite vérole naturelle dans le même moment (en prenant un intervalle de quelques mois) ; pour un risque immédiat égal, l'inoculation libère définitivement du risque à plus long terme. Cela suffit pour faire estimer que la probabilité de succomber à l'inoculation est négligeable. Car, l'avantage à être désormais délivré de tout risque est "assez grand pour l'emporter sur la légère probabilité de succomber à l'inoculation, en ne sacrifiant que deux mois de sa vie. Lorsqu'il est question d'un avantage, même éloigné", estime d'Alembert, "il y a une infinité de cas, surtout dans le cours de la vie, où une probabilité très petite de danger, qui balance cet avantage, doit être traitée comme si elle était absolument nulle" (86).

D'Alembert ajoute ceci, qui concerne sa conception des probabilités en général : " ce principe, pour le dire en passant, est très-important dans la théorie des jeux de hasard, et peut servir à résoudre des questions épineuses et délicates, qui n'ont point été résolues jusqu'ici, ou qui l'ont été mal...".

Remarquons que, dans cette estimation des chances, d'Alembert ignore tout calcul d'espérance et de durée de vie. Car ce concept est à éliminer dans une appréciation des risques (on est tenté de voir ici une analogie avec son élimination des forces, concept trompeur, des équations de la mécanique).

Dans le troisième temps de son argumentation, d'Alembert passe en revue d'autres raisons qui lui "paraissent plus persuasives en faveur de l'inoculation" ; elles ne sont pas concernées par le calcul sinon par l'évocation d'informations statistiques sur les effets de l'inoculation, et pèsent simplement le pour et le contre des divers arguments opposés à l'inoculation par ses adversaires en procédant à une critique de faits invoqués (circonstanciels et liés à d'autres causes évidentes et à un examen détaillé des statistiques disponibles) ; on ne meurt pas de l'inoculation si elle est faite dans de bonnes conditions ; on n'attrape plus la petite vérole quand on a été inoculé avec succès (du moins le cas inverse est-il "extrêmement rare, pour n'en pas dire davantage") ; les allégations selon lesquelles l'inoculation entraîne des effets secondaires dangereux, ou une recrudescence de la maladie par contagion, ne paraissent pas du tout prouvés et relèvent souvent de considérations spécieuses ; la vie moyenne des hommes ne diminue pas, mais plutôt augmente avec l'inoculation (la considération est qualitative : une cause de mortalité est supprimée ; aucune autre cause ne semble ajoutée) ; enfin, pour avoir exactement réponse à toutes les objections, on doit, précisément, inoculer, consigner les observations comme autant d'expériences, et, d'une manière rigoureuse, favoriser les expériences scientifiques en la matière aussi bien qu'établir systématiquement des tables de mortalité précises. Ainsi disposerait-on, un jour, des données nécessaires pour traiter au mieux le problème et optimiser (87) le traitement de l'inoculation par une concertation "sur la meilleure manière de donner et de traiter la petite vérole artificielle ; sur l'espèce de préparation qui y convient le mieux ; sur l'âge, le temps, les circonstances les plus favorables pour se soumettre à cette maladie ; et sur les effets qui en résultent quand la guérison est assurée", effets qui doivent être les plus avantageux pour la santé qu'il soit possible (88). D'Alembert, en conclusion, se déclare donc partisan de l'inoculation, et estime avoir montré "que si les avantages de [celle-ci] ne sont pas de nature à être appréciés mathématiquement, ils n'en paraissent pas moins réels" (89).

La partie critique de ses "Réflexions" (qui correspond aux deux premiers temps décrits plus haut) était donc bien dirigée non contre l'inoculation elle-même, mais, comme il l'avait déjà écrit en 1760 (90), contre une mathématisation trop hâtive du problème (90 bis).

Nous avons pu déjà entrevoir, à cette évocation des "Réflexions sur l'inoculation", comment les remarques de d'Alembert sur ce problème, dans la mesure où elles portent sur les probabilités, sont cohérentes avec les limitations assignées par ailleurs à celles-ci, notamment quant aux faibles probabilités qui sont égalées à zéro, et à la critique de l'espérance (ou de la vie moyenne) dans son rapport aux probabilités et à l'estimation des risques.

2.7 LES MEMOIRES 23 ET 27 DU VOLUME 4 DES *OPUSCULES MATHEMATIQUES*, ET LES NOTES DU VOLUME 5.

Publiés en 1768, un an après le volume 5 des *Mélanges* qui contient les deux textes analysés précédemment, les mémoires 23 et 27 des *Opuscules mathématiques* consistent surtout en reprises et confirmations des considérations antérieures. "On y verra", avertit d'ailleurs d'Alembert, "surtout de nouvelles réflexions sur la théorie des probabilités, tendant à confirmer celles que j'ai déjà proposées dans mon dixième mémoire (t. II des *Opuscules*) et dans le Vème volume de mes *Mélanges de philosophie*" (91). A propos du problème de Saint-Petersbourg, il propose une hypothèse alternative où la probabilité de rang n est différente de 1/2 , permettant d'obtenir des enjeux raisonnables. Il revient dans le 23ème mémoire, sur les problèmes déjà posés de l'espérance et de sa définition qui comporte de l'arbitraire, du rapport de l'uniformité des occurrences à la causalité, de l'accumulation de petits termes dans les probabilités d'événements successifs qui amène selon lui la probabilité à s'annuler, de la durée de vie. Rien de vraiment neuf, sinon peut-être sur la durée de vie (nous y reviendrons). Dans le 27ème mémoire apparaît une innovation, déjà préparée dans les considérations antérieures mais ici clairement explicitée, sur le rôle du temps dans l'événement physique qui le relie à la causalité, et qui échappe à la probabilité (il s'agit de la comparaison de cent coups (jets en l'air de pièces) simultanés et de cent coups effectués successivement : dans les premiers il pourra y avoir répétition, en raison d'une cause commune ; mais non dans les seconds).

Résumant ses doutes, d'Alembert souligne que : 1°) probabilité n'est pas combinaison (et la probabilité de répétitions est plus faible que la valeur mathématique) ; 2°) que l'espérance ("ou ce qui est la même chose, le sort d'un joueur") ne doit pas être estimée comme le produit de la probabilité par le gain ; 3°) que l'on ne peut combiner des probabilités et des certitudes ($p + q = 1$ est une certitude, alors que $p/(p+ q)$ n'est qu'une probabilité) : "je nie que du rapport des probabilités entre elles on puisse en conclure leur rapport à la certitude absolue, parce que la certitude absolue est infinie par rapport à la plus grande probabilité" (92).

Quant à l'inoculation, d'Alembert reprend sur le mode polémique sa critique de l'hypothèse simplificatrice de Bernoulli sur les risques d'attraper la petite vérole et d'en mourir, qui donne des probabilités globales sans tenir compte des facteurs qui les modulent ; appliquant, quant à lui, le calcul différentiel, il souligne combien "les calculs de [ce] grand géomètre sont fondés sur une base assez précaire" (94).

Le volume 5 des *Opuscules mathématiques*, paru la même année, contient deux courtes notes supplémentaires relatives aux tables de mortalité et à l'inoculation, conçues comme des compléments au 27ème mémoire. D'Alembert fait état, dans la première, de précisions demandées par "quelques mathématiciens" sur les résultats de tables de mortalité tels qu'il les a présentés dans ce mémoire, ce qui témoigne de l'intérêt rencontré par ses remarques sur le sujet, en tant que contribution à un débat considéré comme important aux plans théorique et social. Discutant de la table de mortalité utilisée d'après Deparcieux, il met en évidence les diverses estimations que l'on peut obtenir de la durée de vie suivant l'interprétation que l'on prend, et l'irrégularité de la courbe de mortalité en fonction du temps : deux remarques qui soulignent assez que l'application des mathématiques est ici délicate, et justifient par là-même son souci de précision et sa critique des hypothèses par trop simplificatrices. La conclusion est accentuée par l'existence d'une diversité de tables conduisant à des résultats encore différents. D'où la nécessité, réclamée par d'Alembert, de dresser systématiquement des tables précises (94 bis).

La seconde note revient sur le débat relatif à l'inoculation proprement dit, faisant état d'une réponse, parue dans les *Mémoires de l'Académie* pour 1765, à son objection sur la méthode de calcul des avantages de l'opération. L'auteur de la réponse n'est autre que La Condamine (94 ter), dont nous avons vu qu'il proposait de modifier, pour tenir compte de la remarque de d'Alembert sur la différence des risques (celui à brève échéance, la maladie inoculée, et celui, sur un long terme incertain, de la petite vérole naturelle), le rapport des probabilités entre elles. Mais d'Alembert lui oppose que là n'est pas la question, les rapports étant inappréciables et impossibles à estimer, en effectuant d'ailleurs une comparaison avec un rapport analogue de risques dans les jeux (tout perdre en un jour, ou ultérieurement mais sans savoir quand), laissant ainsi à entendre que le problème est plus général que le seul cas de la défense de l'inoculation (c'est un problème théorique de l'application des probabilités). D'ailleurs il rappelle en conclusion qu'il a, lui-même, eu raison de "regarder l'inoculation comme une pratique utile", soulignant bien par là le caractère essentiellement théorique de ses objections (94 - 4).

En 1776, parut le second volume du *Supplément de l'Encyclopédie*, avec une contribution de d'Alembert sur les probabilités, sous le titre : "Cartes. Problèmes sur les cartes" (94 - 5). L'article reprend, à propos de tirages de 8 cartes, les arguments avancés dans "Croix ou pile" à propos de pièces, et qui, comme pour ce dernier cas, reposent sur une règle ou définition du jeu qui est propre à d'Alembert (94 - 6), ainsi que sur une objection à la règle de composition de probabilités successives alors que les coups joués sont devenus certains (94 - 7). Cette contribution relativement tardive témoigne de la persistance de ses doutes sur les principes mêmes de la théorie.

2.8 L'ETAT DES REFLEXIONS DE D'ALEMBERT VERS 1780.

Ce n'est qu'en 1780 que d'Alembert reviendra sur le sujet des probabilités, s'étant contenté entre-temps des rééditions du volume 5 des *Mélanges*. Publiés cette année-là, les tomes 7 et 8 de ses *Opuscules mathématiques* contiennent, pour le premier un "Mémoire sur le calcul des probabilités", qui constitue une partie de son "Mémoire 52" (95), pour le second un mémoire sur les annuités (96).

On remarque une évolution sensible dans la nature des questions que d'Alembert pose désormais à la théorie des probabilités dans le mémoire sur le calcul. En réalité Laplace et Condorcet avaient alors, chacun pour sa part, répondu aux principales objections de d'Alembert et ont probablement eu une influence sur l'évolution de ses idées. Tout en exprimant la permanence de ses doutes, d'Alembert y déclare souhaiter que la théorie, "soit qu'on y change quelques principes, soit qu'on la conserve telle qu'elle est, [...] soit du moins exposée désormais de manière à ne plus laisser aucun nuage" (97). L'accent mis sur la manière d'*exposer* la théorie, et non plus nécessairement sur la nécessité de la changer, et la possibilité admise de la conserver "telle qu'elle est" attestent un changement assez considérable dans son attitude. On est tenté bien entendu de penser à l'influence de Laplace qui a fourni, en 1774, un important "Mémoire sur la probabilité des causes par les événements" (98), auquel d'Alembert se réfère d'ailleurs - ainsi que du mémoire de Bayes de 1764 (99). Pour autant, d'Alembert ne renonce pas à certaines de ses vues, notamment sur le problème des combinaisons à répétition, dont il propose une approche plus précise, plus propre selon lui à nous permettre de juger de leur caractère improbable : il s'agit d'une théorie des répartitions de combinaisons de coups chacun discernable, qui fait assez penser aux comptages de Boltzmann, et qui correspond à l'attribution aux événements d'un caractère décidément physique (100). Il propose d'ailleurs, dans ce sens, une modification aux calculs du problème de Saint-Petersbourg, dont la théorie ne serait pas nécessairement inexacte, mais serait du moins énoncée de manière insatisfaisante, en attribuant à chaque coup une probabilité différente, c'est-à-dire en donnant une forme générale de la solution du problème avec m probabilités distinctes ω, ω', etc...

Un autre signe d'évolution de la pensée de d'Alembert, est qu'il paraît proche d'accepter le caractère suffisant de la loi des probabilités pour les faibles valeurs (alors qu'auparavant il voulait les égaler à zéro) : il constate en effet que le nombre de fois qu'un événement (par exemple croix) n'arrive pas vingt fois de suite, soit 1 comparé à 2^{19} coups , suffit à expliquer pourquoi il ne se produit pas (sic). Mais il continue toutefois d'envisager qu'il y a peut-être à cela une autre raison, une causalité de la nature qui change l'état des choses et interdit la répétition. A propos de ces répétitions, d'Alembert apparaît disposé à accepter une interprétation subjective à la Laplace : s'il y a une causalité universelle, nous sommes toutefois "dans l'ignorance du secret de la nature" et, à propos de la faible probabilité d'occurrence d'une longue répétition, il appelle à considérer la probabilité des causes par les effets.

Le mémoire de d'Alembert, malgré ces modifications substantielles, présente une continuité frappante avec son argumentation antérieure. Sa démarche y est en effet la suivante : 1) énoncé de ce que chaque événement, étant physique, est individualisé : il a une manière de se produire qui lui est propre ; 2) critique de l'équiprobabilité (sur la base d'une différence entre possibilités physiques et possibilités mathématiques) ; 3) affirmation de ce que la nature est telle que le même événement ne s'y répète pas fortuitement un grand nombre de fois ; 4) critique de la théorie courante de l'espérance mathématique ; 5) affirmation d'une causalité des événements ; 6) La discontinuité des faibles probabilités est une solution au problème de l'absence de répétition mais elle n'est pas naturelle ; 7) propositions d'un modèle théorique de non-équiprobabilité ; 8) il est possible d'estimer la probabilité après une répétition à l'aide des résultats de Bayes et de Laplace. On voit, à ce résumé de son propos, comment ce dernier travail de d'Alembert présente une transition avec ses positions précédentes. Tout en maintenant la légitimité de ses interrogations par des arguments alternatifs qui en aucun cas n'ont la prétention d'être une théorie, et qui, ici, ne sont pas systématiquement opposés à la théorie des probabilités - ils se présentent plutôt comme des ajustements pour tenir compte de l'expérience physique -, il est sur le point d'accepter la théorie des probabilités mais sans pour autant se renier.

Pour terminer cette description chronologique des contributions de d'Alembert aux probabilités et à leurs applications, il convient de mentionner encore plusieurs mémoires. Et, tout d'abord, celui, très technique, "Sur les annuités", paru dans le dernier volume publié des *Opuscules mathématiques* (le volume 8), mémoire dans lequel il est démontré par le calcul "qu'il y a [...] de l'avantage pour l'emprunteur à payer les annuités, non à chaque année révolue, mais à des portions d'années..." (100 bis). Ce cas est un traitement de pure mathématique statistique, pour laquelle d'Alembert ne répugnait nullement à mobiliser les ressources du calcul, comme il le faisait par ailleurs à propos des estimations sur la durée de vie : mais les problèmes conceptuels de l'application des mathématiques y étaient bien entendu beaucoup plus transparents, les probabilités n'y intervenant pas (elles n'interviendraient que pour des annuités viagères).

Ce mémoire est prolongé par un autre texte sous le même titre, non publié, préparé par d'Alembert pour paraître dans le volume 9 des *Opuscules mathématiques* qui demeura inédit. Il n'occupe pas moins de 161 feuillets manuscrits, correspondant à 91 articles ou paragraphes (100 ter) ; et consiste en remarques et calculs supplémentaires au mémoire précédent (volume 8 des *Opuscules*). D'Alembert s'y montre pour l'essentiel soucieux de calculer plus rigoureusement que ce qui se faisait alors les diverses déterminations relatives aux problèmes d'annuités, en particulier sur les rentes viagères. Ce faisant, il atténue la conclusion du mémoire du volume 8, et revient sur les courbes de mortalité en les étudiant à l'aide des trois méthodes disponibles : celle employée par Deparcieux, celle basée sur la vie moyenne, et celle qui s'appuie sur la probabilité de la durée de vie. Par une analyse minutieuse il montre qu'on doit éliminer la dernière, et que l'on peut balancer entre les deux autres, avec une légère préférence pour la vie moyenne. Mais la conclusion reste décidément sceptique : "Au reste, toutes ces considérations que nous proposons ne sont, comme nous l'avons déjà dit, que des doutes sur lesquels nous désirons que les géomètres prononcent" (100-4).

L'inoculation le préoccupe encore dans ses dernières recherches : il y revient dans deux mémoires inédits qui tentent d'éclaircir ce qu'il avait dit auparavant, en 1767 et 1768 ; en tout cas, ses positions restent les mêmes, qu'elles concernent le problème spécifique de l'inoculation, ou les questions reliées à la signification de l'espérance de vie aussi bien qu'aux définitions des probabilités en général, notamment au sujet de leur composition, ou de la probabilité de coups indépendants (100–5). D'Alembert a donc entretenu jusqu'au dernier moment ses doutes sur la théorie des probabilités et sur ses conditions d'applications. Ce sont des doutes, non des négations : on s'en assurera sur le mode plaisant avec l'étonnant et amusant mémoire numéroté 28, "Sur le tirage des officiers de l'Académie française" dans lequel il suppute, avec le plus grand sérieux, par le calcul, les chances d'accéder aux diverses fonctions de la prestigieuse institution (100-6).

3 - L'EXAMEN CRITIQUE DES CONDITIONS D'UNE THEORIE DES PROBABILITES PHYSIQUES.

3.1 INCERTITUDE EPISTEMOLOGIQUE. (CET OBSCUR OBJET DE LA THEORIE DES PROBABILITES...).

Il nous faut maintenant faire retour sur plusieurs des problèmes soulevés par d'Alembert, en tentant de cerner, au travers de leur spécificité propre, la véritable nature des difficultés qu'il y voit, et qu'il exprime dans ses doutes, objections et remarques. Pour commencer, il semble que l'on doive attribuer une certaine signification au fait que les probabilités n'ont pratiquement pas de place dans son système des connaissances (101) : peut-être parce qu'elles n'ont pas d'objet propre, mais une diversité d'objets possibles, qu'ils soient de nature physique (lancer et chute de dés ou de pièces) ou relatifs à la vie sociale (statistiques sociales, causes de mortalité, espérances de vie), voire liés à des considérations morales (pour la mesure d'un risque ou la motivation d'une décision). Indéniablement, cette absence d'objet propre rend obscur aux yeux de d'Alembert le statut de la théorie des probabilités. Il ne l'envisage jamais comme une théorie mathématique que l'on pourrait considérer en elle-même - sauf à la confondre avec une simple et très élémentaire théorie des combinaisons - et sans doute sa conception des mathématiques comme science de l'abstraction d'objets réels, et non de la construction d'objets purement abstraits, permet-elle de comprendre l'incertitude fondamentale qu'il pouvait entretenir à l'égard d'une science sans objet véritablement défini (mais cette remarque pourrait, à un degré ou un autre, s'appliquer à tous les mathématiciens du siècle). Il est, à cet égard utile de remarquer que, parmi les exemples considérés par d'Alembert, ce sont toujours des événements concrets, soit physiques, soit sociaux, qu'il invoque pour interroger ce qu'exprime à leur sujet la théorie des probabilités ; il ne reprend jamais les énoncés probabilistes obtenus pour les comparer, par exemple, à ces expériences de simple combinatoire que seraient des tirages de boules dans des urnes (les seules qu'il aît considéré sont relatives, pour l'une, à une suite de lettres de l'alphabet, susceptible de révéler un ordre ou de porter une charge de sens, et, pour l'autre, tirage de cartes, où c'est la règle du jeu qui le retient) (102).

Bien qu'il affirme toujours ne pas mettre en cause la théorie mathématique des probabilités, mais seulement ses applications aux cas concrets, d'Alembert, donc, ne s'étend jamais sur elle, donnant à entendre qu'une telle théorie n'a pas en elle-même un grand intérêt. Dès lors, la théorie des probabilités qui retient son attention, c'est seulement celle qui s'applique à un objet précis, relatif au monde réel (et non un objet de convention comme le serait un tirage de boules), et c'est à ce niveau que les difficultés conceptuelles commencent. Théoricien des "mathématiques mixtes", d'Alembert a toujours marqué son souci, dans ses recherches de mécanique ou d'astronomie, de préciser les conditions d'application des mathématiques aux problèmes considérés, et de spécifier les conditions de l'idéalisation qui entraîne le choix d'un concept physique mathématisé donné (103). On conçoit dès lors que l'incertitude d'attribution d'un objet pour la théorie des probabilités laisse insatisfaite cette pensée éprise de rigueur et de clarté.

La théorie des probabilités est donc, pour d'Alembert, inséparable de ses applications. On peut toutefois distinguer, dans l'analyse thématique, ce qui concerne la théorie des probabilités proprement dite et ce qui se rapporte aux problèmes d'une science sociale ou d'une science de la décision (104).

A l'incertitude sur l'objet de la science des probabilités s'en joint une autre, sur son propos exact : c'est-à-dire sur la nature des conclusions que l'on peut espérer tirer de l'application du calcul des probabilités : s'agit-il d'attributions effectives (objectives) des événements physiques, d'une évaluation marquée par un degré d'ignorance, ou de décisions à prendre ? Cette ambiguïté est présente aussi bien en matière de jeux que de données sociales, et transparaît de manière frappante dans le concept d'espérance.

Comme théorie mathématique appliquée à des phénomènes naturels, le calcul des probabilités se présente en quelque sorte comme un palliatif pour traiter de l'incertain, et consiste précisément en une élaboration pour traiter de l'*incertain* désigné comme tel par principe. D'Alembert le conçoit bien ainsi, tout en marquant par ses considérations que l'objet de la théorie comporte davantage que la seule incertitude, et en admettant que ce serait une proposition bien vague de dire que la connaissance de l'incertitude participe de l'incertitude elle-même (105). C'est bien pourtant cette dernière idée qui semble ressortir de ses raisonnements, lorsqu'ils tentent de mettre en évidence la part de connaissance inassignable qui se trouve au coeur de la théorie des probabilités quand on l'applique à des phénomènes réels.

L'incertitude épistémologique sur l'objet et sur la fonction de la théorie a ainsi pour effet une incertitude sur la théorie elle-même ; *incertitude* est synonyme de *doutes*, et ce sont ces doutes sur la théorie telle qu'elle est communément reçue qui accompagnent constamment la pensée de d'Alembert, et qu'il voudrait voir partagés par les autres mathématiciens. Doutes, scepticisme, incertitude, mais non pas négation ou refus : ils sont repris au fil des textes, souvent de diverses manières, comme si d'Alembert ne parvenait à s'assurer ni de leur point exact d'application, ni de leur nature, ni même de leur bien-fondé. Dans chacun de ses textes, l'incertitude sur l'incertitude revient constamment sur le mode mineur. "Je ne sais", croit-il devoir préciser en note aux "Doutes et questions" de 1767, "si ces doutes sur certains principes généralement reçus dans le calcul des probabilités sont aussi fondés qu'ils me le paraissent" (106). Ou encore, dans le second mémoire de 1768, à propos des trois possibilités en deux coups pour croix ou pile, il se reprend - et c'est un aveu - : " je ne sais si je me trompe..." (107). D'Alembert ne cherche pas à cacher ses propres hésitations que rend manifeste la reprise régulière des mêmes problèmes et que révèlent des expressions assez fréquentes comme : "plus j'y pense", ou "ces raisonnements [...] ne sont pas concluants" (108).

