Siegmund Probst, Karine Chemla, Agnès Erdély, Antonio Moretto
*Ceci ne SONT PAS des mélanges pour Imre Toth*
1996

# Le jeu d'opérations opposées mais complémentaires dans les textes mathématiques chinois anciens. Premières remarques.

Ou

Par contraste avec la non-contradiction

Karine Chemla
REHSEIS-CNRS

Les textes chinois qui s'inscrivent dans la tradition mathématique fondée par le classique Han compilé autour des débuts de notre ère, *Les neuf chapitres sur les procédures mathématiques*, se présentent sous la forme de problèmes et de procédures pour les résoudre. Plutôt que d'y voir l'effet de motivations exclusivement pratiques visant à la résolution concrète de situations, une opinion à laquelle les historiens des sciences ont naturellement incliné à souscrire, j'ai proposé d'y lire également l'impact de préoccupations philosophiques : les algorithmes de résolution figureraient des processus de transformation —c'est ce que nous permet de constater le commentaire que Liu Hui rédige du classique au troisième siècle de notre ère—, et une réflexion générale sur le changement a pu trouver là en Chine à se nourrir et à s'illustrer[1].

Le *locus classicus* autour duquel se sont cristallisées, au cours de l'histoire, les élaborations sur ce thème, le *Yijing* ou *Classique des mutations*, traite du changement en tant qu'il se produit du fait de l'interaction entre deux principes, opposés et complémentaires : le *yin* et le *yang*. Les textes mathématiques citent abondamment ce classique, et cette référence parle déjà en faveur de notre thèse. Mais ils font également une large place aux opérations qui, pour être opposées, n'en sont pas moins complémentaires. Et ce point s'avère crucial pour mener plus loin notre propos. Si les algorithmes se révèlent tissés par le jeu de telles opérations, nous y trouverons une double confirmation : qu'il faut effectivement y voir un lieu où des mathématiciens en Chine ont observé, travaillé le changement, mais aussi bien que ce courant de réflexions s'est

[1] Voir [Chemla 1997a&b], [Chemla (à paraître)].

développé en référence au *Yijing*, dans la mesure où il manifeste le même parti pris singulier de considérer le changement comme advenant de par l'effet de polarités. Tels sont deux des enjeux qui m'amènent à me pencher ici sur la place faite, dans certains textes mathématiques chinois, aux opérations opposées mais complémentaires. Les polarités y sont à l'oeuvre constamment et se matérialisent de multiples manières, je ne pourrais toutes les envisager au cours de quelques pages. Nous n'examinerons donc ici la question que sur le couple fondamental que forment, parmi ces transformations, la multiplication et la division[2].

Nous verrons comment ces opérations s'opposent déjà au niveau des processus qui les exécutent sur la table à calculer. Puis nous envisagerons en quel sens la dualité d'instances qu'ils incarnent compose cette réalité mathématique que constituent les algorithmes. Enfin, nous indiquerons des raisons donnant à penser que, si les relations entre multiplication et division ont nourri une réflexion générale sur le changement, en particulier si elles ont donné à voir comment le changement est tissé par le jeu de telles opérations, ce travail a pu également inciter à l'exploration de certaines questions mathématiques et amener à l'élaboration de résultats spécifiques. Cette lecture, ce travail du réel mathématique en relation avec le *Yijing* aurait donc un impact sur la pratique mathématique.

## 1. L'OPPOSITION SE MANIFESTE DANS LE DEROULEMENT DES OPERATIONS : LA TABLE A CALCULER

Les premiers textes chinois portant sur les mathématiques à être parvenus jusqu'à nous, qui datent des débuts de notre ère, y font référence : lorsque les algorithmes deviennent calculs, l'exécution en renvoie à une table sur laquelle les termes sont disposés selon des règles, puis entrent en mouvement et en transformation jusqu'à ce que fin des opérations, fin de l'algorithme s'ensuivent[3]. La mise en scène et le déroulement de la multiplication et de la division dans ce décor ne laissent pas de provoquer la réflexion. Réévoquons-les rapidement. A supposer que je doive multiplier 23 par 57, il est une procédure générale qui semble avoir été reproduite de texte en texte sans modification en Chine jusques au 13$^{\text{ième}}$ siècle : c'est elle qui nous intéresse. Elle propose de disposer 23 dans une zone inférieure de la table à calculer, 57 dans une zone supérieure, tous deux le long d'une ligne :

---

[2] La terminologie chinoise manifeste une curieuse asymétrie, pour ce qui est de ces deux opérations. Alors qu'un terme prédomine dans l'énoncé de la multiplication (*cheng*), la prescription d'une division semble recourir indifférement à un ensemble varié d'expressions (je renvoie pour ce point au glossaire de la terminologie chinoise que j'ai composé pour accompagner l'édition critique et la traduction en français des *Neuf chapitres sur les procédures mathématiques*, sur lesquelles je travaille depuis 1984 avec monsieur Guo Shuchun —j'en abrège dans ce qui suit le titre en *Les neuf chapitres*). Cependant, dès que l'on envisage le couple de la multiplication et de la division comme opérations opposées, c'est l'énoncé monosyllabique, le plus souvent *chu*, qui prédomine pour la division. [Guo 1992], p. 333, note la multiplication de couples d'opposés dans *Les neuf chapitres* et les commentaires à leur sujet qui ont été sélectionnés par la tradition. Il en ébauche une liste, et propose d'y voir une influence du *Yijing*.

[3] Positions et interprétations relatives à ce qui suit sont précisées dans [Chemla 1996], et l'on peut également y trouver une bibliographie ainsi que les références aux sources primaires. Je ne reviens pas ici sur ces discussions.

57

23

Les premières traces de littérature spécialisée disponibles témoignent de ce que les nombres se trouvaient déjà représentés sur la table au moyen d'un système positionnel décimal. Est-ce de par leur inscription sur cette surface ?, est-ce du fait de marques que portaient la table elle-même ?, leur présence implique que l'espace en soit strié de colonnes à valeur décimale. Il est par suite prescrit, prenant appui sur ces colonnes, de faire progresser 23 vers la gauche d'autant de positions que 57 a de chiffres au-delà des unités :

57

23

Après ce premier mouvement, les transformations débutent : la procédure prescrit de multiplier par 5 successivement 2, puis 3, et de déposer chacun des résultats partiels dans la position du milieu, respectivement au-dessus du chiffre multiplié. Ce qui donne dans notre cas, successivement :

57
1
23

puis :

57
115
23

A la suite de cette première routine, le chiffre 5 se trouve enlevé de la table, l'on fait rétrograder le nombre à multiplier, 23 :

7
115
23

Et la routine reprend, identique à elle-même : l'on multiplie par 7 successivement 2, puis 3, et l'on accumule —c'est le terme qui désignera le produit— chacun des résultats partiels dans la zone médiane, respectivement au-dessus du chiffre multiplié. Ce qui donne :

7
129
23

puis

7
1311
23

L'on répète ainsi l'opération jusqu'à ce que les chiffres du multiplicateur aient tous disparu, le résultat sera alors à prélever dans la ligne du milieu. C'est le cas à ce point de notre exemple :

1311
23

Que les chiffres du nombre disposé au-dessus soient progressivement retirés, au fur et à mesure que le nombre du milieu advient, que le nombre d'en-dessous ne soit l'objet d'aucune transformation, mais de simples déplacements, ces remarques n'auraient aucun intérêt si l'algorithme de division dont la diffusion a accompagné au fil des siècles cette procédure pour la multiplication ne présentait un comportement pour une part identique et pour l'autre opposé. Suivons-en en effet le déroulement, en supposant que nous voulions diviser justement 1311 par 23. L'algorithme prescrit de disposer le nombre à diviser dans la zone médiane de la table à calculer, et le diviseur au-dessous de lui, dans la zone inférieure :

1311
23

Le point de départ est donc la configuration même sur laquelle la multiplication s'achevait. Le premier geste consiste à faire progresser 23 du plus grand nombre possible de positions vers la gauche tout en restant sous le dividende. Le fait que 13 soit inférieur à 23 implique de rétrograder aussitôt 23 d'une colonne vers la droite avant d'entamer les transformations proprement dites :

1311
23

Là, la division de 131 par 23 produit le chiffre 5, qu'il est proposé de déposer dans la zone supérieure des calculs

5
1311
23

avant de multiplier par 5 successivement 2, puis 3, et de retirer chacun des résultats partiels de la position du milieu, respectivement au-dessus du chiffre multiplié. Ce qui donne dans notre cas, successivement :

5
311
23

puis

5
161
23

A la suite de cette première routine, l'on fait rétrograder le diviseur 23 d'un cran vers la droite :

5
161
23

Et la routine reprend, identique à elle-même : le chiffre suivant du quotient, 7, se trouve déposé sur la table :

57
161
23

l'on multiplie par 7 successivement 2, puis 3, et l'on élimine chacun des résultats partiels de la zone médiane, respectivement au-dessus du chiffre multiplié. Ce qui donne :

57
21
23

puis

57

23

La fin de l'opération est signalée par le vide laissé dans la ligne centrale, dans ce cas. Elle le serait également par le fait d'obtenir, au centre, un nombre inférieur au diviseur. Ainsi si nous avions divisé 1312 par 23, la table présenterait à ce point des calculs la figure suivante

57
1
23

Dans le premier cas, le résultat est à prélever dans la ligne du dessus, tandis que dans le second, la table serait lue comme produisant le résultat 57+1/23.

Si l'on observe maintenant les mouvements et transformations de lignes qui réalisent la division, l'on constate que les chiffres du nombre disposé au-dessus sont progressivement ajoutés, au fur et à mesure que le nombre du milieu se retire, tandis qu'à nouveau, le nombre d'en-dessous n'est l'objet d'aucune transformation, mais de simples déplacements.

De la multiplication à la division, les nombres situés dans les lignes du dessous ont les mêmes devenirs, présentent la même alternance de mouvements. Ils progressent dans un premier temps, puis régressent régulièrement, et les termes utilisés au moins à partir du cinquième siècle pour renvoyer à ces déplacements font écho à un couple d'opérations opposées fondamentales dans le *Yijing* : *jintui*. En revanche, les deux premières lignes ont des comportements opposés l'un à l'autre à l'intérieur d'une opération, ainsi que d'une opération à l'autre. Ce que l'on obtient se trouve au milieu pour la multiplication, au-dessus pour la division. Ici le terme *de* "obtenir" évoque l'opposé qui lui correspond dans le *Yijing* : *shi*, "ce qu'on perd", se trouve au milieu pour la division, au-dessus pour la multiplication[4]. Plus précisément, la ligne du dessus se voit retirer ses chiffres un à un, au cours de la multiplication, tandis qu'elle se les voit ajouter un à un dans la division. Les lignes du milieu, quant à elles, se voient dans un cas ajouter, dans l'autre retrancher le produit d'un chiffre du dessus par le nombre du dessous. Se déroulant toutes deux sur trois lignes (haut/milieu/bas), les processus qui exécutent une multiplication ou une division sont donc, ligne à ligne, calcul à calcul, identiques ou opposés l'un à l'autre. Soulignons cependant que les valeurs intermédiaires au cours des calculs, elles, ne sont pas les mêmes.

C'est en ce sens que la relation d'opposition entre ces deux opérations se lit dans le temps et sur la table à calculer. Elle peut être manifestée grâce à la fixité des positions, à la distribution entre elles des fonctions, de la multiplication à la division ; grâce, enfin, à la manière d'opérer et de décrire les changements qui, appliqués aux lignes, produiront les résultats. Notons que cette relation d'opposition se double d'une relation d'inversion : appliquant aux positions que laisse sur la table la multiplication le processus de division, on revient à la configuration initiale, et inversement[5].

C'est le recours au même faisceau de conditions (fixité des positions sur lesquelles on distribue les fonctions, façons d'effectuer les changements) par lequel *Les neuf chapitres*, puis les textes ultérieurs, manifestent, chacun à leur manière, la parenté intime entre les algorithmes d'extraction de racine et la division[6]. Dans tous ces algorithmes, tels qu'on les trouve décrits par exemple dans le classique, les trois lignes du dessus, du dividende et du diviseur font l'objet d'événements corrélés (progression, régression, avènement, disparition, accroissement, diminution). Et ceci fait écho à la terminologie retenue par *Les neuf chapitres* pour prescrire une extraction de racine : "diviser (*chu*) par ouverture de carré", "diviser par ouverture de cube".

---

[4] Liu Hui recourt au même couple de *de/shi* pour décrire l'opposition entre nombres positifs et négatifs au cours de son commentaire au problème 3 du chapitre 8 : "Si deux sortes de nombres représentés par des baguettes, ce qu'on acquiert (*de*) et ce qu'on perd (*shi)*, sont opposées (*fan*) l'une à l'autre, il faut se servir de positif et négatif pour les nommer".

[5] On n'a peut-être pas jusqu'à présent assez insisté sur cette propriété clef, sur laquelle les commentaires attribués tant à Liu Hui qu'à Li Chunfeng reviennent pourtant souvent. Voir ci-dessous.

[6] En ce qui concerne ces opérations et leur rapport entre elles, je renvoie pour les détails et les références bibliographiques à [Chemla 1987, 1989, 1993, 1994].

De ceci, plusieurs conclusions s'ensuivent. La réoccurrence de cette manière de faire —utiliser les positions de la table et les événements qui les affectent pour explorer, manifester dans le temps les relations entre les algorithmes— semble renvoyer à une pratique mathématique concrète, qu'aucun texte, à ma connaissance, ne décrit explicitement. Mais, de plus, que pareille pratique se révèle, c'est dire, par les moyens qu'il s'est donné, qu'un travail s'est effectué sur les rapports entre les opérations. Nous voyons ici se manifester de la sorte deux types de relation : *opposition*, dans le cas de la multiplication et de la division, ou *appartenance à une même classe d'opérations*, toutes désignées du nom de "division" *chu*, dans le cas de l'extraction de racine et de la division. C'est donc, enfin, que le couple de la multiplication et de la division semble avoir joué un rôle central, dans la mesure où leurs déroulements ont pu servir de point de repère pour l'analyse d'autres procès de calcul et, partant, pour l'organisation de l'espace des opérations[7].