Ses doutes sont, d'une certaine manière, une réaction contre des certitudes trop assurées, celles des mathématiciens qui admettent les règles de la théorie comme étant sans problème. C'est, à vrai dire, en direction des mathématiciens qu'il les émet pour l'essentiel, "espérant sensibiliser les géomètres, et les pousser soit à les lever, soit à modifier la théorie en conséquence", pour autant du moins qu'ils ne soient pas limités à cet "esprit de calcul" dont il parle autre part après Pascal, et se préoccupent des principes et des bases de leur connaissance : "... des doutes que je soumets au jugement des mathématiciens, mais à la vérité des mathématiciens habiles, qui seront en même temps philosophes" (110). Ce que réclame donc en premier lieu d'Alembert, c'est que soit reconnue la légitimité de la diversité d'opinions touchant différents points de la théorie des probabilités, dans la mesure où il s'agit d'une théorie mathématique appliquée à des situations réelles, et où, donc, il est nécessaire de préciser les conditions d'application qui comportent l'acception même des concepts employés : la diversité d'opinions et, donc, pour lui-même, le droit d'exprimer ses doutes. Les mathématiciens qui lui écrivent ne sont pas d'accord entre eux sur la manière de compter les probabilités à croix ou pile : il y a lieu de douter, c'est tout ce qu'il demande (111). Ou, à propos de l'improbabilité des arrangements réguliers et des répétitions : "peut-être me dira-t-on, pour dernière ressource, que si on cherche une cause aux effets symétriques et réguliers, ce n'est pas qu'absolument parlant, ils ne puissent pas être l'effet du hasard, mais seulement parce que cela n'est pas vraisemblable. *Voilà tout ce que je veux qu'on m'accorde*" (112). A un correspondant qui estimait que les objections de d'Alembert ont ruiné l'ancien calcul des probabilités, ce dernier répond : "je n'en demande pas tant, à beaucoup près ; je ne prétends point ruiner le calcul des probabilités, je désire seulement qu'il soit éclaici et modifié" (113).

En reprenant périodiquement l'exposé de ses doutes, d'Alembert définit les limites mêmes de ses interventions et de son programme en ce qui concerne le calcul des probabilités : montrer le caractère non évident de ses principes, le rendre conforme à l'expérience (celle acquise dans les jeux, qui incluent la prise en compte de considérations complexes, pas seulement de nature physique) (114), voire l'établir sur des bases objectives, qui transcenderaient sous certains rapports les aspects arbitraires de l'évaluation des risques. "Il faudrait", écrit-il dans l'un des mémoires du volume 4 des *Opuscules*, "pour que les règles de l'analyse des jeux fussent bonnes sans exceptions, que dans tous les cas, lorsque l'enjeu est fixé et donné entre deux joueurs, un troisième joueur survenant, puisse parier indifféremment pour l'un ou pour l'autre" (115). Il laisse à d'autres l'accomplissement de ce programme (116), concluant seulement par un scepticisme quant aux bases de la théorie : "je n'en sais rien", déclare-t-il au sujet des principes à adopter, "et je suis même très porté à croire que la matière dont il s'agit, ne peut être soumise, au moins à plusieurs égards, à un calcul exact et précis, également net dans ses principes et dans ses résultats" (117).

Plusieurs années plus tard, après avoir lu les mémoires de Bayes et de Laplace, et s'être rapproché sur plusieurs points de l'acceptation de la théorie des probabilités, il tiendra encore à maintenir le bien-fondé de principe de ses objections : "mais j'avoue que plus j'y ai pensé, plus je me suis confirmé dans mes doutes sur les principes de la théorie ordinaire (des probabilités) ; je désire qu'on éclaircisse ces doutes, et que cette théorie, soit qu'on y change quelques principes, soit qu'on la conserve telle qu'elle est, soit du moins exposée désormais de manière à ne plus laisser aucun nuage" (118).

3.2 La question du statut d'une theorie des probabilites *physiques*.

Lorsqu'il organise ses "Doutes et questions " de 1767 autour de la distinction épistémologique entre une possibilité *mathématique* et une possibilité *physique*, d'Alembert rend manifeste la nature de la question fondamentale qui se pose à la théorie des probabilités ; celle de son statut en tant qu'elle s'applique à des événements réels, et notamment à des événements physiques. C'est dès 1761, comme on l'a vu, qu'il soulève une distinction semblable entre des possibilités *métaphysiques* et *physiques*, à propos des suites répétées. "Dans la première classe" (celle des possibilités métaphysiques) sont toutes les choses dont l'existence n'a rien d'absurde ; dans la seconde (celle des possibilités physiques) sont toutes celles dont l'existence non seulement n'a rien d'absurde, mais même rien de trop extraordinaire et qui ne soit dans le cours journalier des événements". Nous avons vu plus haut ce qu'il entend par là quant aux répétitions d'événements : "il est *métaphysiquement* possible, qu'on amène rafle de six avec deux dés, cent fois de suite ; mais cela est impossible *physiquement*, parce que cela n'est jamais arrivé, et n'arrivera jamais. Dans le cours ordinaire de la nature le même événement (quel qu'il soit) arrive assez rarement deux fois de suite, plus rarement trois et quatre fois, et jamais cent fois consécutives : et il n'y a personne qui en toute sûreté ne puisse parier tout son bien, quel que grand qu'il soit, que rafle de six n'arriva jamais cent fois de suite" (119).

Quand il parle, en 1767, de "possibilité *mathématique*", il entend exactement par là ce qu'il désignait précédemment par "possibilité *métaphysique*". Si le terme s'est précisé, avec la spécification du caractère mathématique de ce genre de possibilité, c'est que d'Alembert s'est trouvé amené, dans le contexte du débat autour de ses objections, à préciser que ces dernières ne portent aucunement sur la théorie mathématique des probabilités elles-mêmes dans la mesure où elle n'est autre qu'une des théorie des combinaisons. Mais rien n'indique que les combinaisons doivent être prises sans modification pour traiter d'occurrences effectives, physiques. C'est d'ailleurs ce qu'il exprime dans les termes suivants : "ils s'agit de savoir si ces deux cas" (de suites mêlées de croix et pile, ou de séries répétées) "également possibles *mathématiquement*, le sont aussi *physiquement* et dans l'ordre des choses ; s'il est *physiquement* aussi possible que le même effet arrive cent fois de suite, qu'il l'est que ce même effet soit mêlé avec d'autres suivant cette loi qu'on voudra marquer" (120). Et, à ce propos du problème de Saint-Pétersbourg, c'est encore la répétition qui est au centre de la distinction : pile peut n'arriver jamais, et croix une infinité de fois de suite "dans la rigueur mathématique", mais cela est faux "physiquement parlant".

Il est intéressant de se demander ce qui fait, aux yeux de d'Alembert, le caractère <u>physique</u> des phénomènes invoqués. Il y faut, comme pour les objets des considérations purement mathématiques, la non-contradiction (qu'ils ne soient pas absurdes du point de vue logique), mais augmentée de conditions supplémentaires, qui se résument à la conformité à l'expérience commune. En quelque sorte, l'appel à l'expérience pour juger du caractère physique de nos suppositions est ici tempéré par un *principe de sens commun* qui stipulerait que les expériences en cette matière sont déjà un acquis de notre connaissance, dans la mesure où (mais c'est ici une interprétation de notre part) elles correspondent à notre intuition pratique. Celle-ci d'ailleurs s'étaye non seulement sur notre propre intuition de ce que sont les phénomènes dans leur nécessité (et nous verrons plus loin qu'ils requièrent une causalité qui, précisément, rend compte de leur caractère physique), mais sur la pratique des joueurs. Quand d'Alembert envisagera des expériences possibles, elles en resteront au niveau des expériences simplement pensées, sans doute en raison de la nature délicate - et toujours discutable - des protocoles requis pour les réaliser.

Le résultat est que, par rapport au grand nombre voire à l'infinité des possibilités purement mathématiques, la considération des possibilités physiques entraîne des restrictions (ce qui prend l'apparence d'une vérité intuitive) : "Il y a des combinaisons qu'on doit exclure, quoique *mathématiquement* possibles, lorsque ces combinaisons sont contraires à l'ordre constant observé dans la nature". Et encore : "la combinaison où l'on suppose que *pile* ou *croix* arrive 100 ou 50 fois de suite, est absolument à rejeter, quoique *mathématiquement* aussi possible que celles où <u>croix</u> et <u>pile</u> seront mêlés". Et d'Alembert de conclure sur ce point : "je pense en avoir assez dit pour convaincre mes lecteurs que les principes *du calcul des probabilités* pourraient bien avoir besoin de quelques restrictions lorsqu'on voudra les envisager *physiquement*" (121).

La raison véritable de la distinction réside en ce que les mathématiques ne disent rien sur les lois de la nature auxquelles sont soumis les événements physiques : leurs objets sont simples et c'est "à la simplicité de leur objet" qu'elles " sont principalement redevables de leur certitude" (122), alors que les événements et les objets physiques sont de nature complexe et demandent, pour être justiciable de traitement mathématique, que l'on procède à des abstractions justifiées (et légitimées en raison). Il est significatif à cet égard que d'Alembert prenne un terme de comparaison avec un phénomène hautement physique (soumis à des lois de la nature indubitables et exemplaires) comme une configuration astronomique. *Mathématiquement parlant*, indique-t-il dans un des textes de 1768, il est aussi probable que les périodes respectives de rotation de la Terre et de la Lune soient dans un rapport donné ; ou que les planètes de trouvent situées dans n'importe quelle zone de la sphère céleste. Mais, *physiquement*, la Lune et la Terre tournent sur elles-mêmes en phase ; les planètes sont groupées près du plan de l'écliptique. Dans ces cas-là, que règlent les lois de l'astronomie, on ne s'en tient pas à l'équiprobabilité mathématique (123).

La simple combinatoire est aveugle au caractère physique des phénomènes et cela seul suffit à susciter un doute sur le statut théorique du calcul des probabilités. Ce doute, d'Alembert l'entretiendra constamment, et on le voit reprendre, en 1780, la distinction des possibilités *mathématiques* et *physiques*, relativement à l'équipossibilité des effets indépendamment de ceux qui les ont précédés (124).

Il n'est pas inutile de noter ici que, pour d'Alembert, les probabilités *physiques* ne sont pas des probabilités appliquées à la physique et à ses lois - elles ne deviendront telles qu'avec Laplace. La théorie (physique) des probabilités concerne seulement les probabilités en tant qu'elles sont appliquées à des situations physiques, dont, pour diverses raisons, on se trouve amené à ne pas considérer les lois précises, dont on sait toutefois qu'elles relèvent (125). Indiquons ici que les développements ultérieurs des conceptions sur les probabilités ont fait droit à la distinction des probabilités mathématiques et physiques : nous le verrons à propos de certains des thèmes comme l'équiprobabilité ; mais il suffit de rappeler que c'est une telle distinction qui amena Laplace à considérer, avec sa *Théorie analytique des probabilités*, une solution mathématique comme asymptotique d'une situation physique, ou de mentionner les réflexions de Condorcet qui opèrent la distinction de d'Alembert, tout en la faisant aboutir différemment (126). Ou encore, de signaler que Cournot, qui ne se satisfaisait pas, pour la probabilité d'un arrangement remarquable (une répétition, par exemple) de la solution de Bayes-Laplace, estimait qu'il s'agissait là d'une probabilité *philosophique*, impossible à exprimer rigoureusement (127). A quelque degré, les uns et les autres répondent à ce "doute" de d'Alembert.

3.3 LA MARQUE EPISTEMOLOGIQUE DU PROBLEME DE SAINT-PETERSBOURG.

La réflexion de d'Alembert sur les divers aspects de la théorie des probabilités s'est toujours soutenue d'une exemple particulier, porté au rang de cas-témoin : le problème de Saint-Pétersbourg, auquel il en revenait toujours, de l'article "Croix ou pile" aux dernières considérations de 1780. C'est qu'il portait à ses yeux (comme d'ailleurs à ceux de ces contemporains) l'essence même des difficultés à établir une théorie des probabilités qui fût satisfaisante.

Posé par Nicolas Bernoulli parmi d'autres problèmes de probabilités dans une lettre à Montmort en 1713, reformulé par Cramer, puis par Daniel Bernoulli (127 bis), le problème connu sous le nom de Saint-Petersbourg (127 ter) fut formulé par ce dernier en 1731, publié en 1738 (127-4), et ne cessa d'être l'objet de débats entre les "géomètres" (127-5), débats qui sont inséparables de l'histoire du calcul des probabilités, et qui ont contribué à en éclairer les fondements (127-6). Pour d'Alembert, le problème de Saint-Petersbourg a été l'exemple paradigmatique des difficultés de la théorie des probabilités. Il n'est pas exagéré de dire qu'il s'agissait à ses yeux de l'application type de la théorie, dans la mesure où les paradoxes du problème étaient par lui transcrits comme des paradoxes de la théorie même, et où s'il y avait une solution à chercher, elle devait l'être en demeurant à l'intérieur des conditions et des circonstances propres au problème, supposées être caractéristiques de celles de la théorie.

Selon la règle habituelle des probabilités, la somme espérée au coup de rang n est 2^{n-1}, la probabilité de gagner est $1/2^n$; l'espérance particulière à chaque coup est 1/2, et l'espérance totale est infinie, d'où un enjeu infini, "ce qui est absurde". Les solutions proposées, par exemple dans les mémoires de Saint-Pétersbourg, ou par d'autres savants - celle de Buffon par exemple - ne lui paraissaient pas propres à éclairer le fond du problème, dans la mesure où elles étaient de nature "externe" par rapport à la théorie des probabilités, en s'appuyant sur des circonstances particulières et subjectives (128). Par ailleurs, la diversité même de ces solutions, contradictoires les unes avec les autres, plaidait à ses yeux pour une insuffisance de la théorie même (129). De l'insatisfaction qu'il exprime à l'égard des diverses solutions proposées - d'ailleurs contradictoires entre elles, nous pouvons retenir deux exigences sur la théorie requises par d'Alembert : la première est qu'elle soit suffisante par elle-même, sans avoir à recourir à des justifications ou à des propositions (telles que des règles supplémentaires) qui lui seraient externes ; la seconde est d'être objective en suscitant un consensus sur des solutions qui ne soient plus optionnelles mais nécessaires.

Cela étant, il lui apparut très vite que la clé du problème résidait dans l'hypothèse d'équipossibilité des événements, qu'il estima dès lors en défaut (130) : "Ce n'est donc pas l'infinité (supposé possible) de la durée du jeu, qui rend ici le résultat absurde, mais la supposition seule que l'un des deux coups arrive constamment un très grand nombre de fois de suite", indique-t-il, par exemple, dans une reprise du problème de Saint-Petersbourg en 1768 (131). L'élaboration d'une théorie satisfaisante des probabilités passait dès lors par une critique de cette hypothèse sur laquelle personne, semblait-il, ne s'interrogeait, et par un calcul alternatif de l'espérance ou de l'enjeu, utilisant une forme non équiprobable des événements individuels d'une série. Il n'existerait toutefois aucune raison impérative de prendre une forme plutôt qu'une autre ; d'Alembert en proposa plusieurs, susceptibles de rendre l'enjeu raisonnable sans autres hypothèses supplémentaires, et qui décroissaient donc plus vite que 1/2 (132) : la probabilité n'est plus la même à chaque coup et dépend du rang n du coup.

Le caractère privilégié et quasiment exclusif du problème de Saint-Pétersbourg comme référence de la réflexion probabiliste de d'Alembert en limitait évidemment le champ, lui interdisant de dépasser les difficultés particulières à ce problème (132 bis), qui étaient réelles (133).

3.4 REGLES ET INTERPRETATIONS

Le calcul des probabilités, dans les jeux de hasard, apparaît toujours lié, par les circonstances de son application, au choix d'une règle (règle du jeu, mais aussi nature de l'estimation) et à une interprétation de la signification des quantités calculées dont il lui semblait difficile d'établir l'unicité et le bien-fondé. Ses premières objections à la règle de calcul du jeu de croix ou pile en deux coups sont caractéristiques de son attitude devant ce qu'il considérait être des principes arbitraires. Tel qu'il exprime le problème, par exemple, dans une reprise de 1768, ce n'est pas la même chose de jouer en deux coups avec une seule pièce, ou en un coup avec deux pièces. Dans le premier cas on aurait trois combinaisons possibles, dans le deuxième, quatre combinaisons : croix et croix compterait dans ce cas, "au lieu que dans le premier cas, dès que la pièce est jetée et qu'elle amène *croix* il est aussi inutile que ridicule de la jeter une seconde fois" , puisque cela n'entre pas en ligne de compte dans le jeu. "Ce serait une puérilité que de dire qu'on doit compter le second coup lorsque croix est arrivé en premier, par la raison qu'on est convenu de jouer *en deux coups* ; car convenir de jouer *en deux coups* n'est pas convenir de jouer *deux coups*, quelque choix qu'il arrive, puisqu'il serait illusoire et ridicule de jouer le second coup, si croix arrive le premier" (134).

Ainsi, l'arbitraire dans le choix d'une règle du jeu gouvernerait-il, aux yeux de d'Alembert, le caractère flou et ambigu des principes du calcul des probabilités.

Il convient d'ailleurs de remarquer que ce caractère lui-même explique en partie l'incompréhension par divers auteurs des considérations de d'Alembert sur le calcul. Karl Pearson a justement noté à ce propos que "souvent l'erreur n'est pas aisée à exprimer clairement, et parfois elle provient de ce que d'Alembert est en train de résoudre un problème différent de celui de l'auteur qu'il critique" (134 bis).

Sur ce thème des définitions, indiquons un aspect qui anticipe sur le problème de l'espérance dont nous allons parler, et qui s'ajoute aux raisons de mettre en doute le bien-fondé du concept ; il contribue en tout cas à souligner ce que le concept d'espérance (et celui corrélatif d'enjeu) a d'obscur en mettant en évidence son caractère arbitraire. D'Alembert rappelle en effet cette remarque de Buffon (134 ter) selon laquelle, dans les jeux de hasard, la perte est toujours relativement plus grande que le gain : en effet, x étant le bien, a le gain ou la perte, le gain réel ou la perte réelle sont $x/(x+a)$ pour le premier, $x/(x-a)$ pour la seconde, et le premier est donc toujours supérieur à la seconde $(x/(x + a) > x/(x - a))$. Ce qui devrait conduire à un calcul différent des enjeux. Il en va de même pour la définition de l'espérance de vie, qui peut aussi bien être donnée par une moyenne simple que par le temps au bout duquel la moitié des personnes considérées sont mortes (135). Pour d'Alembert, cet arbitraire dans les définitions incline à modifier les lois habituelles de probabilité.

3.5 COMPOSITION DES PROBABILITES ET ESPERANCE.

On trouve chez d'Alembert, exprimées dès les premiers textes sur les probabilités, deux idées qui vont contre la mathématisation pure et simple des événements aléatoires ; l'une concerne la composition des probabilités, l'autre la forme de l'espérance. Toutes deux reviennent à accorder à la probabilité d'un événement une caractéristique qualitative qui interdit de la résoudre en une simple attribution numérique.

A propos de la composition des probabilités, c'est dès 1761 que, méditant sur le jeu de croix et pile en deux coups, d'Alembert remet en cause la règle reçue, qui fait conclure à quatre combinaisons équiprobables (CC, CP, PC et PP) alors qu'il n'y a que trois coups de joués (C,PC et PP). Il avance l'idée que la probabilité d'un événement n'est pas seulement un nombre, qu'elle porte une qualité, affectée pour un degré de certitude ou d'incertitude, que des probabilités de qualité différente ne peuvent être combinées aveuglément. A ses yeux, un événement réalisé est devenu certain, et a ainsi changé de nature par rapport à son état antérieur d'événement seulement probable, donc *incertain*. Dans la composition de deux probabilités successives on fait comme si l'on ignorait que le premier s'est déjà produit (et a ainsi changé de statut par rapport à l'incertitude) quand le deuxième va se passer. Remarquons - pour y revenir au paragraphe sur le temps - que cette conception est reliée au caractère temporel de la succession des événements : un événement physique porte la marque du temps. D'où la règle - négative - de d'Alembert : on ne peut composer entre elles des probabilités hétérogènes (136). Revenant sur le même problème dans le texte de 1768, et contestant la réponse de la théorie ordinaire (invoquée par exemple par Necker) selon laquelle "la probabilité du premier (coup) est 1/2, et celle des deux autres 1/2 x 1/2 = 1/4", il exprime à nouveau la même idée : "Plus j'y pense, et plus il me paraît que *mathématiquement* parlant, ces trois coups sont également possibles par la raison que *croix* ou *pile* arrivant au second coup, suppose que *pile* est nécessairement arrivé au premier, en sorte que le second cas *pile* et *croix*, ainsi que le troisième cas *pile* et *pile* ne forment chacun qu'un seul cas individuel et comme un seul coup, aussi unique, aussi indivisible que le premier cas *croix* et par conséquent aussi possible..." (137). Nous avons évoqué plus haut (137 bis) le cas de tirages au hasard de cartes à jouer, pour lequel d'Alembert effectue ses comptages de combinaison sans composer les probabilités des coups passés et futurs, pour la même raison.

Quant à la critique de l'espérance comme concept d'une théorie des probabilités, elle comporte également la considération du caractère hétérogène de probabilités relatives à des situations physiques différentes ; mais elle rend manifeste en premier lieu l'importance de l'interprétation, et c'est surtout dans les textes de 1767 et postérieurs qu'elle est vraiment formalisée. D'Alembert a abordé le problème de l'espérance en premier lieu par le biais de son rapport à la probabilité, lié au caractère subjectif du choix étant donné le risque, en matière de jeux mais aussi bien lorsqu'on évalue des espérances de vie. "Il ne faut point multiplier (comme on l'a prescrit jusqu'à présent)", estime-t-il en 1761, une probabilité fort petite par le gain espéré pour avoir l'enjeu ou l'espérance", et l'on ne peut ajouter des espérances qui correspondent à des probabilités très différentes ; l'un des problèmes que devrait, à ses yeux, résoudre une théorie satisfaisante des probabilités, c'est la manière dont il faut "estimer l'espérance ou l'enjeu selon que sa probabilité est plus ou moins grande" (138). C'est encore, en 1767, l'estimation (subjective) des risques qui semble gouverner la mise en cause de l'espérance. D'Alembert déclare en effet, à propos du problème de Saint-Petersbourg : "les règles de probabilités sont en défaut lorsqu'elles proposent, pour trouver l'enjeu, de multiplier la somme espérée par la probabilité du cas qui doit faire gagner cette somme ; parce que, quelqu'énorme que soit la somme espérée, la probabilité de la gagner peut être si petite, qu'on serait insensé de jouer un pareil jeu". La remarque s'applique également à des cas plus simples que celui de Saint-Petersbourg, dans lesquels on peut avoir à considérer de grandes sommes à gagner mais pour une probabilité infime : "il est bien sûr que quelqu'un gagnerait à cette loterie", et "il y a donc une espérance de gagner" (139) : le fait qu'il y aît, dans les termes dont on fait la somme, des probabilités très différents en valeur (ou encore en nature, selon ce qu'on a vu au sujet de leur composition), vide en quelque sorte l'espérance d'une signification réelle. Qu'on imagine propose d'Alembert, cent combinaisons, dont 99 feraient gagner un écu pour une qui en ferait gagner cent ; dans les deux cas l'espérance, selon la théorie, devrait être la même, mais on voit bien qu'elle ne l'est pas. L'argument est bien lié au problème de la décision et ce n'est pas l'espérance qui la dictera.