C'est ici au niveau de la texture même du déroulement des calculs que s'établissent les rapports entre multiplication et division, et que ces opérations agissent au coeur du travail mathématique. Les suites de changements sur la table à calculer qui effectuent une multiplication ou une division sont composées d'opérations opposées fondamentales (progression, régression, obtention, perte), et d'un élément central à leur fonctionnement que nous nommons aujourd'hui la "table de multiplication". Il est intéressant de constater que le nom retenu par la tradition chinoise, "procédure du neuf neuf", ne privilégie pas son rapport à la multiplication, mais la situe au soubassement commun que cette dernière opération partage avec la division. Par ailleurs, la préface du commentateur Liu Hui articule également explicitement cet élément au dispositif du *Yijing*, puisqu'il y dit : "Jadis il y eut maître Baoxi, qui (...) créa la procédure du neuf neuf (i.e. : la table de multiplication) pour qu'elle soit en concordance avec les transformations (*bian*) des six lignes (des hexagrammes)."[8] Quoi qu'il faille comprendre de cette mise en relation, nous retiendrons que les transformations mathématiques élémentaires dont se tissent les

---

[7] A l'extension des genres de la division, correspond, par inversion, les genres de la multiplication. Ainsi on lit dans le *Xiahou Yang suanjing* (*Classique mathématique de Xiahou Yang*, [Qian 1963], pp. 558-9), un livre dont Qian Baocong date la rédaction du VIIIième siècle : "L'ensemble des procédures de calculs comporte cinq multiplications et cinq divisions (par la suite, seules les divisions sont énumérées) : 1. Diviser par un diviseur. 2. Diviser par les *bu* (soit la division pour changer d'unité —voir ci-dessous). 3. La division de la simplification. 4. La division par extraction de racine carrée. 5. La division par extraction de racine cubique." Ces extensions corrélatives de la division et de la multiplication se poursuivent jusqu'au 13ième siècle —c'est ce que montre A. Eberhard dans sa thèse (1996) relativement à l'insertion des séries, du côté de la multiplication, dans le paysage mathématique.

[8] L'articulation au *Yijing* se situe à deux niveaux : l'énoncé se greffe sur une citation du « Grand commentaire » du *Classique des mutations* (chapitre 1, second paragraphe), et insère les mathématiques dans la genèse des artefacts culturels ; il met en parallèle les mutations des six lignes, pleines (*yang*) ou brisées (*yin*), qui composent chacun des 64 hexagrammes avec les multiplications des chiffres. Il semble qu'il faille entendre *bian* (transformation), en ce cas, comme la mutation d'une ligne brisée en ligne pleine ou le changement de polarité inverse. Peut-on ici lire une analogie entre le nombre qui se trouverait dans la zone centrale, le long duquel on progresse ou l'on régresse, et un *n*-gramme, déterminé par la parité des chiffres de son développement décimal ? Faut-il comprendre que les multiplications successives de chiffres transforment au long du processus le nombre central et, corrélativement, le *n*-gramme qui lui serait attaché ? Cette hypothèse présenterait l'intérêt de relier la variation continue d'un nombre avec les mutations d'un trait d'un *n*-gramme. Mais il ne serait pas prudent de s'arrêter à quelque interprétation que ce soit, dans l'ignorance du contexte de pratiques divinatoires à base numérique dans lequel le *Yijing* s'inscrit. Il nous suffit pour l'heure de noter la référence au *Yijing*.

opérations macroscopiques sont mises en parallèle avec les transformations des hexagrammes. L'ensemble des ingrédients qui composent les calculs qui nous intéressent ici se trouvent donc rattachés, d'une manière ou d'une autre, au *Yijing*. Cependant l'opposition entre les deux opérations qui sont au centre de notre propos joue à un autre niveau, celui où multiplication et division peuvent, à leur tour, servir de briques élémentaires dans la composition d'algorithmes mathématiques, et nous nous tournerons maintenant vers le rôle dévolu à ce couple à l'échelle du corpus d'algorithmes.

## 2. COMMENT L'OPPOSITION ET LA COMPLEMENTARITE SE LISENT DANS LE CLASSIQUE: LE TEXTE

Pour la réédition qu'il prépare en 1261 du canon, *Explications détaillées sur les neuf chapitres sur les méthodes mathématiques*, Yang Hui entame sa préface comme suit :

"Tout personne qui étudie les mathématiques (*suan*) considère la méthode de multiplication comme essentielle[9]. Chaque fois que l'on dispose (les termes) d'une méthode (sur la table à calculer), c'est que l'on veut que le résultat en soit approprié ; si l'on détermine les positions, en sorte que l'on fasse se correspondre de manière adéquate les nombres, c'est que l'on veut qu'il ne soit pas erroné. Au cas où, par division, on n'épuise pas (le dividende), on prend le diviseur pour dénominateur, le dividende pour numérateur. S'ils sont trop complexes (i.e. : s'ils ont un dénominateur commun), on les simplifie ; si, en retour, on fait communiquer les parts (i.e. : que l'on multiplie l'entier par le dénominateur et que l'on ajoute le numérateur), on revient à l'origine (*huanyuan*). Tels sont les outils fondamentaux de la multiplication et de la division. (suit une liste des contenus des *Neuf chapitres*, un à un). Tel est ce qui épuise la constitution interne (*li*) des méthodes mathématiques. *Les neuf chapitres de Huangdi* sont complets et subtils, ils embrassent toutes les situations, il serait impossible qu'ils n'aient pas été écrits par un sage."[10]

Ainsi, son inventaire du contenu des *Neuf chapitres* amène Yang Hui à conclure à la capacité du canon de traiter toute situation. Nous retiendrons qu'au fondement du classique, notre mathématicien du 13ième siècle place la multiplication. Il insiste à son sujet, dans un premier temps, sur l'aspect capital de la disposition des calculs, dans les lignes, puis dans les colonnes, ce qui rejoint le point que nous avons développé ci-dessus. Ensuite, dans un second temps, il se tourne vers la division, qu'il aborde par le biais de la configuration finale qu'elle laisse sur la table à calculer et qui constitue son résultat : par division on en simplifie la partie fractionnaire, par multiplication on annule l'opération et revient à son point de départ. Ici donc, à nouveau, mais sur le plan des calculs cette fois, le couple de la division et de la multiplication présentent deux alternatives d'action. La seconde met en évidence la relation d'opposition stricte qui unit les deux opérations, celle de multiplication, donnée d'entrée de jeu comme fondamentale, et son inverse : la division. La propriété essentielle —que Yang Hui souligne— du fait de donner ainsi le résultat de cette dernière opération est justement de permettre une exacte relation d'opposition avec

---

[9] Le terme de "méthode, norme, règle" *fa* (qui signifie également diviseur, nous y reviendrons) remplace à l'époque souvent celui de "procédure", *shu*.
[10] Traduit selon l'édition de Song Jingchang, *Yijiatang congshu*, 1842. Sur le terme de *li*, voir mon glossaire à notre traduction.

la multiplication. C'est sur cette dualité d'instances que s'amorce la prise en considération du classique.