Le concept d'espérance ne lui paraît pas clair, et c'est une notion qu'il tentera, après l'avoir critiquée, d'éviter, comme on le voit dans ses propres essais de donner une théorie de l'inoculation. La distinction, faite par Daniel Bernoulli, entre l'espérance mathématique et l'espérance morale (139 bis), ne semble pas le retenir, la première étant inséparable de l'autre ou bien n'ayant aucun sens, puisqu'elle sert à la décision (du moins est-ce ainsi que nous pouvons interpréter le silence de d'Alembert sur ce point, en gardant à l'esprit ses considérations sur l'inoculation, où l'aspect moral et subjectif est le plus manifeste). Remarquons ici que Condorcet partageait les critiques de l'espérance formulées par d'Alembert : "je suis", écrivait-il à Turgot en 1772, " au fond de l'avis de M. de D'Alembert et nous ne différons que sur quelques détails" (139 ter). Même si ces "différences" se sont par la suite accentuées (elles portent surtout sur la portée générale des probabilités en matière de connaissance), Condorcet a toujours maintenu sa critique de l'espérance mathématique dans le sens de d'Alembert ; elle le conduisit à délaisser le sens pascalien qui s'y attachait (ce sens moral dont d'Alembert la voyait toujours imprégnée), pour n'y voir qu'une moyenne relative à des ensembles statistiques d'événements, et à dénier qu'elle fût applicable au problème de Saint-Petersbourg, sauf à considérer un grand nombre de jeux (139-4).

Ce n'est d'ailleurs pas seulement l'aspect subjectif de l'espérance qui paraît à d'Alembert générateur d'obscurité, mais sa forme même comme espérance *mathématique*. L'idée d'espérance, écrit-il en 1768, "renferme deux choses, la somme qu'on espère, et la probabilité qu'on gagnera cette somme. Or il me semble que c'est principalement la probabilité qui doit régler l'espérance" : cette formulation même indique assez comment l'espérance comme quantité est marquée par son aspect moral. D'où cette conclusion qu'il faut peut-être estimer l'espérance autrement que par le produit de la probabilité par la somme à espérer ; conclusion que renforce cette considération que "mille probabilités ne feront jamais une certitude", alors que la notion d'espérance est impuissante à les distinguer (140). D'Alembert revient encore un peu plus tard sur le sujet : l'espérance devrait dépendre de la seule probabilité et on la confond, dans la théorie courante, avec la somme espérée ; on compare des choses disparates comme la certitude et la probabilité (141).

Dans le calcul des quantités, c'est l'hétérogénéité des probabilités que d'Alembert incrimine : probabilités différentes dans les ordres de grandeurs, mais aussi dans leur nature (comme on l'a vu à propos de leur composition) ; cette différence d'affectation des probabilités échappe au calcul, étant de l'ordre du qualitatif : il y a une discontinuité entre une probabilité même grande et une certitude (exprimée par une probabilité strictement égale à 1). Or, la règle du calcul de l'espérance est insensible à ces différences, composant des probabilités indépendantes du rang des coups pour chaque espérance partielle, et additionnant ces dernières pour obtenir l'espérance totale.

En 1780 d'Alembert revient encore sur ce point, remarquant, toujours à propos du problème de Saint-Pétersbourg, que, dans le calcul de l'espérance l'on ajoute les espérances partielles alors qu'elles s'excluent l'une l'autre (et c'est encore cette idée que si l'on gagne au deuxième coup c'est que l'on n'a pas gagné au premier) et persiste à trouver que, pour cette raison, la théorie, si elle n'est pas nécessairement inexacte, "s'énonce au moins d'une manière obscure et peu satisfaisante" (142). Il continue de penser que c'est mal à propos que l'on appelle, dans la conception courante, "l'espérance le produit de *la somme espérée* par la probabilité" ; "c'est la probabilité seule qui forme l'*espérance* véritable, et comme la *somme espérée*, quelque grande qu'elle soit, n'augmente pas cette *probabilité*, il me semble qu'on ne doit pas multiplier cette somme par la probabilité pour avoir ce qu'on nomme l'*espérance* du joueur". Ce que le joueur doit donner est certes en raison de la probabilité et du gain espéré, mais pas nécessairement directe" (143).

Mais, sous toutes ces considérations, qui se fondent notamment sur une idée des probabilités qui échappe à la transparence mathématique (et qui est ainsi imprégnée à quelque degré de l'approche en termes de choix subjectif des risques), une raison plus fondamentale du point de vue de la nature physique des événements se profile, et c'est encore le problème de Saint-Pétersbourg qui la révèle : c'est la probabilité quasiment nulle d'une suite infinie répétée (144), qui constitue en réalité pour d'Alembert le point d'achoppement le plus sérieux de la théorie ordinaire.

Si nous avions besoin d'une confirmation de ce que, d'une part, la question de la composition des probabilités l'a toujours préoccupé et, d'autre part, ce sont les problèmes fondamentaux des probabilités qui sont premièrement en question dans la discussion des applications, nous la trouverions dans l'un de ses tout derniers écrits, resté inédit. Dans ce mémoire, à propos de l'inoculation, il revient sur la distinction - et l'absence de rapport - entre certitude et probabilité (144 bis). "En général", reprend d'Alembert qui avait exprimé la même idée tant de fois à propos des jeux, "quand il y a d'une part certitude et probabilité, de l'autre deux probabilités seulement, peut-on comparer ces deux cas, et la certitude du risque (très petit si l'on veut) où l'on s'expose, n'est-t-elle pas toujours plus dangereuse que la probabilité (très grande si l'on veut) de succomber à un danger dont la probabilité est très petite ? En effet il y a d'une part la *certitude* de courir un risque, et de l'autre la *probabilité* seulement d'en courir un. Or les deux cas sont-ils parfaitement le même ?" (144 ter).

C'est l'hétérogénéité des probabilités correspondant à des réalités différentes (dans la physique comme dans la vie sociale) qui est encore en cause dans une dernière critique de la signification de l'espérance de vie considérée pour le cas individuel, dans le cas d'un nouveau-né ou d'un vieillard de 75 ans. Ce dernier exemple rend particulièrement clair que l'hétérogénéité des probabilités, qui vide de signification les calculs de composition ou d'espérance, et cette "charge qualitative" qu'elles portent, sont liées à ce que d'Alembert envisage de qualifier les probabilités pour les cas singuliers, raison d'être, à ses yeux, de leur application dans le cas statistique.

D'Alembert le décrit ainsi (144-4) :"La difficulté reste la même si l'on ne prend d'un côté qu'un *seul* enfant nouveau-né pour rentier, et de l'autre un *seul* homme de 75 ans ; car il y a quelque probabilité que l'enfant supposé vivra encore au bout de 30, 40, 50 etc jusqu'à 100, au lieu qu'il est sûr que l'homme de 75 ans ne vivra pas au-delà de 25 ans. Il est vrai que supposant, comme on le fait ici, les vies moyennes égales de part et d'autre, la somme totale des probabilités [...] est la même des deux côtés ; mais le *nombre* des probabilités est beaucoup plus grand dans le premier cas (celui de l'enfant nouveau-né) ; d'où il résulte que les probabilités partielles, dans le premier cas, sont beaucoup plus petites que dans le second, au moins dans un très grand nombre de termes et surtout dans les derniers. Or peut-on regarder comme absolument les mêmes (quant aux résultats qui doivent en provenir) deux sommes de probabilités égales, mais dans la première desquelles il y a beaucoup plus de termes que dans l'autre, termes beaucoup plus petits à la vérité (au moins pour la plupart) que ceux de la seconde suite ? Il me semble que l'on peut révoquer en doute cette identité (supposée parfaite) surtout dans le cas présent, où passé 25 ans les probabilités sont nulles dans le second cas et sont encore quelque chose dans le premier cas, jusqu'à l'âge de 100 ans..".

Nous évoquerons plus loin la réponse de Condorcet sur l'espérance comme enjeu le moins injuste dans un jeu nécessairement inégal. Les critiques de d'Alembert laissent voir également la difficulté de l'absence d'un concept clair de variable voir également la difficulté de l'absence d'un concept clair de variable aléatoire (malgré Nicolas Bernoulli), laquelle est généralement identifiée à son espérance mathématique (il faudra attendre Tchébycheff et les développements ultérieurs avec les notions de variance, de moment, etc...).

3.6 LES TRES PETITES PROBABILITES CONSIDEREES COMME NULLES ET L'INDETERMINATION FONDAMENTALE.

La méditation du problème de Saint-Petersbourg - clé pour d'Alembert des difficultés conceptuelles de la théorie des probabilités - lui permet donc d'assigner, par delà les aspects subjectifs, une propriété des probabilités qui relève de leur seule considération pour ainsi dire interne, c'est-à-dire qui se rapporte à ce qui en elles est de l'ordre de la nature physique : c'est par elle que l'on peut parvenir à une valeur non infinie de l'espérance et de l'enjeu. D'Alembert a énoncé cette condition dès 1761, à propos précisément du calcul de l'espérance au jeu de croix et pile : "quand la probabilité d'un événement est fort petite, elle doit être regardée et traitée comme nulle" (145). Cette règle, il la met en oeuvre dans les cas d'application des probabilités, notamment l'inoculation. Elle représente, à ses yeux, une condition d'utilisation des probabilités aux phénomènes réels, justifiée par la considération du problème de l'équiprobabilité, et constitue une adaptation de la définition mathématique des probabilités aux conditions du monde réel. Elle appartient dès lors à la définition du concept "physique" de probabilité.

Mais cette règle, définitoire de l'applicabilité du concept, comporte un point d'obscurité, qui marque une indétermination fondamentale. Malgré le caractère continu des variations des probabilités, il existe un "terme où la probabilité commence à pouvoir être considérée comme nulle". Rien, a priori, ne permet d'assigner ce terme, du moins par les moyens de l'analyse mathématique, et c'est pour d'Alembert, en 1761, une bonne raison pour voir que la règle générale des probabilités "est fautive et imparfaite" (146). Mais cette imperfection de la théorie n'est-elle pas inhérente à son objet lui-même ? C'est ce qui semble ressortir de la position de d'Alembert telle qu'il la réaffirme au long des années. Car l'indéterminé, l'indéfini, l'inassignable, assigne les limites des probabilités, comme marquant en elles une faille ; mais c'est une marque pour ainsi dire objective. D'Alembert l'établit sur une distinction, déjà rencontrée, entre le certain et le nécessaire, c'est-à-dire le physique (ou relatif à la nature) et le mathématique (rationnel, métaphysique en ce sens précis). Au jeu de croix ou pile en cent coups, ce n'est pas au centième coup que croix arrivera, mais bien avant : "croix arrivera *certainement* avant le centième coup, bien qu'il ne doive pas arriver *nécessairement*" (147). Il arrivera certainement avant, parce qu'il s'agit d'un événement physique ; mais pas *nécessairement*, en ce sens qu'on ne peut le dire par la considération de la nature même, exprimée dans sa rationalité propre (tel est le sens de "nécessaire" dans l'épistémologie de l'Alembert) (148), puisque l'on ne sait pas quand il doit se produire, ni pourquoi. C'est l'inassignation du moment, et de la cause ; mais, bien qu'on ignore la cause, on sait bien qu'il y a l'effet. Si on le sait, c'est parce qu'il est de l'ordre des choses physiques, c'est-à-dire observé (ou idéalement observable), que les mêmes événements ne se répètent pas indéfiniment, et que les probabilités de répétitions sont moindres que celles des variations. C'est parce que cet effet physique, appartenant à l'ordre de la nature, ne se laisse pas enserrer par une cause, qu'il est inassignable et voué à l'indétermination (149).

Mais cette indétermination, que, pour cette raison, l'on est tenté de qualifier d'objective, n'est pas telle aux yeux de d'Alembert : elle est due, semble-t-il, à l'imprécision même de l'objet des probabilités, dans la mesure où celui-ci fait abstraction par principe de la considération des causes, et où la probabilité vise en dernier ressort à déterminer les conduites, à juger de choses morales (150). En quelque sorte l'indétermination fondamentale est la marque de l'impossibilité de libérer les probabilités de leur aspect subjectif.

3.7 SEQUENCES REPETEES, UNIFORMITE ET CAUSALITE.

La question de la possibilité des séquences répétées (soulevée à propos du problème de Saint-Petersbourg) domine chez d'Alembert toute la pensée d'une théorie des probabilités physiques (c'est-à-dire conçue en fonction de son application au monde naturel). En affirmant la nécessité de trouver une solution "interne" au problème, d'Alembert prônait par là-même la revendication d'une telle théorie, exempte de difficultés et paradoxes, pleinement rationnelle, satisfaisante quant aux applications à des phénomènes réels. Il demandait de restreindre l'énoncé des solutions possibles à la seule considération du caractère physique (ou naturel) des événements, en faisant abstraction de considérations morales et subjectives. Le caractère fini de la durée du jeu, condition d'une solution, ne devait dès lors résulter que de la nature des phénomènes : c'est d'elle-même, sans intervention externe, que la séquence répétée d'un même événement (CCC... par exemple) doit prendre fin (et la probabilité s'annuler, comme on l'a vu). Ainsi le caractère fini des répétitions de séquences apparaît-il comme la contrepartie "objective" de l'affirmation de la possibilité d'une théorie des probabilités physiques.

Cette probabilité des séquences d'événements inférée des conditions d'un problème particulier porté à un rang exemplaire, lui paraissait correspondre à ce qu'enseigne l'expérience, aussi bien quotidienne que celle des praticiens des jeux (151), confortée par les indications du sens commun. C'est en effet sur le ton de la constatation de l'évidence d'un phénomène (comme on dirait "les corps tombent", ou "les planètes s'attirent") que d'Alembert énonce *une loi de non-répétitivité* des événements naturels (152), selon laquelle les combinaisons les plus probables et les plus possibles de toutes, si l'on jette par exemple cent fois de suite une pièce en l'air (donnant 2 combinaisons) dont celles où C et P se trouvent mêlées "sans se trouver un grand nombre de fois de suite" (153). Ou encore : "dans le cours ordinaire de la nature, le même événement (quel qu'il soit) arrive assez rarement deux fois de suite, plus rarement trois et quatre fois, et jamais cent fois consécutives" (154). Plus généralement : "la variété des événements successifs est un phénomène constant de la nature ; et [...] leur similitude constante ou répétée un grand nombre de fois, est au contraire un phénomène qui n'arrivera jamais" (155). Ou, dans une formulation voisine, de 1767 : "par quelle raison croix ne saurait arriver une infinité de fois de suite, *physiquement parlant* ? On ne peut en donner que la raison suivante : *c'est qu'il n'est pas dans la nature qu'un effet soit toujours et constamment le même, comme il n'est pas dans la nature que tous les hommes et les arbres se ressemblent*". (156). Ce qui est en quelque sorte invoquer une loi de la diversité des phénomènes naturels, loi de caractère qualitatif, et dont d'Alembert ne voit pas qu'elle pourrait être précisée quantitativement, à l'aide du calcul des probabilités lui-même (il ne s'approchera de cette éventualité qu'en 1780). Le caractère physique de telles constatations, érigées en quasi-lois, peut, pour d'Alembert, être étayé sur des expériences, qu'il suggère et dont il annonce le résultat prévisible (encore qu'il le fasse sur le mode de la conviction personnelle, "je crois que..."). Il s'agit "d'estimer le rapport des probabilités" d'événements répétés et non-répétés "par le nombre des événements", en effectuant un grand nombre d'expériences simultanées (157). "Je crois", conclut-il, après en avoir exposé le principe, "que les combinaisons qui seront répétées le plus rarement, et qui peut-être n'arriveront point du tout dans un grand nombre de jets, seront celles dans lesquelles croix se trouve quatre fois de suite, ou pile quatre fois de suite".

C'est encore en s'appuyant sur le jugement de l'intuition commune que d'Alembert relie la répétition et la causalité : la pratique des joueurs, qui ne parient pas sur de longues répétitions, suppose que, dès lors qu'on observe une suite répétée, on imagine une cause, une supercherie (157 bis). "Ce qu'on vient de dire" (sur les joueurs qui parient croix après une série de pile) "est fondé sur la supposition que *pile* ne soit pas arrivé de suite un très grand-nombre de fois : car il serait plus probable que c'est l'effet de quelque cause particulière dans la construction de la pièce, et pour lors il y aurait de l'avantage à parier que *pile* arriverait encore" (158). D'Alembert revient constamment sur cette idée et, variant les exemples et les nombres de coups, comme s'il cherchait à s'en persuader davantage, se convaincre que la répétition est l'indice d'une causalité : si croix arrive cent fois de suite, on pariera pour qu'il arrive une cent-unième, parce qu'on supposera qu'il y a une cause particulière à cela, vraisemblablement que le côté pile est plus pesant et se trouve en-dessous (159).

La théorie commune des probabilités fait en somme obstacle, pour d'Alembert, à la prise en considération du caractère physique, c'est-à-dire en fin de compte causal, d'un effet qui révèle d'une certaine manière un ordre : telle est l'observation d'une grande répétition dans les jeux de hasard que l'on persiste à traiter comme si aucun ordre n'y était sous-jacent, en maintenant rigoureusement l'équiprobabilité des séries. Car, en dehors du domaine que l'on attribue à la théorie des probabilités, c'est toujours l'idée du sens commun qui prévaut, rattachant un ordre à une causalité. D'Alembert en donne des exemples, qui apparaissent communément dans les débats de l'époque, et qui parlent à l'intuition, en raison soit de leur charge de sens (c'est le cas des anagrammes ordonnés), soit de leur caractère évidemment physique et causal (dans le cas d'arrangements planétaires).

Ces exemples significatifs sont les suivants (160). Pour le premier : nous sommes accoutumés à considérer qu'une combinaison de lettres qui fait sens (celle, par exemple, dans des variantes d'un anagramme, qui forme un mot) n'est pas le résultat d'un simple arrangement au hasard (161). Du point de vue des probabilités, "mathématiquement parlant", les arrangements doués de sens ou ordonnés et ceux de simple hasard sont également possibles. Pourtant n'importe qui (du moins tout "homme sensé") verra bien que les premiers ne sont pas l'effet du hasard, ne sont pas "également possibles, physiquement parlant, quoique la possibilité mathématique soit égale et la même" pour tous.

Le second exemple invoqué est celui de l'égalité des périodes de rotation de la terre et de la lune que nous avons mentionné plus haut : une différence donnée de périodes serait tout aussi probable, "mathématiquement parlant". Pourquoi, alors, "chercher une cause au premier et non pas au second ?". Le troisième est emprunté à un travail d'astronomie de Daniel Bernoulli, son mémoire sur la cause par laquelle "*les orbites des planètes sont renfermées dans une très petite zone parallèle à l'écliptique , et qui n'est que la dix-septième partie de la sphère* ; D. Bernoulli y invoquait les probabilités, calculant combien il y a à parier que les cinq planètes jetées au hasard autour du soleil s'écarteraient ainsi que du plan où tourne la terre, et trouve 1/140 000, "d'où il conclut que cet effet n'est point dû au hasard, et en conséquence il en cherche la cause". Et d'Alembert s'interroge : "quelle peut en être la raison ? sinon encore une fois parce qu'on regarde comme très-vraisemblable, et presque comme évident qu'une combinaison où il paraît de la régularité et une espèce de dessein, n'est pas l'effet du hasard, quoique, *mathématiquement parlant,* elle soit aussi possible que toute autre combinaison où l'on ne verrait aucun ordre ni aucune singularité, et à laquelle, par cette raison, on ne penserait pas à chercher une cause". "Pourquoi Bernoulli", se demande d'Alembert, "cherche-t-il un ordre dans ce cas, et pas quand il s'agit de lancers de dés ?" Ironisant, il évoque un dé à 17 faces (qui serait évidemment plus ressemblant à un objet matériel, comme les corps célestes, et moins abstrait de ses propriétés physiques, qu'à un objet de jeu de hasard). Dans le cas de l'arrangement des planètes, toute autre configuration d'inclinaisons données différentes pour chaque planète serait pourtant aussi bien unique. Et d'Alembert de renvoyer Daniel

Bernoulli à "s'accorder avec lui-même" et à "faire entendre ses raisons" pour lesquelles il ne recherche pas une cause à certaines combinaisons (dans les jeux de hasard) et en recherche à d'autres (en astronomie), alors que les possibilités mathématiques sont analogues dans les deux cas (il lui paraît même que les coïncidences dans les jets sont encore plus improbables que celles qui ont lieu en astronomie, car elles ne sont pas simultanées) (162).

Par ces exemples, d'Alembert estime montrer qu'il est nécessaire de "chercher une cause aux effets symétriques et réguliers". La comparaison avec les situations prises de l'astronomie est significative : tout événement (y compris les jets de dés ou de pièces) est de nature physique, et relève d'une loi qui le relie à une cause. Ce qui révèle la cause, c'est la régularité des effets. Et, dans le cas des jets de pièces, "l'uniformité de *croix* arrivant cent fois de suite annonce aussi une cause, et [...] par conséquent si on ne suppose point d'autre cause que le hasard, *croix* ne saurait arriver cent fois de suite" (163). Pour lui, "ces raisonnements" (relatifs aux planètes, ou au jeu de pile ou face à séquences répétées) "sont absolument les mêmes" (164).

Dans le texte de 1780, comme on l'a indiqué, la position de d'Alembert marque une évolution, en acceptant comme admissible la réponse donnée par la petitesse de la valeur de la probabilité d'une série répétée ; mais il persiste à maintenir l'éventualité d'une autre raison : "de ce qu'il y a dans la nature des causes continuellement agissantes, qui tendent à en changer l'état à chaque instant, et qui ne permettent pas que le même événement arrive un grand nombre de fois de suite, et même un assez petit nombre de fois" (166). Il invoque même une autre analogie, qui marque combien il n'est pas naturel de supposer une uniformité sans cause, empruntée cette fois aux calculs sur les durées de vie : ces calculs admettent comme établi par l'expérience que des personnes qui ont les mêmes possibilités de vivre ne vieillisent pas uniformément. "Or l'expérience nous apprend de même, ce me semble, que jamais un même événement n'arrive un grand nombre de fois de suite. Pourquoi donc n'y pas avoir égard dans le calcul des probabilités ?" (167).

Toutefois l'évolution du raisonnement apparaît, comme si d'Alembert reprenait, dans un premier temps, l'argumentation de Laplace : "comme tout est lié dans l'ordre des choses, nous pourrions, si nous connaissions la loi de l'enchaînement des causes et des effets, deviner et prédire ce qui arrivera à chaque coup, si ce sera *croix* ou *pile* ; dans l'ignorance où nous sommes du secret de la nature, nous ne pouvons dire précisément si ce sera *pile* ou *croix*..."

Mais "comme l'expérience nous a appris que le même effet se répète rarement",... on peut penser qu'après plusieurs croix, pile viendra. Si nous pouvions imaginer qu'il y ait une raison que croix vienne davantage, au contraire, il serait plus probable que croix arrive encore. (168). On peut donc considérer que d'Alembert se satisfait de l'interprétation subjective, qui rattache les probabilités à une ignorance de la totalité des circonstances, tout en maintenant la possibilité de son point de vue, énoncé désormais comme une simple hypothèse. Cette persistance paraît témoigner pour le fait que l'interprétation subjective de Laplace, qu'il admet pour cohérente avec la théorie des probabilités, n'épuise pas la question de la nature physique des phénomènes, ce qui nous renvoie encore à la définition (ou plutôt à l'absence de définition satisfaisante) de l'*objet* de la théorie des probabilités.

Indiquons ici que le problème soulevé par d'Alembert évoque la distinction ultérieure entre probabilités et statistiques, rendue possible à partir des travaux de Bayes, Laplace et Condorcet et qui a marqué les 19ème et 20ème siècle (les probabilités, dans le premier cas, sont supposées connues, alors que dans le second elles sont inconnues et à déduire de l'observation).

3.8 Le probleme de l'equiprobabilite

Dans les analyses thématiques qui précèdent, nous avons pu voir comment, à travers toutes les notions critiquées ou simplement considérées par d'Alembert, c'est l'hypothèse de l'équiprobabilité (liée à celle de la dépendance des coups consécutifs) qui apparaît en fin de compte occuper la place centrale. Elle se tient au cœur du problème de Saint-Petersbourg, elle gouverne la question des petites probabilités, elle est le concept principal invoqué et mis en cause dans la distinction entre les probabilités mathématiques et physiques, elle accompagne étroitement jusqu'à s'y confondre la question des séquences répétées et de l'uniformité. C'est bien elle, en fin de compte, qui constitue le concept fondamental de la théorie des probabilités, et qui est responsable de l'identification de cette dernière à une théorie des dénombrements de combinaisons. Cette idée, que l'établissement des conditions d'une véritable théorie des probabilités physiques passe essentiellement par une critique de cette hypothèse, constitue l'essence de la position de d'Alembert, telle qu'on peut la dégager des diverses élaborations de ses "doutes et questions", et telle qu'il l'aperçoit clairement lui-même dès leur mise en forme philosophique de 1767. En fait, d'Alembert avait ainsi mis le doigt sur l'une des difficultés conceptuelles les plus importantes de la théorie que ses contemporains n'avaient pas su aussi bien voir, si tant qu'ils l'aient seulement aperçue. C'est ce dont on ne s'est pas suffisamment rendu compte chez les mathématiciens comme chez les historiens des sciences, lesquels n'ont retenu, pour le condamner, que l'aspect fragile et caduc de ses remarques ; cet aspect a, semble-t-il, masqué à leurs yeux, le côté intéressant de son apport, qui est d'avoir mis le doigt sur une difficulté conceptuelle majeure. Les historiens des sciences devraient en tirer une leçon : l'attention aux seuls développements techniques, dans la voie ouverte notamment par Laplace avec la *Théorie analytique des probabilités* de 1812, a fait négliger, sous le couvert de l'élimination d'une erreur, un aspect important de l'histoire du calcul, et méconnaître la véritable nature de son développement conceptuel, qui serait incompréhensible sans l'intelligence du concept d'équiprobabilité et de ses difficultés.

Bien que l'équiprobabilité et l'indépendance des coups soient liées, et que la deuxième soit plus décisive aux yeux des mathématiciens modernes des probabilités, c'est peut-être malgré tout la première qui est mise en avant par d'Alembert, car c'est elle qui semble demander d'emblée une justification physique, comme nous le verrons par l'évocation de considérations plus récentes ; et la position de d'Alembert sur les probabilités est marqué avant tout par l'aspect <u>physique</u> de leur application (mais la théorie mathématique des probabilités elle-même, par ses développements modernes, ne semble pas moins préciser un point resté obscur à l'époque qui nous occupe).

Dans ses "Réflexions" de 1761, d'Alembert propose une critique de deux hypothèses contestables qui appartiennent à la théorie des probabilités : l'indépendance de deux coups consécutifs d'une part (il estime au contraire que l'occurrence d'une répétition rend plus probable la réalisation d'un événement différent), l'équiprobabilité des combinaisons à répétition et des combinaisons à mélange, d'autre part. Il avait évoqué cette dernière dès les premiers paragraphes du texte, soulignant que la théorie des probabilités suppose "que toutes les combinaisons sont également possibles, chacune en particulier" (169) ; il considère au contraire que les combinaisons à répétition sont les moins probables (en référence à l'observation commune des phénomènes de la nature). Sa position par la suite reste constante et se précise. "Les "Doutes et questions" de 1767 estiment que la probabilité d'événements répétés est moindre que celle d'événements mêlés ; que la supposition que *pile* peut n'arriver jamais (au jeu de *croix* ou *pile*) est une supposition fausse ; et que, précisément, cette limitation obligée des répétitions entraîne qu'il n'y a pas équiprobabilité dans la nature (170). Sur ce dernier point, il raisonne de la manière suivante : puisqu'il y a (c'est une loi physique, selon ce qu'on a vu) limitation à une suite de répétitions, comment l'expliquer si l'on admet une égale probabilité de tous les coups pour une série donnée ? "Pour moi", expose-t-il, "je ne vois à cela qu'une réponse raisonnable : c'est que la probabilité d'une combinaison où le même effet est supposé arriver plusieurs fois de suite, est d'autant plus petite, toutes choses d'ailleurs égales, que ce nombre de fois est plus grand, en sorte que quand il est très-grand, la probabilité est absolument nulle ou comme nulle, et que quand il est assez petit, la probabilité n'est que peu ou point diminuée par cette considération". Il n'y a pas équiprobabilité ; et la probabilité est fonction du nombre de répétitions.

Le texte de 1773 de Laplace peut être considéré comme une réponse à d'Alembert sur le point de l'équiprobabilité. Il envisage précisément le cas où les probabilités ne sont pas égales, si la pièce n'est pas homogène, et reprend le calcul dans les termes de d'Alembert (170 bis), mais en établissant que l'on peut alors déterminer l'avantage. Il revient sur la critique de l'équiprobabilité et de l'indépendance des coups consécutifs et répond sur le sujet de la longue suite répétée : "Ce n'est donc point parce que l'événement symétrique est moins possible que les autres, mais parce qu'il y a beaucoup plus à parier qu'il est dû à une cause agissant avec ordre qu'au pur hasard, que nous recherchons cette cause". C'est donc en invoquant le caractère subjectif des probabilités que Laplace élimine la difficulté (170 bis - 1), c'est par cette même conception qu'il répond sur la suite ordonnée de lettres (prenant le cas du mot "infinitésimal") : c'est parce que nous lui donnons un sens qu'il est pour nous plus probable que son arrangement n'est pas dû au seul hasard (170 ter). Cette position ne devait vraisemblablement pas satisfaire d'Alembert, même si elle paraît faire droit à un aspect de sa revendication. Car il pose, quant à lui, le problème différemment (170 - 4).

La critique de l'équiprobabilité par d'Alembert comporte deux éléments. Le premier est l'affirmation de la nature physique des événements, en opposition avec une hypothèse d'équipossibilité qui n'est qu'une simplification pour des mathématiques purement abstraites, et pose la question d'une justification physique pour une telle hypothèse. Le deuxième élément est la substitution de cette hypothèse simplificatrice, injustifiée et fausse, par une autre, qui prendrait la forme d'une loi de probabilité avec variation, d'une loi non équiprobable ou d'une dépendance. Ces deux éléments sont relatifs à une même exigence : la référence à des situations réellement physiques et en appellent ainsi au critère de l'expérience, soit de pensée , soit effective, pierre de touche de l'hypothèse.

Considérée ainsi, la position de d'Alembert ne varie pas, quant à l'exigence et au critère, y compris dans le texte de 1780 où il admet que l'hypothèse d'équiprobabilité puisse après tout être éventuellement valide : mais, si elle l'est, c'est parce qu'elle pourra être justifiée. Tel est le sens de deux remarques importantes faites dans ce dernier texte. La première apporte un raffinement par rapport aux simples affirmations antérieures de non existence de longues répétitions, et ce raffinement présente une curiosité historique, en ce qu'il fait penser, rétrospectivement, aux comptages des répartitions d'états de la mécanique statistique tels qu'un Boltzmann les effectuera vers la fin du dix-neuvième siècle. En effet, pour rendre compte, par l'expérience mentale, du fait que les événements ne sont pas, physiquement, équiprobables, d'Alembert introduit l'idée de combinaisons discernables (171) : cette discernabilité est précisément la traduction du fait que les événements considérés sont de nature physique, c'est-à-dire qu'ils relèvent d'une cause (celle qui fait que l'on amène C ou P, mais évidemment nous ne la connaissons pas), et que chacun des coups est individualisé. Il propose en effet le raisonnement suivant : "Je suppose qu'il y ait *n* manières différentes d'amener *croix* et n manières différentes d'amener *pile* ; j'amène *croix* au premier coup ; est-il vraisemblable que l'impulsion qui me donnera encore croix au second coup sera *précisément* la même que celle qui me l'avait donné au premier coup ? Il me semble que non. Or en ce cas, il n'y aura plus que n - 1 manières d'amener *croix* au second coup, tandis qu'il y en a encore n d'amener *pile* à ce second coup. Il y a donc déjà un peu plus de probabilité pour *pile* au second coup, que pour *croix.* Ce raisonnement devient encore plus fort si l'on a amené *croix* plusieurs fois de suite...".

En fait, n (le nombre de coups possibles, chacun différencié), est infini pour l'événement P comme pour l'événement C ; après un nombre m, fini, de coups, n - m est encore infini mais, expose d'Alembert, plus n sera grand, "plus il sera vraisemblable que le coup qui doit suivre se trouvera dans la *suite* qui n'a pas encore été entamée" (172). Il prolonge d'ailleurs cette considération en proposant un calcul théorique du problème de Saint-Petersbourg dans lequel la probabilité de chaque coup est individuée, représentée par un paramètre distinct pour chacun, différant légèrement de 1/2, de telle sorte que la probabilité pour que C n'arrive qu'au quatrième coup, par exemple, est fonction de quatre paramètres (et au n-ième coup, de n paramètres). Ayant ainsi paramétrisé la non-équiprobabilité, il obtient pour la forme de l'enjeu une série dont les termes vont en décroissant, en sorte que l'enjeu total peut être fini (173). La généralité de son calcul (les paramètres ne sont pas fixés, et peuvent être égalés entre eux, voire égalés à 1/2 comme cas particuliers) peut nous le faire voir comme un essai de traiter la probabilité comme une fonction de grandeurs physiques ; et nous savons que c'est ainsi seulement que l'équiprobabilité peut être justifiée du point de vue de la physique.

Cette remarque est encore étayée par la reprise du même argument dans l'un des textes inédits (173 bis). "Si l'on a une pièce parfaitement indifférente par sa construction à donner *croix* ou *pile*, je suppose qu'il y ait *m* mouvements différents à donner à la main pour amener *croix*, et *m'* autres mouvements différents, égaux en nombre à *m* pour amener *pile*. Je suppose ensuite qu'on amène d'abord *croix* ; il est certain : 1) qu'il reste encore m - 1 moyens d'amener croix, et m' = m moyens d'amener *pile*. Or n'est-il pas vraisemblable que si on amène encore *croix* ce sera par l'un de ces m - 1 moyens, différents du premier ? Mais comme le nombre m' de moyens d'amener *pile* est plus grand d'une unité que m - 1, n'est-il donc pas un peu plus vraisemblable qu'on amènera *pile* au second coup que *croix* ? J'ai déjà fait ce raisonnement, to VII de mes *Opuscules*, p. 39 art. 2. Je le présente ici d'une manière un peu différente". Cette manière a l'avantage de souligner plus encore le caractère physique des événements réputés de hasard.

Avant de revenir quelque peu sur cet aspect, indiquons la deuxième remarque importante annoncée : elle se situe toujours dans la perspective où l'on admet une causalité des événements, et où l'on soupçonne, pour cette raison (selon ce qu'on a vu précédemment) (174), qu'une répétition uniforme décèle une cause cachée (comme des pièces truquées) ; mais elle pose le problème cette fois-ci différemment, parce qu'il existe désormais, estime d'Alembert, qui a lu les mémoires de Bayes et de Laplace, un moyen d'estimer la probabilité de la cause. Cette remarque conclut le mémoire de 1780 et témoigne pour la réconciliation de l'exigence physique et causale avec la théorie des probabilités, dans la mesure où celle-ci fait désormais une place à la recherche des causes en donnant la prééminence aux effets, c'est-à-dire aux phénomènes physiques tels qu'ils sont donnés dans l'expérience. Ce trait pourrait être fort bien admis par celui qui avait su opposer à l'évidence apparente de l'impulsion cartésienne pour les mouvements une épistémologie de l'attraction newtonienne où l'on tient compte des effets, même dans l'ignorance des causes (175). La remarque est la suivante : "Dans la théorie ordinaire, et en partant de tous les principes admis jusqu'à présent par les géomètres sur l'indifférence des événements semblables successifs ou non successifs, lorsqu'un événement, par exemple, *croix*, est arrivé plusieurs fois de suite, et qu'on n'avait d'ailleurs aucune raison de croire qu'il dût arriver ainsi, il est clair qu'il y a quelque probabilité que *croix* avait plus de penchant à venir que *pile*. Mais comment estimer cette probabilité d'après la chute sucessive et supposée de *croix* un certain nombre de fois de suite ? Cette question a rapport à la recherche de la probabilité des causes par les événements, dont plusieurs savants géomètres se sont occupés. Voyez dans les *Transactions philosophiques* de 1763 et 1764, les recherches de MM. Bayes et Price sur ce sujet, et celles de M. de La Place dans le VIème volume des *Mémoires des savants étrangers*, présentés à l'académie des sciences, et imprimés en 1774" (176).

Quant à l'équiprobabilité, elle était dès lors susceptible d'être testée pour ce qu'elle était, et non point imposée à priori par une hypothèse parfaitement arbitraire (176 bis).

Ainsi, cette apparence de réconciliation de d'Alembert avec une théorie des probabilités améliorée - et de manière assez décisive - par rapport aux formulations abruptes et quelque peu simplistes qui le rebutaient, ne diminuait en rien l'exigence fondamentale de sa revendication, quant à une théorie *physique* des probabilités, formulée par rapport à l'hypothèse d'équiprobabilité.

Il est hors de question de traiter ici de l'histoire de cette notion (177). Mais il vaut la peine d'évoquer à son sujet (à titre d'exemple, et en privilégiant sur d'autres cas relatifs aux mathématiques - Borel, Von Mises, etc... - un cas portant sur un aspect physique pour les raisons indiquées plus haut), une démarche bien postérieure aux considérations de d'Alembert, et qui d'ailleurs ne les mentionne pas, mais dont la manière d'aborder le problème des conditions d'applicabilité de la théorie, mathématique, des probabilités à des situations physiques semble ordonnée aux questions et insatisfactions de ce dernier ; démarche qui, en particulier, témoigne pour le bien-fondé de ses interrogations sur l'équiprobabilité des phénomènes physiques aléatoires. Dans un article de 1920 sur "Les présuppositions physiques du calcul des probabilités", Hans Reichenbach (178) commence par établir une distinction, parmi ceux qui développent la théorie des probabilités,entre les mathématiciens et les statisticiens qui, dans les diverses branches de la science, s'emparent de l'appareil complexe des mathématiciens pour l'appliquer à des objets réels, afin "d'en dériver des méthodes appropriées à la présentation d'états de choses empiriques particuliers". L'auteur souligne la différence de méthode des deux catégories, qui correspond à une différence substantielle, la même "qui sépare la recherche mathématique pure de ses applications". Comparant la théorie des probabilités, en tant que système mathématique complet, au calcul infinitésimal ou aux principes de la géométrie, et rappelant que personne n'avait mis en doute la justesse de la théorie mathématique des combinaisons dont Jacques Bernoulli avait tiré la loi des grands nombres (179), il souligne que "d'autant plus grands en ont été les doutes sur les applications des lois de probabilités aux objets de la réalité", en indiquant que les applications statistiques n'ont pas atteint la rigueur mathématique des probabilités théoriques, "parce que la question de savoir si les objets réels sont soumis aux relations calculées n'a pas été résolue" (180). Reichenbach revendique la nécessité de développer, *par des méthodes physiques et philosophiques*, des axiomes d'applicabilité, différents des axiomes mathématiques, qui en particulier tiennent compte des séquences temporelles des événements réels. C'est dans cette perspective qu'il pose le problème de l'équiprobabilité de chacun des côtés au jeu de dés, rejetant la définition basée sur l'impression subjective et posant en principe "qu'il existe effectivement des états de chose objectifs qui peuvent être complètement décrits par le moyen de lois de probabilités, par exemple les régularités obtenues en lançant des dés".

Définissant comme équiprobables "ces cas qui, par répétition, convergent de plus en plus vers un nombre égal de réalisations", il se propose de caractériser l'hypothèse physique qui correspond à une telle équiprobabilité. Reichenbach emprunte sa solution à Poincaré qui, considérant le jeu de la roulette (181), ramenait le mécanisme probabiliste à une hypothèse très simple - celle de l'égal partage des intervalles du cercle - , l'équiprobabilité du rouge et du noir étant dès lors réduite à l'existence d'une courbe continue des fréquences en fonction de la portion d'angle, et la généralise aux autres cas, lancers de dés ou jeu de pile ou face. En sorte que, selon Reichenbach, c'est "l'existence d'une fonction de probabilité d'une ou plusieurs variables (plusieurs, dans le cas de la composition d'événements indépendants) qui représente la condition suffisante d'applicabilité des règles de probabilités". En bref, les hypothèses physiques qui traduisent l'existence d'une régularité dans la nature, et ne sont pas directement testables, peuvent se ramener à celle d'une fonction continue de probabilité (pour l'angle de révolution du pointeur dans le cas de la roulette, pour une variable appropriée dans le cas d'une pièce, en l'occurrence le temps qu'elle met à tomber), d'où découle automatiquement l'équiprobabilité. Ce que la théorie comportait de problématique réside dans l'axiome d'applicabilité (la continuité de la fonction de probabilité). On peut considérer qu'une telle justification physique de l'équiprobabilité, par l'énoncé d'un principe rationnel, rapproche la théorie des probabilités d'autres théories mathématiques appliquées à des situations physiques (182). Le raisonnement de Reichenbach, qui aboutit à ce résultat, apparaît *a posteriori* répondre à l'objection essentielle de d'Alembert qui portait sur le caractère arbitraire ou subjectif de l'hypothèse d'équiprobabilité ; lui répondant, elle la justifie par là-même.

3.9 LE TEMPS PHYSIQUE DES EVENEMENTS

Le temps joue un rôle dans la critique que donne d'Alembert de la théorie courante des probabilités : s'il n'a pas lui-même analysé de manière explicite ce rôle, sans doute parce que le caractère de l'intervention du temps était pour lui de l'ordre de l'évidence intuitive (183), il est cependant possible de le mettre assez facilement en évidence. D'une manière générale, le temps est la marque de la nature physique d'un événement. Au contraire, la théorie des probabilités ignore le caractère temporel des événements physiques auxquels on veut l'appliquer : telle est peut-être, pour lui, la raison la plus profonde de l'inaptitude de la théorie mathématique des probabilités à s'appliquer exactement, à se confondre avec une théorie physique (des probabilités) encore à trouver.

Au travers des textes de d'Alembert, nous pouvons distinguer trois modalités spécifiques d'intervention du temps : l'une est relative à ses rapports à la *possibilité* des événements ; une autre, à la différence entre possibilité et réalisation ; la dernière enfin, le rapporte à la causalité.

Sur le temps et la possibilité, tout d'abord : ce rapport intervient dès la considération de ce que le temps du jeu (dans l'exemple de Saint-Petersbourg) doit nécessairement être fini, considération qui gouverne le raisonnement de d'Alembert et son énoncé des conditions d'une solution rationnelle et interne au problème. Il y a paradoxe en raison de l'hypothèse tacite d'un temps de jeu infini, "c'est-à-dire que *croix* peut n'arriver qu'après un nombre infini de jets", ce qui du moins résulte des hypothèses de l'analyse des hasards. Au contraire, le sens commun, ou l'exigence de ceux qui veulent une solution au problème, dictera une autre règle : "cette supposition est absurde ; car il faudra bien que *croix* arrive enfin après un nombre de jets *fini*, si grand qu'on voudra" (184). Ce qui est ici intervenu, dans l'argumentation de d'Alembert, c'est en fait la notion de *temps physique* dans le cadre duquel se déroule le jeu. Le temps *physique*, celui des événements réels, est un temps qui détermine les choses à se passer, les événements à se produire. C'est, pour utiliser une expression métaphorique, l'idée d'une sorte de courbure du temps, de poids du temps sur les événements, portant ceux qui sont simplement possibles à se produire effectivement. On mesure la différence entre une telle conception du temps, chargé de poids physique et par là actualisant les possibles dans une durée finie, et celle, affirmée par Diderot, selon laquelle le temps est ce qui permet de réaliser toutes les possibilités, et cela, au contraire, parce qu'il est ouvert, et défie toute limite (et n'est en vérité qu'un cadre pour la réalisation d'événements).

Dès ses *Pensées philosophiques* de 1746, Diderot avait avancé l'idée que l'extrême improbabilité d'un événement était compensée par le grand nombre des coups et la longue durée ; il s'agissait en l'espèce de la constitution de l'univers par le jeu du mouvement aléatoire des atomes : "la difficulté de l'événement est plus que suffisamment compensée par la multitude des jets", en sorte,affirmait-il, que "l'esprit doit être plus étonné de la durée hypothétique du chaos que de la naissance réelle de l'univers" (185). Dans son commentaire aux Mémoires de d'Alembert de 1761, Diderot exprime très clairement cette idée que tout possible se réalise avec le temps : "une durée qui n'a point de fin tend à chaque instant à donner une valeur infinie aux quantités finies les plus petites. Les résultats ne doivent jamais étonner. Comme la combinaison s'exécute sans cesse, il n'y a rien qu'elle ne puisse amener. *Le temps équivaut à tout*" (186). Et (contre l'égalisation à zéro des petites probabilités) : "il n'y a point de petit avantage quand il se réitère ; [...] il n'y a probabilité si petite qui n'ait son effet avec le temps" (187).

Sur la différence entre possibilité et réalisation, rappelons seulement la conception que se faisait d'Alembert a propos de la composition des probabilités d'événements successifs. L'événement passé, quand il s'accomplit, devient certain : il a eu lieu. Sa probabilité a changé de nature, et ne peut se composer en toute rigueur conceptuelle avec celle d'un événement futur, seulement probable, et incertain. C'est bien le temps qui les discrimine... (188).

Le dernier caractère du temps, c'est le rapport étroit qu'il entretient avec la causalité. Dans les "Réflexions" de 1761, d'Alembert proposait, on s'en souvient, une expérimentation où les événements sont rapportés à une même circonstance : il s'agissait d'effectuer les jets de pièces simultanément au lieu de les faire à la suite. "On pourrait ainsi voir", proposait d'Alembert, si, "chaque joueur jetant quatre fois de suite une pièce en l'air, les répétitions sont défavorisées ou non" (189). Le cas est repris et approfondi ultérieurement. Dans les "Doutes et questions" de 1767, à propos des combinaisons ordonnées dont la régularité témoigne pour une cause (de même que l'arrangement des planètes aux environs de l'écliptique en astronomie), d'Alembert fait une comparaison où l'on voit bien la nature du rôle qu'il voit jouer au temps. Entre l'arrangement des planètes dans un même plan et les répétitions d'un même effet cent fois de suite, il lui paraît que la deuxième coïncidence est encore plus improbable que la première, et c'est précisément en raison du rôle du temps. En effet, les deux phénomènes sont directement comparables si les effets du deuxième sont obtenus simultanément par un même lancer, puisque le premier résulte d'une même causalité simultanée (les planètes se sont trouvées jetées ensemble dans le ciel au même moment). Or, dans le cas de la succession des lancers de pièces en l'air, la causalité étant différente, puisqu'il s'agit d'autant de coups distincts, la configuration particulière sera plus improbable : "parce qu'il est peut-être plus possible qu'un seul jet, une seule impulsion produise à la fois sur différents corps un effet qui soit le même, qu'il ne l'est qu'un corps, lancé successivement au hasard cent fois de suite, prenne en retombant la même situation" (190).