Or les déclarations de plusieurs autres acteurs donnent comme capital, de diverses manières, ce couple d'opérations opposées. Ainsi on lit sous le pinceau de Liu Hui : "Multiplier pour les désagréger, simplifier pour les réunir, homogénéiser, égaliser pour les faire communiquer, comment ne serait-ce pas les points-clefs des mathématiques (*suan*) ?"[11] Li Chunfeng, qui dirige au 7ième siècle une équipe de commentateurs des *Neuf chapitres* dont les notes font partie de toutes les éditions du classique parvenues jusqu'à nous, reprend au sujet de ces opérations l'énoncé de Liu Hui, en le modifiant toutefois de manière intéressante. Ainsi, dans la « monographie sur la gamme et le calendrier », de l'*Histoire dynastique des Sui*, c'est à la suite de l'inventaire du contenu des *Neuf chapitres* qu'il écrit : "…, dans tous ces cas, multiplier pour les désagréger, diviser pour les réunir, homogénéiser et égaliser pour les faire communiquer, appliquer la règle de trois pour les articuler (mot-à-mot : les enfiler sur un même fil), alors les méthodes mathématiques (*suanfa*, ou des procédures de calcul, ou encore des nombres représentés par baguettes) se réduisent à cela." L'affirmation donne explicitement comme se trouvant à la base de tout l'ouvrage, et même comme permettant de réduire la diversité de l'ensemble des procédures mathématiques : le couple de la multiplication et de la division, cette fois énoncé comme tel, ainsi que des procédures qui se composent elles-mêmes de multiplications et de divisions, nous y reviendrons ci-dessous.

Si ces affirmations diffèrent, elles partagent cependant plusieurs traits, capitaux pour notre propos. Tout d'abord, elles témoignent toutes d'un souci d'identifier les briques fondamentales à partir desquelles fonder, composer le réel mathématique. Et c'est sur la base d'opérations opposées que, dans tous les cas, cette réduction s'opère. Par ailleurs, le réel mathématique que ces déclarations prennent toutes comme objet est constamment constitué de procédures[12], à savoir : de ce qui pourrait avoir incarné le changement en mathématiques. C'est explicitement l'ensemble des procédures que visent Li Chunfeng et Yang Hui, et les algorithmes fondamentaux auxquels renvoient les neuf chapitres du classique viennent s'interposer entre les procédures qu'ils donnent pour fondamentales et l'ensemble des procédures mathématiques. Enfin, ces affirmations accordent toutes à la multiplication et à la division un rôle central dans cette entreprise de réduction du réel mathématique, c'est le point qui nous retient ici. Un intérêt constant semble donc se manifester, sur le long terme, chez les commentateurs des *Neuf chapitres*. Il nous conduira donc à nous demander en quoi la multiplication et la division ont pu leur apparaître comme fondamentales dans le texte du classique.

---

[11] [Qian 1963], p. 96. "Multiplier" (resp. simplifier) renvoie, dans le contexte de la déclaration, à la multiplication (resp. division) du numérateur et du dénominateur d'une fraction, opération qui correspond à une désagrégation (resp. à un regroupement) des parts qui la constituent. Egaliser, de même, renvoie ici à l'égalisation des dénominateurs d'un ensemble de fractions, homogénéiser, à la transformation corrélative des numérateurs qui préserve la valeur des fractions d'origine. De la jonction de ces deux opérations (réalisées toutes deux par des multiplications réitérées), les fractions peuvent interagir dans les mêmes calculs : c'est la mise en communication. Cependant, la nature de la conclusion implique que les opérations sont envisagées de manière beaucoup plus large et peuvent renvoyer à des sens techniques autres dans des contextes différents (voir [Chemla (à paraître)]).

[12] On notera à ce sujet la réécriture opérée par Li Chunfeng de l'énoncé de Liu Hui. Sur ce que ces énoncés trahissent de la pratique mathématique en Chine ancienne, voir l'article faisant suite à l'exposé que j'ai donné au colloque "Algorithmes et démonstrations", Marseille, septembre 1995 : "La règle de trois entre algorithme et démonstration dans le commentaire de Liu Hui du 3° siècle", à paraître.

**2.1 L'USAGE MATHEMATIQUE DE L'OPPOSITION ENTRE MULTIPLICATION ET DIVISION**

Le commentaire des *Neuf chapitres* attribué à Liu Hui recourt à plusieurs reprises à l'opposition entre multiplication et division. En le suivant dans ces divers usages, nous pourrons identifier certaines des fonctions mathématiques que remplit cette opposition.

C'est tout d'abord dans son travail de démonstration de la correction des procédures du classique que Liu Hui est régulièrement amené à arguer du fait que les effets d'une multiplication et d'une division peuvent s'annuler. Lorsqu'il doit rendre compte par exemple de la procédure que *Les neuf chapitres* donnent pour calculer le volume de la pyramide tronquée à base circulaire (problème 5.11), il argumente : "Chercher le volume (*ji*) de la pyramide tronquée à base circulaire à partir de la pyramide tronquée à base carrée, c'est également comme chercher la surface (*mi*) du cercle au centre de la surface (*mi*) du carré[13]. Par conséquent, si on en effectue la multiplication par le *lü* du cercle, 3, la division par le *lü* du carré, 4, on obtient le volume (*ji*) de la pyramide tronquée à base circulaire. Or, plus haut[14], pour chercher le volume (*ji*) de la pyramide tronquée à base carrée, on avait divisé par 3. Maintenant pour chercher le volume (*ji*) de la pyramide tronquée à base circulaire, il faut aussi multiplier ceci par 3. Puisque les deux dénominateurs sont égaux, par conséquent ils se compensent l'un l'autre. L'on ne fait donc que multiplier le *lü* du carré, 4, par le dénominateur 9, d'où l'on obtient 36, et l'on divise d'un coup[15]." Il s'agit en ce cas de justifier la procédure dans la forme qu'elle prend dans le classique. La démonstration consiste à produire une procédure dont le sens, lisible dans l'organisation des calculs, rend visible la correction, puis de mettre en évidence que l'algorithme du classique s'en déduit par réécriture d'opérations. En particulier, une multiplication et une division par la même quantité sont du même pas éliminées de la liste d'opérations qui constitue la démonstration, afin de produire la procédure dont le commentateur veut établir la correction. C'est donc un travail sur un algorithme en tant que suite d'opérations susceptible de réécritures, du fait des relations entre les opérations, qui conclut la démonstration.