Et de préciser, sur le lien entre le caractère temporel et la causalité des événements, dans le texte de 1768, à propos du calcul de la probabilité par celui du nombre de combinaisons : "aussi suis-je bien éloigné de croire avec le commun des analystes que ce soit la même chose de jeter une pièce en l'air m fois de suite ou de jeter m pièces toutes ensemble une seule fois". En effet, poursuit d'Alembert, "il est peut-être plus possible physiquement parlant, d'amener à la fois le même événement répété, que de l'amener successivement" parce que, "dans le premier cas c'est une seule et même cause qui agit à la fois pour produire m effets ; dans le second, c'est une cause répétée qui agit successivement pour produire m effets successifs". "Cause répétée", précise-t-il, "qui par cette circonstance même peut varier davantage". Il est significatif que d'Alembert considère, comme exemples, le fait d'amener *croix* avec dix pièces en un seul jet, et celui de jeter les dix pièces *à la même hauteur : c'est* bien d'une occurrence physique, relevant de la mécanique, qu'il s'agit. Ces cas sont les mêmes, mathématiquement, mais il faut distinguer, dans le cas des événements physiques, "ce qui est physiquement possible d'avec ce qui ne l'est pas, peut-être même ce qui l'est plus d'avec ce qui l'est moins ; et c'est une attention qu'on n'a pas assez faite jusqu'à présent dans l'analyse des jeux" (191).

Ce qui fait la différence, c'est bien l'intervention effective du temps dans les événements physiques successifs, et ce paramètre n'est pas pris en compte dans la théorie mathématique des probabilités. D'Alembert n'est pas totalement explicite puisqu'il ne souligne jamais que le caractère physique des événements est en même temps leur caractère temporel, mais il est clair qu'une causalité (à laquelle par contre il se réfère expressément) est relative à l'espace et au temps. C'est précisément parce qu'il le conçoit bien ainsi qu'il se dit à cet endroit certain, en jetant deux cents pièces en l'air simultanément, d'avoir au moins cent fois pile ou croix, "au lieu que si on jetait une pièce successivement en l'air cent fois, on jouerait peut-être toute l'éternité avant que de produire *croix* ou *pile* cent fois de suite" (192).

C'est très probablement cette remarque de d'Alembert qui donna à Lagrange (192 bis) l'idée de proposer à Béguelin le problème d'une version "simultanée" du problème de Saint-Petersbourg, dans lequel le temps physique ne joue plus de rôle, et où les événements sont numérotés, pour éviter (selon les termes d'une lettre de Béguelin à d'Alembert) "la difficulté qui peut résulter de la répétition des événements" (193). Ce problème est énoncé de la manière suivante : "Pierre jette à la fois en l'air un nombre quelconque de pièces de monoie numérotées 1, 2, 3, etc...., sous la condition que si en retombant la pièce n° 1 tourne *pile*, Paul recevra de lui 1 écu ; si c'est n° 2 qui donne *pile*, il aura 2 écus, si c'est n°3, il aura 4 écus, qu'en un mot, en suivant l'ordre naturel des numéros, la première pièce n° n qui se trouvera tourner *pile* vaudra à Paul 2^{n-1} écus. On demande quel doit être l'enjeu de Paul, en commençant la partie, pour jouer à jeu égal" (194).

Il est peut-être utile de remarquer, à cet égard, que le temps, paramètre nécessaire en physique, est lié dans les probabilités à la notion de processus, elle-même liée à la dépendance. Mais, ici encore, nous avons privilégié l'aspect physique du problème, car c'est lui qui intéresse d'Alembert.

3.10 L'INSUFFISANCE DE L'INTERPRETATION SUBJECTIVE.

Il y a, pour d'Alembert, nous l'avons vu, une part d'inassignable, d'indécidable, d'incertitude, dans la théorie des probabilités telle qu'elle est appliquée couramment à des événements physiques ; telle est sa manière de traduire ou de décrire le symptôme d'une difficulté conceptuelle fondamentale de la théorie, difficulté certes réelle même si l'on ne partage pas ses formulations. Cette difficulté a marqué les interprétations de la théorie au cours de l'histoire de son développement : elles oscillent, comme on sait, entre une conception subjective

(Laplace et, plus récemment, Keynes, de Finetti...) et des vues qui laissent davantage de part à une caractérisation objective (celle, par exemple, de Poincaré ou encore Von Mises). L'objet de la théorie des probabilités tel que d'Alembert l'envisage n'est pas totalement abstrait de ses caractéristiques particulières comme il va l'être pour Bayes et Laplace, dépouillé et rendu à une exacte symétrie qui permet, par exemple, de parler d'équiprobabilité et d'utiliser sans autre interrogation la définition mathématique des probabilités. D'Alembert ne parvient pas, pour cet objet, à l'idéalisation qu'il conçoit pourtant à propos d'autres objets physiques et qui légitime l'usage du calcul différentiel. C'est que la théorie des probabilités porte sur un objet dépouillé de toute causalité et de toute temporalité, lesquelles font le caractère physique des événements et des choses. L'hypothèse d'équiprobabilité, qui est l'objet central de ses critiques, ne lui paraît pas physiquement fondée, précisément parce qu'elle s'abstrait, à ses yeux, totalement et sans justification de ces caractères, causal et temporel, des événements physiques réels. Nous avons montré comment la critique de d'Alembert, à l'égard de l'équiprobabilité notamment, possède pour nous un tout autre sens que celui d'une curiosité, l'erreur d'un grand mathématicien, et s'avère symptomatique d'un problème que la théorie des probabilités n'avait pas résolu alors. Il se peut d'ailleurs que les probabilités en général possèdent encore un statut ambigu quant à leur implication en physique - témoin la diversité d'opinions sur leur rapport à ce que l'on nomme *le hasard*.

De fait, c'est bien l'idée de hasard qui est au centre du refus ou des doutes de d'Alembert, une idée que tend à masquer l'interprétation purement *subjective* - comme celle de Laplace - selon laquelle l'utilisation des probabilités est seulement rapportée à notre ignorance. L'interprétation subjective des probabilités, se trouve à vrai dire déjà présente chez Leibniz, Jacques Bernoulli, s'Gravesande (195) aussi bien que dans l'article "probabilité" de l'*Encyclopédie*, mais elle est définie avec Laplace dans une perspective qui se situe en continuité avec la pan-causalité de d'Alembert : c'est bien pour asseoir les fondements de la théorie des probabilités sur une telle vision que Laplace proposa sa première affirmation du "déterminisme laplacien" : "le hasard n'a donc aucune réalité en lui-même ; ce n'est qu'un terme propre à désigner notre ignorance sur la manière dont les différentes parties d'un phénomène se coordonnent entre elles et avec le reste de la nature" (196).

Mais d'Alembert ne peut se satisfaire totalement d'une telle interprétation, et cela apparaît encore dans ses dernières réflexions (197). En particulier il n'est pas question à ses yeux d'affranchir les probabilités de la considération du comportement d'un phénomène individuel. Peut-être faut-il voir la raison profonde de sa position dans sa conception d'une causalité qui est tellement inhérente aux choses qu'on ne pourrait s'en abstraire même au nom de l'ignorance (souvenons-nous d'ailleurs que, dans l'ignorance des causes, en physique, on doit du moins s'en tenir à considérer les effets, qui portent toujours la marque de quelque cause, même si elle est impossible à décrire) (198). C'est en ce sens que je maintiendrais volontiers cette proposition que d'Alembert n'aime pas le hasard (196) fût-il rapporté à notre seule ignorance. Il professait un déterminisme décidé - laplacien avant la lettre, et déterminisme avant le mot - comme on le voit non seulement à son abord propre des probabilités, mais à travers l'ensemble de ses conceptions (200). La théorie des probabilités qu'il aurait voulu voir établir, pour autant que cela eût été possible (n'oublions pas son scepticisme), aurait été, au fond, une théorie causale des occurrences probables. C'est là, me semble-t-il, que se tient l'essence de ses conceptions en matière de théorie des probabilités.

4. EN GUISE DE CONCLUSION. SUR LA FECONDITE DES DOUTES DE D'ALEMBERT : CONDORCET.

Nous n'avons abordé, dans l'analyse épistémologique proprement dite, que ce qui concerne les aspects relatifs à l'application des probabilités pour des événements physiques. Il eût fallu prolonger cette étude, pour la faire complète, par un examen des conditions de l'application au domaine social (on s'en est tenu à l'exposé historique sur l'inoculation), et à la philosophie de d'Alembert en matière de probabilité des jugements et de conjectures (on se reportera sur ce point à Paty 1977 a). Ajoutons ici, sur le premier aspect, que les objections de d'Alembert relatives aux conditions d'application du calcul des probabilités étaient parfaitement fondées. L'obstacle - car obstacle il y avait - valait d'être désigné - le doigt mis sur le nom du problème -, condition de son franchissement ou dépassement ultérieur : lorsque Condorcet découvrira, en rompant avec les tentatives de simple application du calcul, l'originalité de la science sociale (200 bis), c'est bien parce qu'il aura pu énoncer les conditions d'utilisation du calcul dans cette science, en effectuant pour la première fois les distinctions nécessaires entre les définitions mathématiques et l'interprétation, et, pour ce qui est de cette dernière, entre l'estimation subjective de la valeur d'un pari et la distribution des fréquences (200 ter). Or, c'est précisément sur cette absence de distinction que butait d'Alembert ; c'est notamment en raison de la confusion qui régnait jusque-là entre ces divers aspects qu'il n'a "pas compris" le calcul des probabilités et a émis ses doutes, doutes que, de son aveu même, Condorcet a partagés. Entre le caractère révélateur (quant à la pensée de d'Alembert) de ces doutes et leur fécondité finale (puisqu'il signalent - implicitement - un problème à résoudre, une difficulté à dépasser, et préludent à l'inauguration d'une nouvelle science) (200-4), il existe d'ailleurs un lien étroit.

C'est pourquoi il nous a paru utile de proposer quelques remarques sur l'influence que les conceptions de d'Alembert en matière de probabilité ont exercé sur Condorcet. Condorcet est sans aucun doute, parmi les contemporains de d'Alembert dont le nom marque l'histoire du calcul, celui qui en a le plus médité les remarques critiques souvent mal comprises (et, certes, ambiguës à plusieurs égards), et en a porté le fruit le plus loin (le cas de Laplace qui domine la théorie analytique, évoqué à plusieurs reprises, étant sensiblement différent). Il s'agit ici d'une évocation plutôt que d'une étude a proprement parler. Pour la résumer d'un mot : Condorcet passe de la critique conceptuelle des probabilités au sens de d'Alembert à leur justification en les soutenant d'une théorie de la connaissance qui lui permet de préciser leur lien au problème de la décision, par l'invention d'un concept nouveau, la doctrine du motif de croire, qui va s'avérer déterminant pour fonder scientifiquement une science sociale sur des bases autonomes.

On trouve, dans les textes publiés et surtout dans les manuscrits de Condorcet, de nombreux indices du fait que sa réflexion sur les probabilités s'est nourrie de la lecture et de la méditation des problèmes soulevés par d'Alembert et de ses objections. Lorsqu'il évoque, dans un historique, les problèmes rencontrés par le développement du calcul, c'est en manifestant que les objections de d'Alembert méritaient attention, en soulignant qu'elles étaient fondées et lucides, originales ("M. D'Alembert osa [...] révoquer en doute" l'ancienne règle) (200-5) ; ou encore que ses objections sont présentes à l'esprit de tous, ce qui signale leur impact (200-6). Condorcet témoigne de façon éloquente du rôle de d'Alembert remettant en question des propositions devenues, à tort, vérités d'évidence, que celui-ci a rendu possible un dépassement ultérieur notamment par sa critique de l'espérance (200-7). Condorcet a trouvé, en fait dans les critiques de d'Alembert la matière d'une réflexion qui lui a permis de parvenir à une signification différente des probabilités, et à leur trouver un nouveau fondement permettant de leur assurer de nouvelles applications. Comme il l'écrit dans son "Eloge" : si le calcul des probabilités "s'appuie un jour sur des bases plus certaines, c'est à d'Alembert que nous en aurons l'obligation" (200-8).

L'oeuvre de Condorcet en porte la trace, dans ses achèvements eux-mêmes, comme on peut le voir, par exemple au texte posthume de 1805, “Eléments du calcul des probabilités et son application aux jeux de hasard à la loterie, et aux jugements des hommes” (201). Condorcet y éclaire comment c'est en dissociant *probabilité* et *réalité* qu'il est possible de dépasser les difficultés liées à l'interprétation (et notamment le problème des événements singuliers dont, nous l'avons vu, d'Alembert n'avait pu s'abstraire) et de fonder le calcul des probabilités. Tout en partant d'une définition subjective ("le calcul des probabilités a pour objet les faits dont la réalité est inconnue") (202), il fait pleinement droit à une conception réaliste, et c'est une philosophie de la connaissance de cette nature qui lui permet d'assurer les bases de l'application du calcul. Dans le chapitre intitulé "De la nature des vérités auxquelles peut conduire le calcul des probabilités", après la définition des *probabilités abstraites* (qui situe l'équipossibilité comme une marque de notre ignorance) (203), il est en effet précisé que, à ce stade, "il n'y a aucun rapport direct et nécessaire entre la probabilité d'un événement et sa réalité" (par exemple, les tirages de boules). Condorcet effectue à ce sujet une distinction relative au calcul des probabilités, qui reprend et retourne celle de d'Alembert (opposant les probabilités *mathématiques* et *physiques*), entre des vérités "purement mathématiques" (elles concernent des probabilités *moyennes* d'événements déduits de l'observation d'événements du même genre), et des "vérités réelles et physiques", dont la définition est liée au motif de croire (par lequel on gage qu'un événement plus probable se produira plutôt qu'un autre) : c'est précisément cette distinction qui nous aide ainsi à déterminer les propositions que l'on devra regarder comme vraies (204). Or l'argumentation même de Condorcet fait voir, par les aspects sur lesquels il insiste, pour parvenir à cette idée, exposée dès ses textes des années 1780, combien il a été tributaire des remarques de d'Alembert (205). Ses positions antérieures le confirment largement : l'influence de d'Alembert a été la première étape de l'élaboration de ses idées, comme nous l'avons vu dans la lettre à Turgot citée plus haut (206).

On trouve dans les papiers manuscrits de Condorcet, qui datent vraisemblablement de cette époque-là, plusieurs allusions aux questions de d'Alembert sur les principes du calcul des probabilités, notamment la critique de l'espérance à propos du problème de Saint-Pétersbourg (207). Le ton indique implicitement que l'objection de d'Alembert était fondée, et ses propres réflexions sur le sujet montrent que Condorcet a effectivement suivi la leçon de d'Alembert.

Sur l'équipossibilité, qu'il aborde dans le même texte, c'est encore une question de d'Alembert qui est le point de départ de sa réflexion et qui lui fait préciser la définition même de l'idée de probabilité : la probabilité se rapporte au vrai ou au faux, non au possible. Ce qui, en même temps, résout la question de la différence de statut, avancée, on s'en souvient, par d'Alembert, du point de vue de la probabilité, entre les événements passés et futurs (208). Car la probabilité n'a pas à voir avec l'état réel d'un système ou d'un événement (ce qui appartenait à l'idée que d'Alembert s'en faisait), mais avec la connaissance que nous avons. D'où la justification du caractère abstrait et mathématiquement idéalisé de la probabilité : "on voit donc clairement que ce qu'on appelle probabilité n'est [...] qu'une considération purement intellectuelle et qui n'a aucun rapport à l'état réel de la nature" (209). Comme c'est la connaissance, et non l'état réel, qui règle la probabilité, il n'y a pas de difficulté, pour Condorcet, à accepter l'équiprobabilité (210). Jusqu'ici, sa position ne paraît pas différer essentiellement de ceux qui considèrent, avec Hume comme avec Béguelin, que l'équipossibilité résulte simplement de notre choix. Pourtant, à la différence de ces derniers qui résolvaient tout simplement le problème par l'interprétation subjective, Condorcet le situe différemment et en vient, à partir de là, à développer sa doctrine du motif de croire (211), moyennant une généralisation de la connaissance probabiliste à toute connaissance, les mathématiques et la logique étant exceptées (212).

Mais, expose en effet Condorcet, ce serait, certes, "une chimère que de chercher à déterminer cette probabilité soit dans les sciences, soit dans la conduite de la vie" ; du moins peut-on "prendre des termes de comparaison", et, sachant que la probabilité est "absolument indépendante de l'état réel des choses, il semble qu'il ne reste aucun moyen d'expliquer comment nous devons croire ce qui est probable et nous conduire d'après cette probabilité. Ainsi croire n'a pas le même sens que dans les vérités mathématiques [...]". Condorcet cherche par un même mouvement à "éclaircir les doutes sur la nature et l'usage des probabilités" (à cet égard il suit précisément l'enseignement de d'Alembert) et à montrer "l'étendue immense de ce calcul, puisqu'on ne peut s'empêcher de [le] regarder comme pouvant donner aux sciences physiques et morales le même degré de précision et d'exactitude auquel les hommes puissent se flatter d'atteindre" (213).

Il nous aura suffi de cette évocation de la démarche de Condorcet pour qu'apparaisse bien établie, dans le domaine des probabilités aussi, sa filiation à d'Alembert.

REMERCIEMENTS

Je remercie, pour leur lecture attentive et critique, Anne-Marie Chouillet et Pierre Crépel.

NOTES

Remarque : les références sont appelées par le nom de l'auteur suivi de la date de première parution et d'une éventuelle lettre d'ordre. Pour celles de d'Alembert, on s'est contenté de la date et de la lettre d'ordre. Les références complètes sont données après les notes (bibliographie).

1) Notamment avec Euler, Laplace et Condorcet
2) Cf. Rashed 1974, Granger 1957
3) Les dates indiquées sont celles de parution des volumes de l'*Encyclopédie* correspondants.
4) L'article "Absent" annonce "Probabilité" ; "Avantage" renvoie à "Pari", "Jeu", "Probabilité" ; "Bassette" renvoie à "Alternation", "Combinaison", "Jeu" et "Pari" ; "Croix ou pile" renvoie à "Absent", "Probabilité", à propos de l'espérance, et à "Avantage", "Jeu", "Pari". Dans l'article "Gageure", d'Alembert annonce qu'il reviendra sur ses objections à la "méthode ordinaire par laquelle on estime les probabilités", en les examinant davantage, dans les articles "Jeu", "Pari", "Probabilité". A l'article "Pari" - qui n'est que d'un tiers de colonne - il renvoie aussi à l'article "Jeu". Or, à la parution des volumes correspondants, on ne trouve rien de tel à "Jeu" et "Probabilités", qui ne sont pas de d'Alembert. "Jeu" est dû à de Jaucourt et parle de tout sauf des jeux de hasard. Par contre "Jouer" est de Diderot.
5) Ils sont repris dans l'édition des *Oeuvres* de d'Alembert chez Bastien, 1805, vos. 4 et 5 (également dans l'édition Belin, 1821, vol. 1).
6) Vols 2, 4, 7, 8, parus respectivement en 1761, 1768, et 1780 pour les deux derniers.
7) Cette même désignation situe sa place dans le "Système figuré des connaissances humaines" repris de Bacon et modifié dans le *Prospectus* de l'*Encyclopédie*, de Diderot, et dans l'annexe au *Discours* de d'Alembert.
8) Les *Eclaircissements*, parus comme volume 5 des *Mélanges de Littérature, d'Histoire et de Philosophie*, en 1767, prolongent divers chapitres de l'*Essai sur les éléments de philosophie* de 1759. L'édition des *Oeuvres* de d'Alembert (Bastien, 1805, Belin, 1821) replace chaque "Eclaircissement" à la suite du chapitre auquel il se rapporte.
9) Condorcet, *Esquisse* (1793).
10) Laplace, *Essai* (1812), in *Oeuvres*, t. 7, p. v.
11) Ampère 1834, p. 39 - 40.
12) Elles sont de 1777 et 1776 respectivement.
13) Laplace écrit, à propos de cette utilisation des probabilités : "L'usage de ces équations est une des causes principales de la grande précision de nos tables astronomiques parce que l'on a pu ainsi faire concourir un nombre immense d'excellentes observations à la fixation de leurs éléments". (Laplace 1814, ed. 1986, p. 202).
14) In Diderot, 1875 - 1877, vol. 9
15) Condorcet indique en effet dans son "Eloge de d'Alembert" que si le calcul des probabilités "s'appuie un jour sur des bases plus certaines, c'est à d'Alembert que nous en aurons l'obligation" (Condorcet 1784).
16) Le terme de "conversion" et même de "révélation" est employé par B. Bru dans sa Postface à l'édition de l'*Essai* (Bru 1986, p. 252)
17) Laplace 1772, 1773, 1774 (dans l'ordre de leur composition).
18) Lapplace 1774
19) Le paragraphe 25 du mémoire de 1773 (reproduit dans l'édition 1986 de l'*Essai philosophique*, p. 221-231), première ébauche de l'*Essai* de 1812, était, semble-t-il, initialement prévu pour servir d'introduction au mémoire de 1774 sur la probabilité des causes (cf. Baker 1975, Bru 1986, p. 252, et références bibliographiques de ce dernier travail).
20) L'avis des savants et historiens du 19ème siècle, de Lacroix à Todhunter (1865) et Bertrand, en particulier, est unanime : d'Alembert s'est purement et simplement trompé. Cette opinion était encore récemment très répandue :voir p. ex. Mayer 1959, qui parle des erreurs accumulées par d'Alembert, dans les articles "Croix ou pile" et "Gageure" et surtout dans ses deux mémoires sur les probabilités et sur l'inoculation" (de 1761), qui "prouvent combien il était fermé aux subtilités de cette analyse si fine" (p. 80).
21) Pearson 1978, p. 535
22) Paty 1977 a, Daston 1977, 1981, Bru 1983.
23) cf. p. ex. Paty 1977 b.
24) Les articles "Absent" et "Bassette" citent aussi l'*Ars conjectandi*, et "Bassette" l'analyse des jeux de hasard.
25) 1768 c.
26) Voir la bibliographie pour les tomes et les années de parution.
27) 1751 b.