L'on est confronté au cas inverse avec le commentaire au problème 6.17. Proposant une série de calculs en parallèle pour calculer les poids des tronçons successifs d'un tronc en forme de bambou d'or, *Les neuf chapitres* recourent, dans l'un des cas, celui du tronçon situé à la racine, à une procédure trop complexe. En déclarant : "En multipliant une fois puis en divisant une fois [par la même quantité], il n'y aura pas de changement (*sunyi*, mot-à-mot : diminution-accroissement) dans la situation (*shi*), c'est pourquoi seule

---

[13] L'adverbe "également" évoque le commentaire au problème 5.9. Ici comme plus haut, les relations entre volumes des pyramides à base carrée et circulaire sont ramenées à celles des surfaces du carré et du cercle. Sur tous ces termes, je renvoie au glossaire qui accompagne la traduction

[14] L'algorithme précédent dans le classique permet le calcul du volume d'une pyramide à base carrée, et s'achève sur une multiplication globale par 3.

[15] [Qian 1963], pp. 164-5. Ne nous soucions pas ici du sens de ce commentaire, et n'observons que la manière dont il procède. Après avoir introduit les coefficients qui traduisent la transformation de carré en cercle, le commentateur opère un calcul sur l'ensemble des facteurs en présence pour justifier l'algorithme du classique. Notons l'usage du terme "dénominateur" pour désigner les deux "3". Par la suite, Liu Hui reprend la procédure avec ses propres valeurs du rapport entre circonférence et diamètre. Il en énonce une nouvelle version, puis donne les étapes de sa justification, renvoyant à son commentaire au problème 5.9.

la racine est conservée ici"[16], Liu Hui montre tout à la fois que le calcul produit bien le résultat visé, comment il le produit, et met donc également de ce fait en évidence qu'il peut être simplifié. La démonstration explicite le sens de l'algorithme, en réécrivant la liste d'opérations qu'il prescrit en tant que telle. Elle s'appuie en l'occurrence sur la possibilité d'annuler la suite d'une multiplication et d'une division qui s'opposent, produisant ainsi tout à la fois le sens et un nouvel algorithme.

L'argument selon lequel multiplication et division s'opposant, la correction d'une procédure est établie peut prendre des formes plus subtiles. Ainsi la procédure clef du chapitre 3 vise à répartir de manière inégale un tout donné selon des coefficients de pondération déterminés : elle propose à cette fin de multiplier successivement la quantité à distribuer par chacun des facteurs, désintégrés, et de diviser chaque produit par leur ensemble, aggloméré. Liu Hui justifie le procédé en ces termes : "Le diviseur amalgame, là où les coefficients de la pondération distinguent (*bie*). La quantité (*shu*), à l'origine, était une. Mais si maintenant "on multiplie, par ce qu'on partage," les [coefficients qui] distinguent (…) et qu'on divise ceux-ci (les résultats) par [la quantité qui les] amalgame (…), comme on multiplie une fois et que l'on divise une fois, [les opérations] s'annulent l'une l'autre tout juste. C'est pourquoi ce qu'on partage existe encore, mais a été respectivement séparé en accord avec les" coefficients[17].

Ailleurs encore, commentant une procédure donnée pour multiplier deux nombres formés d'entiers suivis de fractions (1.24, [Qian 1963], p. 189), Liu Hui rend compte de la correction d'une division concluant le calcul, en arguant du fait qu'il faut annuler l'effet d'une multiplication par lequel l'algorithme ouvrait : "Ici, pour confectionner la procédure, largeur et longueur ayant toutes deux des parts, il faut que, pour chacune d'elles, on fasse respectivement communiquer ses parts (c'est-à-dire : que les entiers soient multipliés par les dénominateurs et que l'on ajoute les numérateurs). Comme on a fait en sorte que le dénominateur entre, il faut par compensation le faire sortir[18] ; c'est pourquoi on effectue

---

[16] Sur ce terme de *shi*, je renvoie également au glossaire. [Qian 1963], p. 195. On notera l'écho que la phrase : "En multipliant une fois puis en divisant une fois", *yi cheng yi chu*, éveille un écho avec la célèbre phrase du « Grand commentaire » du *Yijing* : *yi yin yi yang*, "un *yin*, un *yang*…".

[17] [Qian 1963], p. 101. Les guillemets à l'intérieur de l'extrait signalent, ici comme ci-dessous, des citations que le commentaire fait du classique. On lit, dans cette somme philosophique du troisième siècle avant notre ère que représente le *Xunzi* (Wang Xianqian (ed.), *Xunzi jijie*, Zhonghua shuju, réédition, 1988, chapitre « *Zheng ming* », p. 420 —je suis la traduction qu'en donne A. Graham dans *Disputers of the Tao. Philosophical Argument in Ancient China*, Open Court, 1989, p. 266) : "Il y a des choses qui ont les mêmes caractéristiques, mais qui diffèrent pour ce qui est du lieu, et des choses avec des caractéristiques différentes mais les mêmes pour ce qui est du lieu. Elles sont à distinguer. Celles que l'on considèrent différentes pour ce qui est de la place quoique les mêmes pour ce qui est des caractéristiques, quoique pouvant être jointes l'un à l'autre, doivent être appelée deux réalités (*shi*). Celles que l'on considèrent différentes en ce que les caractéristiques se sont altérées (*bian*) sans division (*bie*) de la réalité (*shi*) sont appelées transformées (*hua*) ; ce qui connaît une transformation sans division est appelé une unique réalité (*shi*). C'est ainsi que dans les affaires nous testons les réalités (*shi*) et nous déterminons les nombres. Ce sont les exigences cruciales pour instituer les noms". Ce passage présente un écho intéressant avec l'organisation du classique, sur laquelle nous revenons ci-dessous : le chapitre 2 traite des transformations *hua* (voir [Chemla 1997a]), le chapitre 3, nous le voyons ici de réalités (*shi*, dividende, voir [Chemla 1993]) que l'on divise en parts inégales.

[18] Ou : "il faut, à l'inverse (*huan*), le faire sortir".

"la multiplication l'un par l'autre des dénominateurs pour faire le diviseur"[19] et on divise d'un coup par cela."[20]

Ici, plusieurs remarques s'imposent. Tout d'abord, avec la notion de "compensation", on retrouve la figure à laquelle recourait le commentaire à la procédure de multiplication des fractions (1.21). Or Liu Hui renvoyait alors, en conséquence, à la division par le terme de "diviser en retour" (*baochu*), lequel peut qualifier toute division qui vient annuler l'effet d'une multiplication opérée en amont des calculs. Le raisonnement a donc dû être noté comme récurrent, puisqu'il a donné naissance à un terme technique, lequel porte tout à la fois la marque de la procédure et de la justification. Or l'on rencontre ce terme dans le classique, et non pas seulement dans ses commentaires. C'est dire que le classique trahit également un souci de justification. Mais c'est aussi dire qu'on peut y déceler une attention au flot des calculs en tant que tel, et au rôle que peut y jouer le couple de la multiplication et de la division en tant qu'opérations opposées.