28) D'Alembert s'intéresse à l'aspect pratique de la détermination des tables - comme il le fera à propos de l'inoculation - , et se réfère ici aux tables de mortalité de Buffon, plus précises que celles de Deparcieux qu'il utilise lui-même dans son article, ou que celles utilisées par Jacques Bernoulli.
29) Une probabilité de 2/3 lui paraît trop faible, et il propose 5/6 ou encore 7/8.
30) Le problème de l'espérance évoqué à "Croix ou pile" y fait précisément l'objet d'un renvoi à "Absent".
31) 1754 a.
32) Voir 3.3. Sur l'histoire de ce problème, voir, p. ex., Jorland 1987.
33) Par exemple en considérant que Pierre dispose d'un bien fini, pour fixer les idées, 2^{21} écus, ce qui établit le nombre de coups à 21 ; l'espérance de Paul serait alors : (2^{21} - 1)/22. Notons que le paradoxe proprement dit ne réside pas tant dans le caractère infini de l'enjeu que dans le fait qu'aucun joueur ne mettrait une somme finie à ce jeu, ce sur quoi d'Alembert insiste à plusieurs reprises. Toutefois le caractère infini de l'enjeu est un point qui retient particulièrement sa réflexion.
34) C'est, remarque d'Alembert, le nombre indéfini de coups qui "est une des raisons qui font trouver ici le risque de Pierre infini. Voyez “Absent” et ”Probabilité"”.
35) Même dans le cas de l'enjeu fini précédent, on n'obtient pas une solution satisfaisante, car, expose d'Alembert, "quoique cette somme ne soit plus infinie, je doute que jamais aucun joueur voulut la donner". Ce qui est en question, c'est le caractère raisonnable du jeu dans ces conditions, et, dans ce sens, la difficultés n'est pas différente de celle qu'on peut formuler pour, par exemple (dit en substance d'Alembert), un pari d'un million d'amener pile en un coup : il est incontestable que l'enjeu doit être alors d'un demi million, mais seuls des insensés joueraient ainsi.
36) Voir plus bas, à propos de la publication 1761 b (cf. Bru 1983)
37) Par exemple dans 1761 b.
38) Diderot 1761
39) "Jeu" (vol. 8, p. 531) est essentiellement dû à de Jaucourt, et porte sur le droit naturel et la morale, l'histoire (romaine, etc...), les "jeux de la nature" ou anomalies des organes, l'escrime, l'orgue. Vingt lignes non signées sont consacrées au "Jeu, terme de tripot". On ne trouve, sur les probabilités qu'une sous-entrée, "Jeu de hasards) (p. 538), qui se contente de renvoyer à "Jouer" (article de Diderot), ce qui laisse à penser que la contribution de d'Alembert, annoncée (surtout à "Gageure"), a été supprimée. "Probabilité" (vol. 13, p. 393 - 400), non signé, est d'attribution incertaine. Son caractère complet laisse à penser qu'il s'agit d'une substitution totale de l'article initialement commandé à d'Alembert. Toutefois l'argumentation de l'article est nuancée, et prend même en compte des remarques de d'Alembert, auquel il semble plus d'une fois répondre (voir plus bas).
40) En l'absence de document, on ne peut que tenter d'imaginer comment d'Alembert a pu réagir à cette censure. Elle prenait place, à vrai dire, parmi d'autres suppressions, plus graves, commises par les libraires eux-mêmes et dont Diderot fut entre autres la victime. Par ailleurs, lorsque les volumes concernés parurent, en 1765, Diderot se rendit au chevet de d'Alembert malade et leur amitié reprit. Il n'était plus temps de se formaliser des incidents des mauvais jours.
41) A propos de son argumentation sur l'occurrence de répétitions, d'Alembert évoque (1767 c, p. 462) l'article "Fatalité" qui admet les deux opinions (celle commune et celle de d'Alembert) comme possibles, et en donne ce commentaire : "Je crois donc pouvoir regarder l'auteur de l'article “Fatalité” comme partisan de l'opinion que j'ai tâché d'établir ; et un partisan de ce mérite me persuade de nouveau que cette opinion n'est pas une absurdité" (1767 c, p. 462). En fait l'abbé Morellet n'était pas très ferré sur ces questions et, en cas de polémique, préférait en général ne pas se compromettre.
42) 1761 b. On sait que d'Alembert préférait souvent publier ses mémoires dans ses *Opuscules mathématiques*, soit pour leur assurer une publication plus rapide, soit, parfois, en raison des difficultés qu'il rencontrait à l'Académie des sciences de Paris (ce n'est que plus tard qu'il devait y devenir très influent). La même remarque vaut pour le second mémoire, sur l'inoculation. Le volume de l'Histoire de l'*Académie royale des Sciences de Paris* pour l'année 1760, n'a été imprimé qu'en 1766. Il n'y est fait aucune mention des présentations des mémoires non publiés dans le volume.
43) 1761 c. Le mémoire a été présenté à l'Académie des sciences le 12 novembre 1760. Il est accompagné, dans les *Opuscules mathématiques*, vol. 2, de deux notes substantielles dont une "théorie mathématique de l'inoculation".
44) 1767 c. "La théorie mathématique de l'"inoculation" n'a pas été reprises dans 1767d, en raison probablement de son caractère technique.
45) 1767 d.

46) D. Bernoulli 1760. Le volume de l'*Histoire de l'Académie* pour 1760 est paru seulement en 1766. D. Bernoulli a fait précéder son texte de 1760 d'une "note apologétique" dans laquelle il précise qu'il a effectué ce travail à la demande de Maupertuis, et fait allusion aux objections d'un grand géomètre, lequel n'est autre évidemment que d'Alembert. L'autorité de Maupertuis qu'il invoque pouvait être propre à modérer d'Alembert. A la suite des objections rencontrées, Bernoulli se contenta d'ajouter quelques notes de bas de page donnant des précisions supplémentaires.
47) Voir "Eloge de La Condamine", 1774, en particulier p. 110-114. Le premier mémoire de La Condamine date de 1754. Les premières inoculations officielles en France ont eu lieu en 1755. Voir La Condamine 1765, 1773. Sur l'histoire de l'inoculation en France et dans le monde, voir Darmon 1986.
48) Vingt-troisième et vingt-septième mémoires (1768b, etc.)
49) 1780b et 1780d
50) 1761b, article4
51) Au passage, cela rend non avenue la solution qui consiste à tenir compte de la somme finie dont disposent les joueurs : suggérée à d'Alembert par un académicien (Fontaine ?), elle propose que, si le bien de l'un des joueurs et de 2 écus, il ne peut jouer au plus que 99 coups (*ibid.*, article 7). A l'article 9, d'Alembert se demande si la règle qui veut que la mise soit proportionnelle à la somme espérée n'est pas en faute.
52) 1761 b, art. 10
53) 1761 b, art. 15. Selon lui, on voit bien que tel est le cas, contre la règle ordinaire.
54) 1761 b, art. 15
55) 1761 b, art. 21
56) 1761 b, art. 27
57) Diderot 1761 (voir ce qu'on en a déjà dit en 2.3)
58) Nous reviendrons dans la section suivante sur la réaction de Diderot au mémoire sur l'inoculation.
59) "L'argument", écrit-il, "n'est pas en forme".
60) "Il n'y aura donc quelque exactitude dans l'analyse des hasards qu'après des siècles d'observations ? Il est vrai, répond M. d'Alembert".
61) Voir la section 3.2
62) Sur cette opposition, voir Paty 1977 a.
63) En particulier, Mayer (1950, p. 85) attribue l'article "Probabilité", non seulement tel qu'il fut rédigé, mais dès son projet initial,à Diderot. Il se fonde pour cela sur un ajout marqué d'une astérisque (signature habituelle de Diderot) à l'article "Absent", qui annonce "Probabilité". Mais, d'une part, le continu de l'ajout semble davantage correspondre à la pensée de d'Alembert, et il se pourrait que Diderot n'ait pas totalement rédigé cette addition. D'autre part, comme on l'a vu, plusieurs articles de d'Alembert annonçaient un "Probabilité" de sa plume. Il serait évidemment intéressant de savoir si d'Alembert a écrit l'article, et ce qu'il est devenu. Il ne semble pas se trouver dans les papiers manuscrits. Peut-être, remanié, s'est-il simplement transformé en les "Doutes et questions" de 1767. De l'article "Probabilité" tel qu'il fut publié, Todhunter (1865 p. 260) en dit simplement qu'"il donne la vue ordinaire du sujet".
64) "Probabilité".
65) Voir sections 3.7 et 3.8
66) Il en va ici comme dans l'art de raisonner, est-il précisé : " si l'une des prémisses est certaine, et d'autre probable, la conclusion aura le même degré de *probabilité* que cette prémisse ; mais si l'une et l'autre sont simplement probables, la conclusion n'aura qu'une *probabilité* de *probabilité*, qui se mesure en prenant de la *probabilité* de la majeure une partie telle que l'exprime la fraction qui mesure la *probabilité* de la mineure". (Dans ces citations, c'est toujours l'auteur de l'article "Probabilité" qui souligne).
67) "De grands géomètres ont jugé ces doutes *dignes d'attention* ; d'autres grands géomètres les ont trouvé *absurdes* [...] [ce qui a] encouragé des mathématiciens médiocres, qui se sont hâtés d'écrire sur ce sujet, et de m'attaquer sans m'entendre". (1767 c, in 1821, vol. 1, p. 451). Daniel Bernoulli "a trouvé *ridicules*, du moins à ce qu'on m'assure, mes raisonnements sur le *calcul des probabilités*" (p. 460) : il a d'ailleurs vivement réagi au mémoire sur l'inoculation qui accompagnait le premier, mémoire qui mettait en cause sa théorie, et les deux, nous l'avons dit, s'accompagnent étroitement.
68) *Ibid.* p. 451. La fin du texte répond comme en écho à la première phrase : "mais je terminerai ici ces doutes, en avertissant que si je suis bien éloigné de les donner pour des démonstrations, je ne cesserai pas non plus de les croire fondés, tant qu'on n'y opposera que des considérations *purement mathématiques*, ou des réponses que je savais avant qu'on me les eût faites". (*Ibid.* p. 461)

69) La non-concordance de ces solutions, leur caractère d'extériorité quant à la question réelle, prouvent "seulement combien cette question est embarrassante" (*Ibid*. p. 453)
70) L'expression correspondant à cette pratique est qu'il faut laisser "mûrir la chance".
71) 1767 b, p. 467
72) Le problème est fréquemment abordé à l'époque, avec des exemples de mots différents. Diderot, dans ses *Pensées philosophiques* (Diderot 1746) se demande quelle est la probabilité pour que l'on puisse engendrer fortuitement l'*Iliade* (article XXI)
73) 1767 c, p. 482
74) Nous y reviendrons en chapitre 4.
75) Béguelin 1768. Voir plus bas, section 3.3
76) Donc, 1767 a, et en particulier 1767 c
77) Béguelin, Lettre à d'Alembert du 20 avril 1768, in Henry 1885, p. 561-562
78) Lagrange, lettre à d'Alembert du 23 février 1767 : "A l'égard de vos difficultés sur le calcul des probabilités, je conviens qu'elles ont quelque chose de spécieux qui mérite l'attention des philosophes plus encore que celle des géomètres, puisque de votre aveu même la théorie est exacte dans la rigueur mathématique. Au reste la lecture de ce Mémoire m'a fourni quelques idées dont je pourrai vous faire part, si vous le souhaitez, pourvu qu'elles se trouvent confirmées par un plus sérieux examen" (in Lagrande 1867 - 1892, vol. 13, P. 87-88).
79) 1761 c
80) Hankins 1971, Paty 1977 a et b, 1983
81) Seul le texte principal a été présenté à l'Académie des sciences en 1760.
82) 1761 c, p. 45. Voir nos remarques en 3.5.
83) Ou mémoire principal de 1761 sur l'inoculation (1761 c, première partie).
84) "D'Alembert vient de faire une action déshonnête qui trouve des apologistes" (lettre de Diderot à Sophie Volland du 25 novembre 1760, in Diderot 1955-1960, vol. 3, p. 267).
85) Diderot 1761
86) La cause de l'inoculation faisait partie du combat encyclopédiste : à ce titre, Diderot avait ouvert à Tronchin, l'un des apôtres de l'inoculation en France, les colonnes de l'Encyclopédie. L'attitude de d'Alembert ne pouvait apparaître à Diderot que comme une trahison (une de plus après son retrait partiel de 1759, voir p. ex. Paty 1977 b).
87) Et encore : "Y-a-t-il" (en Turquie, en Argentine et en Chine, pays où l'on inoculait largement déjà) "une seule femmelette du peuple qui ne se mit à rire des efforts qu'un géomètre fait pour s'embarrasser dans de pareilles toiles d'araignées ?" "Je crois", écrit encore Diderot, "qu'un homme plus attentif au bien général qu'à l'accroissement de sa réputation, aurait renfermé dans son portefeuille un morceau dont la lecture publique que l'auteur en fit à une rentrée de l'Académie des sciences, avait causé tant de plaisir aux imbéciles adversaires de l'inoculation, et un scandale si affligeant aux honnêtes gens".
88) Voir, sur la réaction de D. Bernoulli aux attaques de d'Alembert, la note 51
89) La Condamine 1765, p. 515. Nous en reparlerons en 2.7
90) Les idées essentielles et leur formulation sont, comme on l'a dit, déjà présentes dans le texte de 1761.
91) 1767 d, in 1822, vol. 1, p. 473
92) Cette deuxième partie de 1767 d est absente du plan de 1761 c, bien que son contenu soit partiellement repris de ce texte. Cette partie et la troisième (voir plus bas) sont les plus augmentées par rapport au texte de 1761.
93) 1767 d, in 1821, vol. 1, p. 483
94) *Ibid*. p. 496
95) 1767 d, in 1821, vol. 1, p. 483
96) Le terme est de nous, non de d'Alembert.
97) 1767 d in 1821, vol. 1, p. 508
98) 1767 d in 1821, vol. 1, p. 510
99) Voir plus haut. D'Alembert reproduit la même formule de 1761 c contre les "les mathématiciens qui pourraient trop se presser de réduire cette matière en équations et en formules".
100) Il vaut la peine de mentionner la réaction extrèmement positive de Lagrange au Mémoire sur l'inoculation ; parlant à d'Alembert du Volume 5 de ses *Mélanges*, il lui écrit : "Une des choses qui m'ont le plus enchanté, c'est votre Mémoire sur l'inoculation. Il est plein de vues et de réflexions très fines et très exactes qui avaient échappé à tous ceux qui avaient déjà traité cette matière et qui la rendent tout à fait neuve et intéressante". Lettre de Lagrange à d'Alembert, 23 février 1767, in Lagrange 1867 -1892, vol 13, p. 87.
101) 1768 c, p. 308 - 309

102) 1768 c, p. 321. Voir aussi 1768 a, avertissement, p. VIII - ix.
103) 1768 e
104) La Condamine 1765. D'Alembert ne mentionne pas le nom, mais indique les pages des *Mémoires*. Dans son Mémoire, La Condamine s'exprime ainsi, à propos de la critique de d'Alembert sur la différence de durée des risques : "Mais je ne dois pas laisser sans réponse une objection qui me regarde, *un argument qui n'avait jamais été proposé d'une manière aussi frappante,* et dont les adversaires de l'inoculation pourraient tirer avantage" (*ibid*., p. 510, souligné par moi, M.P.).
105) 1768 f. Les raisons qu'il en donne sont les suivantes : il est douteux qu'on meure de l'inoculation si on l'applique avec les précautions convenables ; on peut perfectionner l'opération jusqu'au point où personne n'en mourra jamais ; l'Etat y gagnera toujours ("et c'est la raison essentielle") ; on doit l'encourager pour le plus grand nombre, bien que l'on ne puisse en donner le conseil à un individu particulier, à cause du risque non nul (la décision relève de chacun).
106) 1776. Cet article avait été relevé par Todhunter (1865) dans l'*Encyclopédie méthodique*, et Yamazaki (1971, p. 78-80) l'a localisé dans le *Supplément de l'Encyclopédie*, paru antérieurement.
107) Ce que Todhunter n'avait pas vu, qui tente de mettre en défaut le comptage de d'Alembert alors qu'il s'appuie lui-même sur une règle manifestement différente. Yamazaki souligne bien ce point.
108) La solution proposée par d'Alembert est analogue à celle qu'il avançait pour croix ou pile en deux coups ; elle aboutit à des probabilités partielles dont la somme est supérieure à l'unité.
109) Mémoire 52, deuxième paragraphe, 1780 b, in 1780 a.
110) 1780 d, in 1780 c.
111) 1780 b, p. 35
112) Laplace 1774
113) Bayes 1763, d'Alembert, 1780 b. Le mémoire de Bayes, publié bien après sa compositon, ne fut connu en France, y compris de Laplace et de d'Alembert, que vers 1780.
114) Nous en reparlerons plus bas, en 3 . 8
115) 1780 d
116) 1783 b
117) 1783 b, feuillet 119 (article 73)
118) 1783 d et 1783 e sur l'inoculation ; 1783 d sur les probabilités elles-mêmes ainsi que sur l'espérance de vie. Nous y reviendrons en 3.5 et 3.8.
119) 1783 c
120) Comme nous l'avons remarqué en 1.2
121) Voir plus loin, section 3.7. L'article "Combinaison" indique déjà que "la science des anagrammes dépend de celle des combinaisons", prenant comme exemple les mots que l'on peut faire avec les lettres de "Roma".
122) Voir Paty 1977 a et b, 1983, 1984
123) Le présent chapitre 3 est consacré au premier point.
124) 1767 c, in 1821, vol. 1, p. 451
125) Il ajoute : "mais je crois du moins avoir prouvé que de très-habiles mathématiciens ont supposé tacitement et sans s'en apercevoir, dans plusieurs savantes recherches, des principes semblables à ceux que je tâche d'établir". (1767 c, in 1821, vol. 1, p. 451, note 1.) Voir aussi 1768 b, p. 92 : quant à lui, il ne connaît pas le fin mot.
126) 1768 c, p. 289
127) 1768 c, p. 294
128) 1768 c, p. 284, et 1768 b , p. 92.
129) "Peut-être est-ce une chose aussi difficile que désirable, qu'une théorie des probabilités qui serait fondée sur des principes simples et lumineux, et qui serait en même temps parfaitement conforme à l'expérience" 1768 c, p. 292.
130) 1768 c, p. 302
131) "J'espère [...] que mes doutes engageront d'habiles gens sans préjugés à approfondir cette matière épineuse, et à lui donner le degré d'évidence dont elle peut être susceptible" (1768 c, p. 308)
132) 1768 c, p. 310
133) 1780 b, p. 39
134) 1767 c, in 1821, vol. 1, p. 452
135) 1767 c, in 1821, vol. 1, p. 455 - 456. Voir encore 1768 b : "Un homme, dit Pascal, passerait pour fou, s'il hésitait à se donner la mort en cas qu'avec trois dés on fit vingt fois de suite trois six, ou d'être Empereur si on y manquait. Je pense absolument comme lui ; mais pourquoi cet homme

passerait-il pour *fou*, si le cas dont il s'agit, est physiquement possible ? Il faut dire qu'il ne l'est pas ; quoiqu'il soit possible *mathématiquement*" (p. 84 - 85)
136) 1751 a, éd. Gonthier, p. 38
137) 1768 b
138) 1780 b, p. 40
139) C'est sans doute en ayant à l'esprit une considération semblable que Condorcet parlera, dans son *Esquisse*, de cette cause nécessaire et inconnue que l'on nomme hasard" (Condorcet 1793, p. 240)
140) Voir, sur Condorcet, au paragraphe 3.10
141) Bru 1983.
142) L'intervention de ce dernier fut sollicitée par Nicolas Bernoulli.
143) La dénomination fut faite par d'Alembert à cause de la publication dans l'*Histoire de l'Académie de Saint-Petersbourg* en 1738 qui rendit le problème célèbre (cf. Jorland 1987). Je remercie Gérard Jorland de m'avoir communiqué son texte avant publication.
144) D. Bernoulli 1731
145) On trouvera une histoire exhautive du problème dans Jorland 1987. Ce dernier caractérise l'approche de Daniel Bernoulli comme une nouvelle théorie de l'espérance morale, équivalente à l'espérance mathématique pour la limite d'une richesse infinie comparativement au gain. Retenons ici, comme points importants de cette histoire, que Buffon fut le premier à jouer réellement le problème (Buffon 1777), que Condorcet fit faire un pas décisif en basant le concept d'espérance mathématique sur le théorème de Bernoulli (le produit du gain par la probabilité est une valeur moyenne, et non une valeur réelle : Condorcet MS 875 f° 110-112 et 1781, 1785 a et b, 1805 ; et la probabilité n'est valide alors que pour des événements répétables, ce qui sera considéré tout au long du 19ème siècle, dans la ligne de Condorcet), que Laplace reprit au contraire la solution subjective de Daniel Bernoulli. Les opinions des historiens des probabilités sur le fin mot du problème de Saint Pétersbourg ne sont pas unanimes.
146) Pour Jorland (ibid), le paradoxe de Saint-Petersbourg a abouti en fin de compte à substituer la loi des grands nombres au principe de raison suffisante comme fondement de l'espérance mathématique, et à soulever la question de la nature subjective ou objective des probabilités, selon qu'elles ne s'appliquent pas, ou au contraire s'appliquent, à des événements singuliers. Notons par ailleurs, avec Bru 1983, que la formulation "bayesienne" (ou laplacienne) ne donne pas une solution au problème de Saint-Petersbourg, l'enjeu bayésien étant encore plus infini que celui de la théorie ordinaire, comme Laplace le remarqua (Laplace 1776), et comme d'Alembert le souligna à sa suite (1780 b). De là l'intérêt porté par Laplace et Condorcet au problème de la fixation des enjeux, Laplace ralliant en 1812 Daniel Bernoulli sur la question de l'espérance morale (c'est-à-dire de la valeur relative de l'argent) tandis que Condorcet s'interrogeait (Condorcet 1884) sur le sens économique de la notion d'enjeu équitable, ouvrant la voie à la solution de Feller.
147) Voir en particulier 1761 b et 1767 c. Nous y reviendrons en 3.7 et 3.8
148) 1768 c, 27ème mémoire, p. 299 - 300. Il considère en outre suspecte l'idée d'ajouter les espérances partielles pour obtenir l'espérance totale.
149) Il propose comme formules possibles pour la probabilité du n ième coup (étant donné les n - 1 précédents), non plus $1/2^n$ (cas où la probabilité de chaque coup est indépendants du rang), mais : soit 1/2 1/2 $(1 + Cn^2)$, C = constante de faible valeur ; soit $1/2^{n\ (1\ +\ a)}$, a étant un nombre quelconque (on voit que dès que a < 7/100 la solution obtenue est correcte) ; soit 1/2 (1 + B / (k - n), avec positif ; soit $1/2^{\ n\ (1\ + B\ /(k\ -\ n)\ /2}$; on peut, propose-t-il, chercher une formule pour exprimer la probabilité de telle sorte qu'elle soit nulle dès que n est supérieur à un certain nombre (1768 b). Mais ces solutions ne résolvent pas pour autant le problème à ses yeux, comme on le voit aux textes postérieurs, et notamment à une lettre à Lagrange du 22-9-1777, dans laquelle il lui écrit : "Votre solution de différents problèmes sur les jeux me fait désirer beaucoup que vous nous en donniez une du problème de Saint-Pétersbourg, qui me paraît impossible en admettant les principes connus". (in Lagrange 1867-1892, vol. 13, p. 330).
150) Et, comme le note Swijtink (1986), de la formulation spécifique que lui ont donné les Bernoulli et Cramer.
151) Voir un autre modèle alternatif, dans 1780 b, avec des probabilités w, w', etc..., différentes à chaque coup (voir 3.8)
152) Il ajoute : "ce qui m'étonne, c'est que de grands géomètres, qu'on ne nomme point" (c'est évidemment Daniel Bernoulli), "aient pu confondre ces deux cas" (1768 c, 27ème mémoire (p. 286), reprenant les considérations du 10ème, 1761 b). D'Alembert justifie ainsi sa conclusion de toujours : "on ne doit compter que trois coups, *croix*, *pile* et *croix*, pile et pile", car ce sont les

seuls "qui décident de l'événement du jeu " (ibid. , p. 289). Voir aussi le cas du comptage de cartes tirées au hasard, évoqué en 2.7, tel que d'Alembert l'effectue dans son texte de 1776.
153) Pearson 1978 (p. 535), à propos de Todhunter 1865, auquel il reproche de ne pas montrer quelle est l'erreur incriminée de d'Alembert. La plupart des commentaires critiques du 19ème siècle manifestent une absence de recul vis-à-vis des règles ou conceptions admises. Cela étant, Pearson lui-même n'a pas vraiment éclairé la nature des objections de d'Alembert.
154) Voir le premier livre de l'*Histoire Naturelle* de Buffon.
155) 1768 b, p. 79 - 80 ; p. 86 - 87. La remarque était couramment faite depuis Huygens. On l'appelle aujourd'hui durée de vie, la première étant la vie moyenne. Voir encore, sur la durée de vie, p. 93.
156) C'est de la composition multiplicative des probabilités d'événements successifs qu'il s'agit ici. Cf. 1761 b, paragraphes 19-21.
157) 1768 c, p. 289. Sa conclusion est qu'il y a trois possibilités équivalentes mathématiquement ; et que s'il n'y a pas équipossibilité des trois, physiquement parlant, c'est éventuellement "parce que pile arrivant deux fois de suite, est peut-être un peu moins possible que *pile* et *croix* arrivant successivement. Je ne sais si je me trompe.."
158) Au paragraphe 2.7. Cf. 1776
159) 1761 b, paragraphes 10 et 13. Sur l'espérance de vie, cf. 1761 c, puis 1767 c (voir 2.6)
160) 1767 c, in 1821, vol. 1, p. 453
161) La théorie de l'espérance morale, proposée par Cramer qui distinguait, à propos du problème de Saint-Petersbourg, la valeur mathématique (quantité) et la valeur morale de l'argent (valeur d'usage), fut reprise par Daniel Bernoulli, Euler, Laplace. C'est une des directions déterminées dès l'élaboration du problème par Cramer et Nicolas Bernoulli ; l'autre étant celle prise par ce dernier, suivi plus tard par d'Alembert, où l'on cherche la certitude morale plutôt que l'espérance morale, et où l'on se pose la question de la détermination du moment à partir duquel la petite probabilité peut être considérée comme nulle (voir, sur l'origine de ce clivage, la lettre de Nicolas Bernoulli à Cramer, du 3 juillet 1728, et Jorland 1987, qui la cite).
162) Laplace distingue, à la suite de D. Bernoulli, l'espérance morale et l'espérance mathématique et évoque, dans l'un de ses premiers écrits sur les probabilités (Laplace 1773), la juste critique par d'Alembert de leur confusion, le créditant d'avoir fait sentir "la nécessité d'établir dans ces matières une distinction entre le mathématique et le moral" et d'avoir ainsi permis à la théorie des probabilités de s'appuyer "dorénavant sur des principes clairs et d'être resserrée dans ses véritables bornes" (p. 224 - 226). La réalité est plus complexe, et Laplace savait sans doute bien qu'en s'élevant contre la confusion des deux significations de l'espérance, d'Alembert s'en prenait aussi bien à la seconde pour les raisons que nous tentons ici d'éclairer. Son commentaire comporte donc une part de flatterie pure et simple.
163) Cité par Granger 1956 et Yamazaki 1971
164) Condorcet 1781, 1784.
165) 1768 b, p. 82-83. Par exemple, la certitude de gagner 500 livres et une probabilité 1/2 qu'on gagnera 1000 livres sont représentées par la même espérance. Les cas ne sont pas les mêmes et on devrait les décrire par des formules différentes. Et encore, dans 1768 c (27ème mémoire) : "je ne conviendrai jamais que l'espérance de gagner un écu avec la probabilité 1/2, la *certitude* de gagner 1/2 écu avec la probabilité 1 (...) et l'espérance de gagner cent mille écus avec la probabilité 1/100 000 soient égales entre elles..." (p. 304). Pour un joueur, il n'y a pas d'équivalence entre ces cas, alors qu'on la suppose dans l'analyse des jeux ; c'est elle qui constitue "l'une des plus fortes objections qu'on puisse faire contre les règles reçues de l'analyse des jeux" (ibid).
166) 1768 c, p. 304
167) 1780 b, p. 42. C'est alors qu'il propose de prendre m probabilités différentes w, w', etc..., une pour chaque coup. L'enjeu a alors la forme : = 2 [1+2 (1 - w) + 4 (1 - w^2) + ...] + 2 (1 - w) [1 + 2w + 4 w^2 + ...] + 2 w' [1 + 2 (1 - w') etc...] divisé par *m*. D'où l'enjeu total d w / w
168) 1780 b, p. 47 - 48
169) D'Alembert estime encore douteux, en 1780, qu'il soit exact que l'espérance fût le produit de la somme espérée par la probabilité que l'on gagnera, si la probabilité est très petite (1780 b, p. 47)
170) 1783 d, Ms 1793, feuillet 373 (article 4 du mémoire). "Cette question revient à celles que nous avions tant de fois agitées sur le manière de comparer la probabilité et la certitude" ; et de reprendre les anciens exemples sur les chances différentes de gagner telle ou telle somme d'écus.
171) 1783 d, Ms 1793, feuillet 374 (article 4)
172) Nous citons ce passage, inédit, dans son entier, en raison de son caractère particulièrement clair : 1783 d, Ms 1793 (article 8), feuillets 382-385.

173) 1761 b, paragraphe 10. Déjà Nicolas Bernoulli avait proposé d'ignorer les probabilités très faibles pour résoudre le problème de Saint-Petersbourg, mais c'est dans un sens différent, comme on le voit à ce qui précède, que d'Alembert reprend cette idée : en lui donnant une signfication objective pour les probabilités (avant Nicolas, Jacques Bernoulli avait, dans l'*Ars conjectandi*, considéré qu'une probabilité de 999/1000 donnait une certitude morale). Chez Jacques comme chez Nicolas Bernoulli, les petites valeurs de probabilités sont prises pour nulles subjectivement. C'est dans un même esprit que Buffon émet une considération analogue.
174) 1767 b, paragraphe 13. Voir encore, sur l'annulation des petites probabilités, 1767 c, 1767 d (sur l'inoculation), 1768 b
175) 1761 b, paragraphe 10
176) Paty 1977 a. Voir en particulier la dissertation de d'Alembert, reprise dans l'*Essai sur les Eléments de philosophie,* sur le caractère nécessaire et non contingent des lois de la nature (1759 b)
177) 1761 b, paragraphe 5.
178) A propos du moment où, dans le jeu, il ne nous est plus indifférent de perdre, qui est celui de l'attribution d'une probabilité strictement nulle, d'Alembert évoque des "questions semblables sur lesquelles le calcul ne peut avoir de prise ; parce qu'il ne saurait jamais déterminer d'une manière précise et rigoureuse les choses morales" (1768 b, p. 91)
179) cf. p. ex. 1767 c, in 1821, vol. 1, p. 457. Après trois *pile*, au jeu en quatre coups, les joueurs parieront plutôt sur *croix*. "Il n'y a point de joueur qui ne fasse tacitement cette supposition, qu'un même effet ne saurait arriver de suite un certain nombre de fois" (ibid. p. 455).
180) Cette dénomination ainsi que les comparaisons sont évidemment de nous, non de d'Alembert.
181) 1761 b, paragraphe 11
182) Ibid, paragraphe 12. D'Alembert précise ici que c'est *physiquement* qu'une longue répétition (métaphysiquement pensable) est impossible (cf. nos sections 2.5 et 3.2). Voir aussi 1767 c, in 1821, vol. 1,
p. 455 : il est contraire à "l'ordre constant observé dans la nature", "que le même effet arrive 100 fois, 50 fois de suite".
183) Ibid, paragraphe 16
184) 1767 c, in 1821, vol. 1, p. 454 (souligné par d'Alembert)
185) Un petit nombre de répétitions (d'Alembert en propose quatre) serait mesuré par un grand nombre d'expériences simultanées. Un nombre de joueurs égal à un multiple de $2^4 = 16$ lancent, chacun de son côté, une pièce en l'air quatre fois de suite. Chacun peut avoir $2^4 = 16$ combinaisons différentes de C et P pris quatre à quatre (1761 c, paragraphe 4). D'Alembert propose d'étudier, plus généralement (ce qu'il reprendra plus tard en donnant des modèles de variations de probabilité, cf. 3.3), la probabilité des combinaisons en fonction de leur degré de répétition (ibid, paragraphe 17).
186) C'est le principe qui fonde la croyance des joueurs à une chance "qui mûrit". Zeno Swijtink (1986) a voulu montrer récemment que cette conception qui est celle de d'Alembert résulte logiquement de deux exigences sur les probabilités *de re* (dans les choses, dans la nature), qui étaient acceptées tacitement pendant la période de genèse des probabilités. Ces exigences étant : 1) si A est plus probable que B, il se produira plus souvent, 2) la notion de probabilité doit aussi s'appliquer au cas individuel. La maturation de la chance était alors acceptable, c'était affaire d'option, et elle ne serait abandonnée qu'avec l'avènement des habitudes de raisonner sur des données statistiques. L'auteur propose, sur cet exemple, à juste titre, de "lire d'Alembert dans le contexte de l'émergence des probabilités".
187) 1767 c in 1721, vol. 1, p. 455, 457
188) 1768 b, p. 90. Il fait une différence entre les répétitions en petit nombre, qui peuvent être le fait du hasard et celles de grande fréquence, qui, si on les observe, doivent être rapportées à une cause (*Ibid.*).
189) 1768 c, p. 458-461
190) L'exemple d'arrangements au hasard de lettres et de la probabilité que l'un d'eux fasse sens était couramment discuté à l'époque. D'Alembert l'évoque à l'article "Anagramme" (c'est le mot *Roma*) ; il prend *Constantinopolitanensibus* dans les discussions sur les arrangements (1767 c, mais encore 1768 c, p. 306 et suiv., 1780 b, p. 48 - 49). Ce mot fait sens. Mais l'arrangement dans l'ordre alphabétique des lettres serait également révélateur d'un ordre, par opposition à une simple distribution au hasard où les lettres sont mêlées.
191) 1767 c, p. 460 - 461. Voir le paragraphe sur le temps (3.9)
192) 1768 b, p. 89. D'Alembert poursuit : "En général, s'il est vrai que toute uniformité singulière d'événements annonce une cause, dès qu'on ne supposera point de cause, on ne doit point supposer d'uniformité extraordinaire ; donc tous les cas qui renferment une uniformité constante et hors de l'ordre naturel, ne doivent point être regardés comme des cas physiquement possibles" (p. 89 - 90).

Il y a encore une reprise de l'exemple emprunté à Daniel Bernoulli dans 1768 c (27ème mémoire), p. 293 - 294.
193) 1768 c, p. 294
194) 1780 b. L'argument est attribué à Béguelin, 1769
195) Et d'Alembert insiste à ce propos : "si 2 joueurs jouent 100 coups de croix et pile, "je crois", dit-il, renvoyant au tome IV des *Opuscules mathématiques*, qu'on "peut parier sans crainte que les deux suites où croix et pile se trouveraient sans mélange n'auront pas lieu", alors qu'il y aura une des autres suites qui sera répétée plusieurs fois. (1780 b, p. 41)
196) 1780 b, p. 48 - 49
197) 1761 b, paragraphe 15 - 16 ; paragraphe 4 (voir 2.5)
198) 1767 c, in 1821, vol. 1, p. 452, 4564, 457
199) Laplace 1773, p. 227-228. La probabilité du côté de plus grande pente est (1 +)/2, celle de l'autre côté est (1 -)/2.
200) A cette interprétation subjective s'ajoute un "principe d'indifférence" (principe appelé ainsi par Keynes, cf. Dupont 1978) sous-jacent, qui s'exprimera, par exemple, dans Laplace 1814, de la manière suivante : "la probabilité d'un événement est le rapport du nombre des cas qui lui sont favorables au nombre de tous les cas possibles, lorsque rien ne porte à croire que l'un de ces cas doit arriver plutôt que les autres, ce qui les rend pour nous également possibles". Ce principe peut être rattaché au principe de raison (non) suffisante de Leibniz. Voir, pour une analyse de la pensée de Laplace dans l'Essai, Dupont 1978.
201) Ibid, p. 230
202) Quant à Diderot, il élude le problème en ne voyant dans l'équiprobabilité qu'une évidence de bon sens, sans s'embarrasser ni de raisons physiques ni d'expliciter une interprétation subjective dont il serait peut-être le plus proche (mais sa position sur le hasard est ambiguë). "M. d'Alembert", écrit-il, "prétend que la combinaison *aaaaaa* est moins possible que la combinaison *aababa*. J'avoue qu'abstraction faite de toute cause physique, qui favorise l'une ou l'autre, cette proposition me paraît encore vide de sens" (Diderot 1761, p. 197). Pour Hume et Condorcet, l'équiprobabilité est l'effet de notre indifférence d'esprit, de notre égale ignorance.
203) La dénomination est rétrospective.
204) 1780 b, p. 40.
205) D'Alembert s'appuie tout d'abord sur Buffon qui dans son *Supplément à l'Histoire naturelle*, volume IV, estime que l'on doit considérer les probabilités comme nulles après le treizième coup (la probabilité du quatorzième est alors inférieure à un dix-millième), pour constater que ce point de vue (bien que lui-même ne l'adopte pas) témoigne d'une confirmation des "doutes sur l'égalité des possibilités de tous les cas" (1780 b, p. 49). C'est alors qu'il propose son hypothèse théorique de non-équiprobabilité. P étant arrivé au premier coup, C sera un tout petit plus probable que P au second coup : la probabilité sera non pas 1/2, mais (1 + a)/2, a étant une quantité très petite, et celle de P, seulement (1 - a)/2. Si P est arrivé aux deux premiers coups, la probabilité de C au troisième sera, au lieu de 1/2 (dans le cas équiprobable), (1+ a + b)/2, etc... En sorte que la probabilité que C n'arrive qu'au quatrième coup, par exemple, sera : 1/2 . (1-a)/2 . (1-a-b)/2 . (1 +a + b + c)/2. D'où l'enjeu de Pierre : 1/2 . (1 + 1 + a + (1 - a) (1 + a + b) + (1 - a) (1 - a - b) (1 + a + b + c +...). En développant les termes de la suite (considérant a^2 , b^2 , etc... comme négligeables), et supposant a = b = c = d = ..., on obtient la somme, finie (les termes vont en diminuant à partir du troisième coup). C'est, estime d'Alembert, une théorie possible, le problème demeurant de savoir comment évaluer a.
206) 1783 d, Ms n° 1793, § 9, f^{os} 386-387. On a scrupuleusement transcrit le texte manuscrit de d'Alembert au signe près.
207) Voir 3.7
208) Paty 1977 a
209) 1780 b, p. 60. Souvenons-nous que d'Alembert avait lui-même proposé à diverses reprises d'estimer des probabilités à partir de l'observation des fréquences de diverses séquences (voir 3.7). L'idée, bien sûr, n'était pas nouvelle, mais il est juste de la rappeler puisqu'on a souvent fait grief à d'Alembert d'avoir purement et simplement ignoré l'expérience en la matière.
210) La détermination des probabilités par les événements, possible grâce au "théorème des grands nombres, invoqué comme un "mode empirique" dans les choses de la vie au lieu du simple "aeque proclives", par Jacques Bernoulli dans son *Ars conjectandi* (et dont l'idée est reprise dans l'article "Probabilité"), est effectuée par Laplace en 1774, et donne à ses yeux, comme à ceux de Lagrange, la justification pratique de l'équiprobabilité (Laplace 1774 ; lettre de Lagrange à Laplace du 13 janvier 1775, citée dans Bru 1983).

Dès lors les conclusions de la théorie ordinaire ne sont que l'asymptote de ce qui a lieu dans la nature "de la même manière que les vérités géométriques ne sont que les asymptotes des vérités physiques" (lettre de Lagrange, ibid). On peut dire alors avec B. Bru que "la théorie bayésienne est présentée explicitement par Laplace et Condorcet comme une réponse aux doutes de d'Alembert" (voir Laplace 1776, qui s'inspire de Beguelin 1769, lequel, souvenons-nous, est également tributaire de d'Alembert). L'équiprobabilité étant ainsi fondée, il n'est plus besoin de la justifier davantage, pour Laplace. Le problème était-il réglé pour autant ? L'histoire ultérieure de la théorie des probabilités indique que non.

211) Cette histoire reste encore à faire. Dans le chapitre de son livre sur l'émergence des probabilités (Hacking 1975) consacré à l'équipossibilité, Ian Hacking étudie essentiellement l'origine de cette notion avec Leibniz et dans la perspective de sa définition *de re* (sur les choses) et *de dicto* (sur les propositions) (p. 122 - 133).

212) Reichenbach 1920 a. Reichenbach devait développer ultérieurement une philosophie de la connaissance fondée sur une méditation de la notion de probabilité et sur une interprétation particulière de celle-ci.

213) La loi des grands nombres porte sur le calcul des fréquences et des dispersions de séries simplement répétées.

214) Reichenbach fait un parallèle avec la situation de la géométrie, dont on ne peut dire, sur des bases mathématiques, si elle décrit des objets réels.

215) Poincaré 1900

216) Reichenbach se propose également (Reichenbach 1920 b) d'analyser la compatibilité de cet axiome d'applicabilité et du principe de causalité pour présenter la possibilité des lois de probabilités ; puis, allant plus loin, d'en montrer la nécessité pour la connaissance physique, remplaçant le principe de causalité par celui de probabilité, sur lequel il fondera sa philosophie de la connaissance.

217) Sur les conceptions de d'Alembert sur le temps en physique, voir 1767 b et Paty 1977 a.

218) 1761 b, paragraphe 3.

219) Diderot 1746, article 21. Le raisonnement de Diderot, qui suit de près Lucrèce, insiste en fait sur l'infinité du monde et celle des atomes.

220) Diderot 1761 in Diderot 1875 - 1877, vol. 9, p. 202. Diderot écrit, à propos des répétitions, de "toutes ces différences que M. d'Alembert établit entre les coups successifs et les coups mêlés", que "l'on n'a pas sitôt étendu la durée à l'infini que cette différence disparaît, et elle diminue à mesure que le nombre des coups ou que la notion de la durée du jeu s'accroît" (p. 204).

221) Diderot 1761, p. 206

222) 1761 b, paragraphe 21

223) 1761 b, paragraphe 14

224) 1767 c, p. 461. "Ainsi", ajoute d'Alembert, "le raisonnement que Bernoulli tire de ses calculs pourrait être faux, que peut-être le nôtre serait encore juste".

225) 1768 c, 27ème mémoire, p. 287 - 288

226) Ibid. , p. 288

227) Peut-être s'agit-il de ces "quelques idées" dont il dit à d'Alembert, dans sa lettre à celui-ci du 23 février 1767, qu'elles lui étaient venues à la suite de la lecture de son mémoire (d'Alembert 1767 c), cf. 2-5.

228) Lettre de Nicolas de Béguelin à d'Alembert, du 20 avril 1768, in Henry 1885, p. 561 - 562. Voir aussi 2.5

229) Ibid

230) cf. Bru 1986, p. 256

231) Laplace 1772 : voir le paragraphe 1.3

232) L. Daston (Daston 1977) note que si d'Alembert et Laplace ont tous deux une conception subjective des probabilités, d'Alembert met quant à lui une limite à notre degré d'ignorance (elle cite, à juste titre, 1780 b, p. 48) : notre expérience est qu'une série du même événement ne se produit pas, et c'est une connaissance acquise, qui limite par là-même l'utilisation des probabilités puisqu'elle indique qu'il y a une cause intelligible ; et quand il y a une cause intelligible, la théorie des probabilités est inapplicable. Voir nos propres considérations sur la causalité en 3.7.

233) Tel est le sens de son analyse épistémologique de l'attraction newtonienne.

234) Paty 1977 a

235) Voir Paty 1977 a. L'article "Fortuit" de l'*Encyclopédie* (1757 a) fournit de son "déterminisme" une image particulièrement frappante. Plusieurs univers semblables livrés à eux-mêmes donneraient lieu exactement aux mêmes événements, y compris relativement à la vie humaine. L'image est plus forte encore que ce qui ressort de ses conceptions sur la nécessité des lois de la

nature (puisque, au-delà de ces lois, il n'était pas réductionniste et admettait d'autres critères épistémologiques que ceux de la mécanique). Mais la causalité universelle ainsi affirmée est loin d'être l'exception. L'article "Fatalité" (de l'Abbé Morellet) l'exprime d'une manière assez semblable.
236) On se reportera, sur ce point, à Paty 1977 a.
237) Science sociale mathématique ou "mathématique sociale".
238) R. Rashed, op. cit. , p. 45, 49.
239) Par Condorcet.
240) Condorcet, Manuscrits de la bibliothèque de l'Institut (probablement de 1772. Voir Crépel 1987); Ms 883, fos 216 - 221. Sur le problème de Saint-Petersbourg, Condorcet précise : "L'ancienne règle était cependant toujours regardée comme certaine" (malgré le paradoxe soulevé par Daniel Bernoulli) "et ce ne fut qu'en 1754 que dans le quatrième volume de l'*Encyclopédie*, M. D'Alembert osa la révoquer en doute. Il s'est depuis beaucoup occupé de cette théorie et de quelques unes de ses applications. M. Daniel Bernoulli a trouvé ses réflexions absurdes et les autres géomètres ont gardé le silence". Condorcet mentionne un autre opposant de d'Alembert, un janséniste sectaire.
241) Faisant allusion, dans le même manuscrit, à la critique par d'Alembert du calcul de la probabilité des combinaisons successives, Condorcet écrit : "Il a considéré particulièrement la probabilité d'amener croix en deux coups en jouant à croix et pile, je suppose qu'on connaisse des objections, qu'on les ait présentes, et voici ce que j'y oppose..." (*ibid*, feuillet 219, paragraphe 10). C'est, en particulier, qu'il faut les prendre au sérieux. Voir aussi le manuscrit Ms 875, feuillets132-133 de la bibliothèque de l'Institut, qui paraît faire suite au manuscrit Z 30 du Bureau des Longitudes, puisqu'il commence au point 3 de la description des arrangements des lettres du mot Roma (exemple utilisé par d'Alembert à l'article "Anagramme" de l'*Encyclopédie*), alors que le manuscrit Z 30 s'arrête précisément au point 2 et que, d'ailleurs, le support et la présentation sont identiques. Plus tard, Condorcet aura en charge les rapports de l'Académie sur les travaux soumis à publication, et on trouve ses analyses, objectives et résumant fidèlement les arguments présentés, des mémoires de d'Alembert sur les probabilités : p. ex., Registres de l'Académie des Sciences pour l'année 1780, p. 170-172 (sur les *Opuscules mathématiques*, vols 7 et 8).
243) Condorcet, manuscrit intitulé "Histoire abrégée de ce calcul", Bibliothèque de l'Institut, Ms 875 (probablement de 1774 ; cf. Crépel 1987), feuillets 94-99 : "M. d'Alembert crut que c'était au principe même du calcul des probabilités qu'il fallait remonter, et il crut découvrir dans l'un de ces principes, dans celui qui égale l'état d'un joueur à la probabilité de l'événement multiplié par le gain, la véritable cause des résultats singuliers dont on demandait l'explication. Ce principe qu'on ne se donnait plus depuis longtemps la peine de prouver en avait paru si naturel et si simple, ainsi que les premières conséquences qu'on en avait tirées, que personne jusqu'ici n'avait songé à le révoquer en doute".
243) Condorcet 1784. Condorcet résume les objections de d'Alembert aussi bien aux principes de la théorie des probabilités qu'à l'inoculation, et définit ainsi, en montrant le bien-fondé a priori des questions, l'espace où il va raisonner lui-même.
244) Condorcet 1805. Ce texte a été écrit vers 1787-89.
245) *Ibid*., p. 56. Il en donne des exemples sur des tirages de boules dans des urnes.
246) "L'égale possibilité des événements n'a été pour nous que l'ignorance absolue des causes qui peuvent déterminer un événement plutôt qu'un autre".
247) *Ibid*., p. 91. Sur cette base, Condorcet reprend la considération du problème de Saint-Petersbourg, discutant en particulier des valeurs moyennes (voir ce qu'on a dit précédemment en 3.3)
248) Voir, la manière dont il combine l'exemple, souvent repris après Hume, sur la répétition d'un événement comme le lever du soleil chaque matin, lié à une loi physique, et le problème de la probabilité des répétitions, combien présent chez d'Alembert. Il a été également visiblement influencé par les critiques de ce dernier sur la mathématisation des phénomènes sociaux. Sur le sujet du soleil qui se lève chaque jour, B. Bru a récemment proposé une intéressante remarque sur la différence entre Condorcet et Hume : Condorcet fonde le calcul des probabilités sur une théorie de la connaissance et non l'inverse ; c'est parce qu'on est certain que le soleil se lèvera demain que les propositions du calcul des probabilités auront une valeur pour la conduite de la vie (cf. Bru 1987)
249) Cité par Bru 1983
250) Voir section 2.5. Sur espérance mathématique et espérance morale chez Condorcet, voir Crépel 1987 b.
251) Le manuscrit est celui de la Bibliothèque de l'Institut (Ms n°875, feuillet 103), intitulé "De la nature du calcul des probabilités". Deux dés une fois jetés sont déterminés, mais nous ne connaissons le résultat qu'en levant le voile dont on les a recouverts. L'événement "est déterminé.