Par ailleurs, cette opposition qui nous intéresse se trouve régulièrement réécrite en des termes plus généraux, renvoyant à des couples d'opérations à l'oeuvre beaucoup plus largement dans le réel et intervenant de manière remarquable dans le *Yijing* : réunion/dispersion (*ju/san*)[21], —également réécrite en amalgame/distinction (*ji/bie*)— ou, comme ici, entrer/sortir (*ru/chu*). Ce fait met en valeur des connections, au niveau des principes, entre différents chapitres des mathématiques[22]. Et dans tous ces cas, à nouveau, ces couples d'opérations trahissent un attention pour la manière dont les choses changent, que ce soit pour déceler les modalités fondamentales de ces changements, pour en rendre compte, voire pour opérer différemment.

Mais l'opposition entre multiplication et division n'est pas seulement mise en oeuvre pour arguer de leur possible annulation mutuelle, lorsqu'elles se suivent au sein d'une même liste d'opérations. Le fait que ces opérations soient également inverses l'une de l'autre intervient de plusieurs manières dans le travail mathématique, lorsqu'il s'agit d'inverser un algorithme.

Le besoin s'en présente au cours de démonstrations. Ainsi, pour justifier une procédure que donne le classique, Liu Hui peut mettre en évidence qu'elle est inverse d'une procédure connue, et qu'elle part de ce que produirait cette dernière pour obtenir ce dont elle partirait. Telle est, dans l'exemple qui suit, la nature de l'argument pour rendre

---

[19] Citation du classique.

[20] On trouve, au commentaire du problème 5.11, un cas inverse, où la division est appliquée suite à une multiplication qui peut mener à une impasse et pour annuler son effet.

[21] Le couple multiplication/division est constamment mis en relation avec la réunion/dispersion, quoique l'association diffère selon les contextes. On lit dans les annotations de Han Kangbo au « Grand commentaire » : "Si l'on épuise le *li* (constitution interne) de la réunion et de la dispersion, alors on est en mesure de connaître la voie des transformations (*bianhua zhi dao*) et il n'est rien d'obscur que l'on ne puisse pénétrer." (Lou Yulie (ed.),*Wang Bi ji jiaoshi*, Zhonghua shuju, 1980, vol. 2, p. 540).

[22] La réécriture de la multiplication et de la division en "entrer/sortir" évoque le principe invoqué pour la justification de la procédure correspondant, dans *Les neuf chapitres*, au théorème dit de Pythagore : *chu ru xiang bu*, "Ce qui entre et ce qui sort se compensent". L'excès que réalise la multiplication sur le plan du flot des calculs est ainsi mis en relation avec l'excès que constitue une partie d'une figure qui, déplacée pour transformer la figure en rectangle ou parallélipipède, permet d'en calculer l'aire ou le volume (c'est une forme de raisonnement que les commentaires expriment régulièrement à l'aide de la sentence : "avec le plein, on comble le vide", voir [Chemla 1997a&b]). Que procédures et objets mathématiques relèvent des mêmes principes généraux, comme c'est le cas ici, c'est une conclusion à laquelle j'étais déjà arrivée par d'autres biais. Elle se profile ici de par l'usage fait du couple d'opposés "entrer/sortir".

compte de la raison pour laquelle le classique propose une opération de doublement (problème 5.26) : "Si "on double ce qui est obtenu", c'est que, comme la fosse a deux largeurs, on les avait auparavant sommées et on avait pris la moitié de ceci, ce qui avait alors fait la largeur moyenne ; maintenant on obtient ici d'abord la largeur moyenne, donc en la doublant, cela fait, à l'inverse (*huan*), la somme des deux largeurs." Dans ce dernier cas, l'opération de moitié est inversée en doublement. Il est des cas où une multiplication est inversée en division (problème 5.27) : "Commentaire : dans cette procédure, à l'origine, la largeur et la longueur ayant été multipliées l'une par l'autre, en multipliant ceci par la hauteur, on avait obtenu ce volume (*ji*). Maintenant, pratiquant l'opération inverse (*huanyuan*), on place donc "la multiplication l'une par l'autre de la largeur et de la longueur pour faire le diviseur" et l'on divise ceci,[23] c'est pourquoi l'"on obtient la hauteur"."

Enfin, le cas suivant amène Liu Hui à justifier la procédure que le classique propose pour trouver la circonférence de la base d'un cône circulaire à partir de sa hauteur. Le commentaire y articule l'ensemble des inversions précédentes, ainsi que l'inversion d'une élévation au carré en extraction de racine (problème 5.28) : "Commentaire : dans cette procédure, la circonférence d'origine ayant été multipliée par elle-même, ceci ayant été multiplié par la hauteur, et divisé par 12, on a obtenu ce volume (*ji*). Maintenant, pratiquant l'opération inverse (*huanyuan*)[24], on place ce volume (*ji*), on multiplie ceci par 12, on effectue la division par la hauteur, d'où cela redonne (*fu*) la valeur (*shu*) de la circonférence d'origine multipliée par elle-même. Chaque fois qu'une chose est multipliée par elle-même, en divisant ceci (le résultat) par extraction de la racine carrée, cela redonne (*fu*) la quantité (*shu*) d'origine correspondante. C'est pourquoi diviser ceci par extraction de la racine carrée donne le résultat."

Deux points méritent d'être soulignés : d'une part, l'extension de la division en extraction de racine que nous évoquions ci-dessus permet l'inversion d'une classe plus grande de multiplications. D'autre part, l'on voit ici comment les figures de l'inversion et de l'annulation s'articulent l'une à l'autre, par le biais de la "restitution" (*fu*). Yang Hui le soulignait et nous y avons insisté plus haut : donner le résultat de la division sous la forme d'entier augmenté d'une fraction est ce qui permet de "retourner à l'origine". Or c'est exactement ce point que Liu Hui met en valeur pour justifier le fait que le classique donne le résultat d'une extraction de la racine carrée sous la forme "racine de $N$", dans les cas où $N$ n'est pas un carré parfait : "C'est pourquoi c'est seulement quand "on le (i.e. : le nombre $N$) nomme avec "côté"" que l'on ne commet pas d'erreur. C'est analogue au fait, quand on divise 10 par 3, de prendre son reste comme étant 1/3 : on est alors à nouveau en mesure de restituer sa valeur (*shu*)[25]".

L'introduction de diverses catégories de nombres comme les fractions ou les irrationnels quadratiques est reliée, par le commentateur, à la volonté de pouvoir inverser les opérations, un acte dont la récurrence dans les justifications trahit sans doute l'importance pour la production d'algorithmes, elle-même.

---

[23] On peut comprendre de deux manières : "on en divise [le volume]" ou "on divise par ceci [que l'on vient d'obtenir]". A nouveau, l'algorithme est présenté comme faisant chronologiquement suite à celui qu'il inverse.

[24] Soulignons que l'algorithme qui suit inverse opération à opération le précédent.

[25] La donnée du résultat sous la forme "racine de $A$" est présentée comme la seule détermination possible qui permette de restituer le nombre de répart, par analogie avec l'introduction de fractions pour l'énoncé du résultat d'une division dans certains cas.