Il n'est pas plus ou moins possible, mais vrai ou faux en lui-même et par rapport à un troisième homme qui aurait levé le voile. Ainsi la probabilité d'un événement futur ne doit être pour nous que comme celle d'un événement passé". Et encore : "Lorsque nous disons de deux événements futurs contradictoires entre eux qu'ils sont également possibles, cela s'entend d'une probabilité abstraite et métaphysique et non d'une possibilité physique et réelle". D'où il s'ensuit que l'on peut à bon droit raisonner sur des dénombrements de combinaisons. Mais il s'agit "d'une considération purement intellectuelle qui n'a aucun rapport par elle-même avec l'état physique des choses, et qui conséquemment ne peut servir à les prévoir".

252) Condorcet, *ibid.*, f^{os} 104-105. Condorcet ajoute, à l'appui de ces considérations, un commentaire sur la question des suites répétées, qui reprend évidemment le problème posé par d'Alembert, et oppose les deux aspects rappelés par ce dernier, de la plus grande chance de gagner encore si l'on a déjà gagné (ou d'avoir un même résultat de jet de pièce ou de dé), parce qu'il y a une cause (et c'est la loi des grands nombres qui en juge), et du cas où c'est le simple hasard qui règle les chances. Mais au contraire de d'Alembert, Condorcet se contente de la formule qui donne la probabilité comme très petite (il reprend le même nombre pour le nombre de coups, 19 et 20 : voir plus haut).

253) "Si au contraire" (de la supposition d'une cause qui favorise un côté) "je m'en tiens à la simple considération métaphysique, je dois dire : puisque le jeu est égal par hypothèse, la probabilité est égale des deux côtés". "La "métaphysique" intervient ici au titre de la simple instance de connaissance requise par la définition retenue.

254) La transition nous est fournie par Condorcet lui-même, dans son manuscrit, où, après avoir discuté de l'équiprobabilité (*ibid*, feuillets 104-106), il écrit : "Après avoir expliqué comment ce qu'on appelle probabilité est une simple considération de notre esprit tout à fait étrangère à l'ordre réel des choses, il faut montrer comment c'est d'après cette même probabilité que nous jugeons de toutes les choses de la vie et que c'est elle qui règle notre conduite".

255) A l'exception des vérités mathématiques, des propositions identiques, de la métaphysique et de celles qui expriment nos sensations actuelles, "il n'y a aucune espèce de propositions qui soit certaine [...], toutes sont probables, toutes appartenant à cette partie du calcul des probabilités où l'on juge de l'ordre futur des événements par celui qu'il ont observé ou ce qui est plus précis de l'ordre des événements inconnus par celui des événements connus" (*ibid*, f^{os} 105-106).

256) *Ibid*, f^{os} 108-109

BIBLIOGRAPHIE

D'ALEMBERT, Jean le Rond

- 1751 a - Discours préliminaire de l'Encyclopédie, in d'Alembert, Diderot, vol 1. ; ré-éd. in d'Alembert 1759, vol. 1 ; 1805, vol. 1 ; 1821, vol. 1, p. 17-114.

- 1751 b - "Absent", article de l'Encyclopédie, in d'Alembert, Diderot, vol. 1, p. 40-41

- 1751 c - "Alternation", ibid, vol. 1, p. 304

- 1751 d - "Avantage", ibid. , vol. 1, p. 862

- 1752 a - "Bassette", ibid. vol. 2, p. 122

- 1752 b - "(Franc-) Carreau", ibid. , vol. 2, p. 702

- 1753 - "Combinaison", ibid., vol. 3, p. 663-664

- 1754 a - "Croix ou pile", ibid., vol. 4, p. 512-513

- 1754 b - "Dé", ibid., vol. 4, p. 647-648

- 1757 a - "Fortuit", ibid., vol. 7, p. 204-205

- 1757 b - "Gageure", ibid., vol. 7, p. 420-421

- 1759 a - *Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie*, nouvelle édition revue, corrigée et augmentée considérablement par l'auteur, 4 vols, Chatelain, Amsterdam (pour le 5ème volume, voir d'Alembert 1767).

- 1759 b - *Essai sur les éléments de philosophie*, in d'Alembert 1759 a, vol. 4 ; ré-éd. in d'Alembert 1805, vol. 2 ; 1821, vol. 1., p. 115-348.

- 1761 a - *Opuscules mathématiques ou Mémoires sur différents sujets de géométrie, de mécanique, d'optique, d'astronomie, etc...* vol. 2, David, Paris.

- 1761 b - "Réflexions sur le calcul des probabilités", 10ème Mémoire, in 1761 a, p. 1 - 25

- 1761 c - "Sur l'application du calcul des probabilités à l'inoculation de la petite vérole lues à l'Académie des sciences en 1760" (p. 26 - 46), suivi de "Notes sur le mémoire précédent" (p. 47 - 56) et de "Théorie mathématique de l'inoculation", (p. 57 - 95), constituant le "onzième mémoire", in d'Alembert 1761 a.

- 1765 a - "Loterie", in d'Alembert, Diderot, vol. 9, p. 694.

- 1765 b - "Pari", ibid. , vol. 10, p. 942

- 1767 a - *Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie*, vol. 5, Chatelain, Amsterdam.

- 1767 b - *Eclaircissements aux Elémens de philosophie*, in d'Alembert 1767 a ; ré-ed in 1805, vol. 1 et 1821, vol. 1 (insérés de p. 135 à 348)

- 1767 c - "Doutes et questions sur le calcul des probabilités", in d'Alembert 1767 a, p. 273 - 304 ; in 1821, vol 1, p. 451-462

- 1767 d - "Réflexions philosophiques et mathématiques sur l'application du calcul des probabilités à l'inoculation de la petite vérole", in d'Alembert 1767 a, p. 305 - 430 ; in 1821, vol. 1, p. 463-514

- 1768 a - *Opuscules mathématiques*, vol. 4, Briasson, Paris

- 1768 b - "Extrait de plusieurs lettres de l'auteur sur différents sujets, écrites dans le courant de l'année 1767. V : sur le calcul des probabilités (p. 73 - 79). VI : sur l'analyse des jeux (p. 79 - 92). VII : sur la durée de la vie (p. 92 - 98). VIII : sur un mémoire de M. Bernoulli concernant l'inoculation" (p. 98 - 105), faisant partie du vingt-troisième mémoire, in d'Alembert 1768 a.

- 1768 c - "Extrait de lettres sur le calcul des probabilités, et sur les calculs relatifs à l'inoculation. I : sur le calcul des probabilités (p. 283 - 310). II : sur les calculs relatifs à l'inoculation" (p. 310 - 341), constituant le vingt-septième mémoire, in d'Alembert 1768 a.

- 1768 d - *Opuscules mathématiques*, vol. 5, Briasson, Paris

- 1768 e - "Sur les tables de mortalité", 36ème mémoire, paragraphe 3, in 1768 d, p. 228 - 231

- 1768 f - "Sur les calculs relatifs à l'inoculation ; addition au vingt-septième mémoire", comme paragraphe 6 "Quarante-quatrième du mémoire, contenant plusieurs écrits sur différents sujets", in 1768 d, p. 508 - 510

- 1776 - " Cartes. Problèmes sur les cartes", in *Supplément de l'Encyclopédie*, vol. 2, p. 250-251

- 1780 a - *Opuscules mathématiques*, vol. 7, Jombert, Paris

- 1780 b - "Sur le calcul des probabilités", in Cinquante-deuxième mémoire, d'Alembert 1780 a, p. 39 - 60.

- 1780 c - *Opuscules mathématiques*, vol. 8, Jombert, Paris

- 1780 d - "Sur les annuités", "Recherches sur différents sujets, paragraphe 3", in 1780c, p. 46-51

- 1783 a - *Opuscules mathématiques*, vol. 9, inédit ; manuscrits de la bibliothèque de l'Institut, numéros 1790 (chap. I à IX, 466 feuillets) ; 1791 (chap. IX à XIII, 244 feuillets) ; 1792 (chap XIV à XXIII, 404 feuillets) ; 1793 (chap. XXIV à XL, 256 feuillets). (Remarque : nous avons daté ces textes inédits de l'année de la mort de d'Alembert, par un choix de simple convention. D'Alembert les avait préparés pour publication, comme en témoignent des indications pour le typographe. Certains feuillets sont déplacés. C'est ainsi qu'on trouve, inséré dans le chapitre 26 (sur les mouvements d'un corps dans un fluide) trois feuillets (numéros 246, 247 et 247 bis, numérotés par d'Alembert § 55, 56 et 57) qui traitent d'annuités mais sont distincts de ceux correspondants du chapitre 24, ici décrit comme 1783 b. Ou encore que le chapitre 23, réputé manquant dans le catalogue de la bibliothèque de l'Institut, se trouve en réalité intercalé entre des feuillets du chapitre 22).

- 1783 b - "Sur les annuités", in 1783 a, chapitre 24, in Ms n° 1793, feuillets 1-161.

- 1783 c - "Sur le tirage des officiers de l'Académie française", chapitre 28, in Ms. 1793, feuillets 339-349

- 1783 d - "Sur l'application du calcul des probabilités à certaines questions", in 1783 a, chapitre 31, Ms n° 1793, feuillets 369-387.

- 1783 e - "Réflexions sur la théorie de l'inoculation", chapitre 35 in 1783 a, Ms n°1793, feuillets 460 - 485

- 1805 - *Oeuvres philosophiques, historiques et littéraires de d'Alembert*, Bastien, Paris, 18 vols.

- 1821 - 1822 - *Oeuvres*, Belin, Paris, 5 vols. (Slatkine reprints, Genève, 1967).

D'ALEMBERT, Jean le Rond et DIDEROT, Denis (éditeurs) 1751 - 1780

Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, 17 vols + vol. de planches, Briasson, David, Le Breton et Durant, Paris.

AMPERE, André-Marie 1834 - *Essai sur la philosophie des sciences, ou Exposition analytique d'une classification naturelle de toutes les connaissances humaines*, Paris, Bachelier.

BAKER, Keith Michael 1975 - *Condorcet : from natural philosophy to social mathematics*, Chicago University Press, Chicago.

BAYES, Thomas 1763 - "An essay towards solving a problem in the doctrine of chances", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 53, 370 – 418.

BEGUELIN, Nicolas de 1769 - "Sur l'usage du principe de la raison suffisante dans le calcul des probabilités", *Histoire de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin*, Hande und Spener, Berlin, p. 382 – 412.

BERNOULLI Daniel

- 1734 – *Recueil des pièces qui ont remporté le prix de l'Académie royale des sciences*, t. 3, 1734, p. 95 - 122

- 1738 - "Specimen theoriae novae de mensura sortis", *Commentarii Academiae scientiarum imperialis petropolitanae*, tome V, 1738, p. 175-192. Trad. française "Esquisse d'une théorie nouvelle de mesure du sort" par R. Charreton, *Cahiers du Séminaire d'histoire des mathématiques* (Université P. et M. Curie, Paris), n° 6. 1985, p. 61-77.

- 1760 - "Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole, et des avantages de l'inoculation pour la prévenir", *Histoire de l'Académie des sciences*, 1760, t. 2 Paris, p. 1 - 79

BERNOULLI Jacques 1713 - *Ars conjectandi*, Bâle.

BRU, Bernard

- 1983 - "Doutes de d'Alembert sur le calcul des probabilités", in *Colloque d'Alembert*, Paris, 1983, à paraître.

- 1986 - Postface à P. S. Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités*, Bourgois, Paris, p. 245 - 311

- 1987 - "Condorcet et la statistique mathématique", exposé (non publié), Séminaire Condorcet, Université Paris 7, 2.4.1987 (à paraître dans la *Revue de Synthèse* 1988, n° 1).

BUFFON, Georges Louis Leclerc Comte de 1777 - *Essai d'arithmétique morale*, Paris

CONDORCET, Jean-Antoine-Nicolas de Caritat,

- 1781 - "Mémoire sur le calcul des probabilités", *Histoire de l'Académie royale des sciences pour 1781 avec les Mémoires de mathématiques et de physique pour la même année*, Imprimerie Royale, Paris, 1784, p.

- 1784 - "Eloge de d'Alembert", prononcé à l'Académie française le 26 février 1784, 1784, in d'Alembert 1805, vol. 1 et 1821, vol. 1, p. I - xxviii.

- 1785 a - *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*, Imprimerie Royale, Paris

- 1785 b - "Probabilité", *Encyclopédie Méthodique*, Panckouke, Paris, vol. 2, p. 652 - 666

- 1795 - *Esquisse d'un tableau historique des progrès de l'esprit humain* (rédigé en 1793), publié par Yvon Belaval et O. H. Prior, Vrin, Paris, 1970.

- 1805 - *Eléments du calcul des probabilités et son application aux jeux de hasard, à la loterie, et aux jugements des hommes*, Royez, Paris, 1805

- 1847 – 1849 -, *Oeuvres*, publiées par A. Condorcet, O'Connor et F. Arago, Paris, 12 vols.

COURNOT, Antoine Auguste 1843 - *Exposition de la théorie des chances et des probabilités*, Paris

CREPEL, Pierre

- 1987 - "Le Premier manuscrit de Condorcet sur le calcul des probabilités (1772)", *Historia Mathematica* 14, 1987 (sous presse).

- 1988 - "Condorcet, la théorie des probabilités et les calculs financiers", article du présent volume.

DARMON, Pierre 1986 - *La longue traque de la variole. Les pionniers de la médecine préventive*, Libraire Académique Perrin, Paris,

DASTON, Lorraine J.

- 1977 - D'Alembert's critique of probability theory, *Historia mathematica*.

- 1981 - *Historia Mathematica*

DIDEROT, Denis

- 1746 - *Pensées philosophiques*, in Diderot 1964.

- 1761 - "Sur deux mémoires de d'Alembert, l'un concernant le calcul des probabilités, l'autre l'inoculation" (1761), in Diderot 1875-1877, vol. 9, p. 192 - 212

- 1765 - "Jouer", in d'Alembert, Diderot, vol. 8, p. 884 - 888

- 1875 - 1877 - *Oeuvres complètes*, édition J. Assézat et M. Tourneux, 20 vols, Garnier, Paris. Voir aussi l'édition Hermann, Paris, 19

- 1955 - 1960 - *Correspondance*, éditions G. Roth, Minuit, Paris, 15 vols.

- 1964 - *Oeuvres philosophiques*, éditées par Paul Vernière, Garnier.

DUPONT, Pascal

- 1978 - "Laplace e il principio d'indiferrenza nell' *Essai philosophique des probabilités*", *Rendiconti seminario mathematico dell' università politechnica du Torino*, 36, 1977-1978, 125-137

ELOGE DE M. DE LA CONDAMINE 1774 - "Eloge de La Condamine" (sans nom d'auteur), *Histoire de l'Académie royale des sciences pour l'année 1774*, Imprimerie Royale, Paris, 1778, p. 85-121

FONTAINE, Alexis 1764 - "Solution d'un problème sur les jeux de hasard", *Histoire de l'Académie royale des sciences, Paris pour 1764, avec les Mémoires pour la même année*, Imprimerie Royale, Paris 17…, p. 429-431 des Mémoires.

FRANK, Philipp 1932 - *Das Kausalgesetz and seine Grenzen*, Wien, trad. fr. par J. du Plessis de Grenedan : *Le principe de causalité et ses limites*, Flamarion, Paris, 1937.

GRANGER, Gilles G. 1956 - *La mathématique sociale du marquis de Condorcet*, Presses universitaires de France, Paris.

s'GRAVESANDE, Whilhelm Jacob 1774 - *Oeuvres philosophiques et mathématiques*, Allamand, Amsterdam, 2 vols. (voir en part. l'Introduction à la philosophie, parue à Leyde en 1748).

HACKING, Ian

- 1965 - *Logic of statistical inference*, Cambridge University Press, Cambridge.

- 1975 - *The emergence of probability*, Cambridge University Press, Cambridge.

HENRY, Charles (ed.) 1885 - "Correspondance inédite de d'Alembert avec Cramer, Lesage, Clairaut, Turgot, Castillon, Béguelin etc...", *Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, XVIII, 507 - 570 ; 605 - 649

HUME, David 1748 - *A Philosophical essay concerning human understanding* (publié ensuite sous le titre *An enguiry concerning human understanding*, avec augmentation et corrections, 1750).

JORLAND, Gérard 1987 - "The Saint-Petersbourg paradox (1713 - 1937)", in L. Krieger and B. Heidelberger (eds), *The Probabilistic revolution* (à paraître)

LA CONDAMINE, Charles de

- 1754 - "Mémoires sur l'inoculation de la petite vérole", *Histoire de l'Académie Royale des Sciences, avec les mémoires pour l'année 1754*, Imprimerie Royale, Paris, 1759, p. 615-670 des

- 1758 - "Second mémoire sur l'inoculation de la petite vérole, contenant la suite de l'histoire de cette méthode et de ses progrés, de 1754 à 1758", *Histoire de l'Académie royale des sciences, avec les Mémoires, pour 1758*, Imprimerie royale, Paris, 1763, p. 439-482 des Mémoires.

- 1765 - "Suite de l'histoire de l'inoculation de la petite vérole, depuis 1758 jusqu'en1765 Troisième Mémoire", *Histoire de l'Académie Royale des sciences avec les Mémoires pour l'année 1765*, Imprimerie Royale, Paris, …, p. 505-532 des Mémoires.

- 1773 - *Histoire de l'inoculation de la petite vérole, ou recueil de mémoires, lettres, extraits et autres écrits sur la petite vérole artificielle*, Amsterdam, 1773.

LAGRANGE, Joseph LOUIS 1867-1892, *Oeuvres*, Gauthier-Villars, Paris 13, vols.

LAPLACE, Pierre-Simon de

- 1772 - "Mémoire sur les suites récurro-récurrentes et sur leurs usages dans la théorie des hasards" (présenté à l'Académie des sciences en février 1772) , *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris (Savants étrangers),* t. VI, 1774, p. 353 suiv. ; in *Oeuvres*, t. 8, 1891, p. 5 - 24.

- 1773 - "Recherches, 1°, sur l'intégration des équations différentielles aux différences finies et sur leur usage dans la théorie des hasards" (Présenté à l'Académie des sciences en mars 1773), *Mémoires de l'Académie des sciences de Paris (Savants étrangers),* t. 7, 1776, p. 37 - 232 ; in *Oeuvres*, t. 8, 1891, p. 69 - 197

- 1774 - " Mémoire sur la probabilité des causes des événements" (présenté à l'Académie des sciences en 1774), *Mémoire de l'Académie des sciences (Savants étrangers),* t. VI, 1774, p. 621 suiv. ; in *Oeuvres*, t. 8, 1891, p. 27 - 65

- 1812 - *Théorie analytique des probabilités* (1ère éd., 1812 ; autres éd. augm. jusqu'en 1825), in *Oeuvres*, t. 7.

- 1814 - *Essai philosophique sur les probabilités* (1ère éd. 1814, éd. augmentée, 1825), in *Oeuvres*, t. 7. Nouvelle ed. prés. par R. Thom, postface de B. Bru, Bourgois, Paris, 1986.

- 1878 - 1912 - *Oeuvres*, publiées sous les auspices de l'Académie des sciences, 14 tomes, Gauthier-Villars, Paris.

MAYER, Jean 1959 - *Diderot homme de science*, Imprimerie bretonne, Rennes

MONTMORT, Pierre Remond de 1708 - *Essay d'analyse sur les jeux de hasard,* Paris (Seconde ed. augm., 1713).

MONTUCLA, Jean Etienne, et MORIZOT-DESLANDES, Pierre Joseph 1756 - *Recueil de pièces concernant l'inoculation de la petite vérole et propres à en prouver la sécurité et l'utilité,* Paris.

MORELLET, Abbé 1756 "Fatalité", in d'Alembert Diderot 1751-1780, vol. 6, p. 422-429.

PATY, Michel

- 1977 a - *Théorie et pratique de la connaissance chez Jean d'Alembert, thèse, Strasbourg* (non publiée).

- 1977 b - "D'Alembert et son temps, éléments de biographie, *Cahiers Fundamenta Scientiae*, n° 69-70, 1-69

- 1983 - "D'Alembert et la théorie physique", *Colloque d'Alembert*, Paris, à paraître.

- 1984 a - "Rapport des mathématiques et de la physique dans la pensée de d'Alembert", *Dix-huitième siècle,* n° 16, p. 69-79

- 1984 b - "D'Alembert : science et philosophie à l'époque des lumières", *La Recherche* 15, 1984 (n° 152, février), 166-177.

PEARSON, Karl 1978 - *The history of statistics in the 17th and 18 th centuries,* Griffin, London.

POINCARE, Henri 1900 - *Calcul des probabilités,* Carré et Naud, Paris

Art. "PROBABILITE", in d'Alembert, Diderot, vol. 13, p. 393-400 (article souvent attribué à Diderot mais d'attribution incertaine).

RASHED, Roshdi 1974 - *Condorcet : mathématique et société,* Hermann, Paris

REICHENBACH, Hans

- 1920 a - "Die Physikalischen voraussetzungen der warscheinlichkeitrechnung", Naturwissenschaften 8, 1920, n° 3, 46 - 55 ; trad. angl., "The physical presuppositions of the calculus of probability", in Reichenbach 1978, vol. 2, p. 293 - 311

- 1920 b - "Philosophische kritik der wahrsheinlischkteitsrechnung", Die Naturwissenschaften 8, 1920, n° 8, 146 - 153 ; trad. angl., "A philosophical critique of the probability calculus", in Reichenbach 1978 vol. 2, p. 312 - 327.

- 1978 - *Selected writings*, edited by Maria Reichenbach and Robert S. Cohen, Reidel, Dordrecht, 1978, 2 vols.

SHEYNIN, O. B. -

- 1971 - "J. H. Lambert's work in probability", *Archive for the history of exact science* 7, (n° 3).

- 1976 - "P. S. Laplace's work in probability", *Archive for the history of exact science* 16 (n° 2)

- 1977 - "Laplace's theory of errors", *Archive for the history of exact science* 17 (n° 1)

- 1982 - "On the history of medical statistics", *Archive for the history of exact science* 26 (n° 3)

SWIJTINK, Zeno G. 1986 - "D'Alembert and the maturity of chances", *Studies in history and philosophy of sciences* 17, n° 3, 327 - 349

TODHUNTER, Isaac 1865 - *A history of the mathematical theory of probability from the time of Pascal to that of Laplace,* Mac Millan, Cambridge. Repr. New York, 1949

YAMAZAKI, E. 1971 - "D'Alembert et Condorcet. - Quelques aspects de l'histoire du Calcul des probabilités", *Japanese Studies in the History of Science,* 1971, p. 59.