Dès lors que les algorithmes sont de la sorte dans un rapport d'inversion, leurs descriptions se correspondent l'une à l'autre par échange de multiplication et de division, parfois également d'addition et de soustraction. Le commentateur semble désigner cette relation de polarité entre textes d'un terme technique (*fanfu*). Il est intéressant de constater qu'il ne le réserve pas seulement aux procédures inverses l'une de l'autre (aire du cercle/extraction de racine circulaire en 4.18, opérations sur des nombres de signes différents en 8.3), mais également aux procédures dont les textes présentent le même rapport de transformation l'un avec l'autre (9.12, 5.21)[26].

Un écho s'éveille ici : de même que les hexagrammes peuvent se transformer par inversion, ligne à ligne, de polarités, ou par retournement, les textes des algorithmes peuvent se transformer par inversion de polarité des opérations, ou par interversion de leur ordre. C'est une composition des deux qui produit alors la procédure inverse. Le commentaire recourt régulièrement à un même terme, *fan*"inverse", dans des exemples relevant de tous ces cas : *fan* peut désigner l'interversion entre deux opérations, comme celle de la multiplication et de la division pour démontrer la règle de trois (2.0) ; il peut renvoyer au retour en arrière que produit l'application de l'opération inverse (dans le contexte du problème 6.17, évoqué ci-dessus) ; mais il exprime également la relation d'opposition entre nombres positifs et négatifs (8.3). A nouveau, le fait qu'on le rencontre à deux reprises dans le classique, appliqué au nom d'une procédure pour produire l'appellation d'une procédure polaire, indique que l'intérêt pour cet ordre de relations ne date pas des commentaires[27].

La relation d'opposition entre multiplication et division apparaît donc à l'oeuvre en tant que telle dans le travail mathématique, par le biais de l'annulation de l'effet de l'une par application de l'autre, ainsi que par le rapport d'inversion que ces opérations entretiennent. Et avec les notions d'interversion, d'inversion, de restitution, d'annulation, le paysage mathématique semble même se structurer partiellement autour de cette polarité fondamentale. Ces faits mettent, inversement, en lumière que les mathématiciens considèrent les listes d'opérations que forment les algorithmes en tant que telles, les réécrivant, les transformant aux fins de justification et de production de nouvelles procédures.

Cependant un regard sur l'ensemble des procédures des *Neuf chapitres*, comme on peut être tenté de le porter, à lire les déclarations d'ordre architectonique de nos trois commentateurs, révèlent que la relation de la multiplication et de la division n'est pas du seul ordre de l'opposition.

### 2.2 LA COMPLEMENTARITE ENTRE MULTIPLICATION ET DIVISION DANS LE CANON

---

[26] Comme les résultats en sont donnés de manière exacte, les opérations de multiplication et de division peuvent être pratiquées dans n'importe quel ordre. Liu Hui souligne ce fait, et l'utilise à plusieurs reprises à des fins de démonstration (2.0). Il lui arrive toutefois de préciser que les deux procédures, équivalentes pour ce qui est des calculs, n'ont pas forcément la même sémantique (5.21). Elles se trouvent par ailleurs, —puisque multiplication et division ne sont pas seulement intervertibles, mais sont également inverses l'une de l'autre—, en relation de *fanfu* "réciprocité" l'une avec l'autre. Que ces deux sortes de relations puissent être désignée par cette même expression, cela renvoie-t-il au fait que le cours de l'algorithme est considéré en tant que tel ?

[27] Il s'agit de la "procédure de l'inversion des *lü* de diverses sortes" (chapitre 2) ainsi que de la "procédure de l'inversion des coefficients de pondération" (chapitre 3). La première a ceci d'intéressant qu'elle s'applique à des problèmes dont les données sot produites par une variation continue des données de problèmes résolus par la procédure de nom inverse.

Un examen systématique des interactions entre multiplication et division dans *Les neuf chapitres* désigne à l'attention la première procédure que le classique décrit et qui permet de calculer l'aire d'un rectangle. Elle est formulée comme suit :

" Les quantités (*shu*) de *bu* de la largeur et de la longueur étant multipliées l'une par l'autre, on obtient les *bu* du produit (*ji*).

Diviser ceci par le diviseur des *mu*, 240 *bu*, donne la quantité (*shu*) de *mu*. 100 *mu* font 1 *Qing*." ([Qian 1963], p. 93)

La première opération, une multiplication, calcule le nombre de *bu* que compte le produit de la longueur et de la largeur, toutes deux exprimées en *bu* —unité de surface et de longueur portent le même nom à cette époque en Chine. Cette opération est immédiatement suivie par une division, laquelle exprime le résultat en fonction d'unités supérieures. La multiplication produit l'aire, la réalité, le fruit, le dividende —quatre acceptions du même terme *shi*— ; et le diviseur, la méthode, le règlement, la loi — acceptions du terme *fa*— vont lui donner "forme", au sens où ils transformeront la masse de l'aire constituée en une suite de rectangles dont la largeur sera une unité de mesure déterminée et la longueur le montant de ladite aire en cette unité. A cette manière de voir correspond la seconde série d'expressions qui désigneront la division, au nombre desquelles : "Si le dividende est comme le diviseur, alors (cela donne) 1". Mais c'est également pareille perspective qui permet de rendre compte de la cohérence de ce premier chapitre : à une première partie sur les fractions, généralisation du nombre mesuré, y fait suite une seconde partie sur le calcul d'aires, renvoyant à d'autres modalités de transformations en rectangles. La succession d'une multiplication et d'une division donne par conséquent naissance au rectangle, ainsi qu'au nombre mesuré.

Quelques remarques à ce point. L'édition Song de Bao Huanzhi, le document le plus ancien disponible grâce auquel *Les neuf chapitres* nous sont connus, présente ici une singularité de mise en page : pour cette procédure qui ouvre le livre, l'énoncé de la seconde opération s'accompagne d'un passage à la colonne suivante. Ainsi une première colonne prescrit la multiplication, tandis qu'une nouvelle colonne révèle le second volet du calcul. Cette figure de double battant résonne avec l'expression que l'on trouve quelques lignes plus loin, lorsqu'à propos de la genèse des fractions, Liu Hui écrit : "diviseur et dividende se poussent l'un l'autre (ou : se déduisent l'un de l'autre)". *Fa shi xiang tui* ne peut manquer d'évoquer le « Grand commentaire » du *Yijing* qui énonce (premier chapitre, paragraphe 2) : *gang rou xiang tui er sheng bianhua* "Dur (*yang*) et Mou (*ying*) se poussent l'un l'autre, et font advenir des transformations"[28].

Nos deux opérations opposées, se suivant, ici se complètent et font advenir des réalités mathématiques. Mais la succession d'une multiplication et d'une division constitue également la première procédure du chapitre 2, capitale pour ce chapitre comme pour le canon dans son entier. Nous l'appelons la règle de trois. *Les neuf chapitres* lui donnent l'étonnant nom de "supposons", reprenant pour ce faire les deux premiers caractères qui

[28] Sur l'effet d'autres couples d'opposés qui, dans le cours du monde, se poussent l'un l'autre, voir également le « Grand commentaire », second chapitre, paragaphe 5. Nous ne pouvons insister sur toutes les polarités autres à l'oeuvre dans ce chapitre 1 : nombre/aire (l'axe central du chapitre, et le nerf de son organisation systématique en problèmes), rectangle/cercle…

débutent usuellement l'énoncé d'un problème. Ainsi, la même suite d'opérations opposées, toujours la multiplication et la division, dans cet autre contexte, produit un nouveau sens[29]. Le canon fait-il voir, dans les deux procédures fondamentales de ses deux premiers chapitres, la fécondité des interactions entre les deux termes de notre polarité que sont multiplication et division ? On peut être tenté de le croire dans la mesure où, si l'on poursuit l'examen des *Neuf chapitres* depuis cette perspective, on gagne un point de vue étonnant sur la cohérence de son organisation. Esquissons-la ici.

Que la procédure principale qui donne son nom au chapitre 3, "Parts pondérées en fonction des degrés", soit une modalité de succession de la multiplication et de la division, nous avons vu plus haut que le commentateur Liu Hui souscrivait à pareille lecture. Cependant le titre même du chapitre retenue par *Les neuf chapitres*, par le fait de reprendre le terme de "part" *fen,* semble renvoyer à l'introduction des fractions, des nombres mesurés au chapitre 1.

Le chapitre 4, nous l'avons vu également, traite, avec l'extraction de racines carrée et cubique, de la division qu'il étend, et travaille à l'inversion de formes variées de multiplication, tous thèmes dont nous avons esquissé les relations ci-dessus. De plus, en passant de l'extraction de racines carrée et circulaire, à l'extraction des racines cubique et sphérique, un nouvel ingrédient s'y trouve introduit, qui annonce la tonalité de la seconde partie du livre : la réitération.

Car c'est sous le double angle de la réitération, et de l'interaction de nos deux opérations de multiplication et de division, que le lecteur peut, dès le chapitre suivant, trouver un fil directeur pour appréhender l'organisation de la suite du canon. Le chapitre 5 réplique le chapitre 1 : la multiplication des dimensions qui donnent naissance aux aires y fait place à la double multiplication qui engendre les volumes, les divisions leur donnant ensuite forme. Le chapitre 6, quant à lui, semble examiner les potentialités que recèle la réplication de la règle de trois ou de la procédure des "parts pondérées en fonction des degrés". C'est en tout cas ce que le commentateur, une fois de plus à travers ses démonstrations, y lit. Le chapitre 7 est ouvertement placé sous le signe d'une double polarité : la procédure principale qui lui donne son nom, "Excédent et déficit", débute la

---

[29] Le commentateur Li Chunfeng réénonce bien, au problème 2.15, l'algorithme comme *chengchu* "multiplier, diviser". C'est lui, rappelons-le, qui transforme la liste d'opérations fondamentales énoncée par Liu Hui dans son commentaire, en y incluant justement la règle de trois (voir ci-dessus). Soulignons par ailleurs que Liu Hui met en communication ces deux contextes des chapitres 1 et 2, puisqu'il justifie la règle de trois telle qu'énoncée par le classique en l'interprétant comme un double changement d'unité. Il donne la règle de trois pour rendre compte de l'aspect quantitatif de métamorphoses (*hua*) des plus variées de réalités les unes dans les autres (voir [Chemla 1997a]). [Li Jimin 1990], p. 133, lit dans le chapitre 1 une réalisation mathématique d'une autre modalité de transformation, *bian*, en relation avec les élaborations à son sujet du « Grand commentaire » du *Yijing*. L'intuition m'en paraît juste. Nous l'avons vu plus haut, *bian* peut renvoyer au changement de polarité d'une ligne d'un hexagramme. Par ailleurs, *bian* semble également pouvoir désigner les modifications continues contrôlables par un paramètre (voir le glossaire à la traduction et la bibliographie appuyant cette interprétation). Ainsi, les variations dont sont susceptibles les données d'un problème pourraient relever de cet ordre de transformation. Le fait que la seconde partie du chapitre 2 soit consacrée à une série de problèmes dont les données varient continuement jusqu'à arriver à une situation où la même procédure ne peut plus être utilisée et qu'il faille utiliser la procédure inverse (*fan*) me paraît évoquer les mêmes aspects du « Grand commentaire » : la transformation arrive à un moment où s'épuise la capacité de la procédure et où elle doit s'inverser pour que ses opérations soient efficaces. Je ne peux détailler ici plus avant, mais je me propose de revenir sur ce point dans un article ultérieur.

résolution de tout problème par deux suppositions sur l'inconnue à déterminer, ce qui produit les excédents et déficits sur la base desquels opérer[30].

A lire sous cet angle l'algorithme central du chapitre 8, « Mesures en carré », on constate qu'il procède en faisant s'alterner une multiplication d'ensembles de nombres, disposés dans des colonnes, par une même valeur et une "division" entre colonnes[31]. Et quant au chapitre 9, consacré au triangle rectangle, la procédure qui lui donne son nom, « Base et hauteur », une forme algorithmique dudit théorème de Pythagore, conjugue le couple de côtés de l'angle droit dans un calcul où une élévation au carré répond à une "division par extraction de racine".

Je ne chercherai pas plus à entrer dans les détails. Qu'il nous suffise d'apercevoir la possibilité d'argumenter la thèse selon laquelle les diverses procédures centrales des *Neuf chapitres* travaillent d'une manière ou d'une autre autour de la complémentarité ou de l'opposition entre multiplication et division. Est-ce à cela que Liu Hui fait allusion quand il déclare dans sa préface : "Enfant, j'ai étudié *Les neuf chapitres* ; adulte, à nouveau je l'ai regardé en détail. J'y ai observé le partage du *Yin* et du *Yang*, j'ai synthétisé la source des procédures mathématiques" ? Il est pour l'heure difficile de le déterminer avec certitude. D'autres analyses des sources, de nouveaux matériaux permettront sans doute de jeter quelque lumière sur cette question. Nous retiendrons simplement la place centrale que jouent ces deux opérations dans les listes fondamentales de procédures que dressent nos trois commentateurs, Liu Hui, Li Chunfeng et Yang Hui, ainsi que la remarque selon laquelle ces deux processus opposés, mais complémentaires, semblent bien permettre de composer la diversité du réel mathématique tel qu'il se présente dans *Les neuf chapitres*.

### 3. L'EFFET DIACHRONIQUE

Une perspective totalement différente, diachronique cette fois, semble pointer vers les mêmes conclusions, en éclairant la question sous un jour nouveau. Pour en donner ici une esquisse, je reviendrai aux algorithmes d'extraction de racine dont nous évoquions en première partie les relations avec le déroulement d'une division[32].

Tels qu'elles sont décrites dans les temps des débuts de notre ère, au chapitre 4 des *Neuf chapitres,* ces procédures se déroulent sur trois lignes, sièges d'événements analogues à ceux d'une division, ainsi que sur d'autres lignes, auxiliaires, lesquelles permettent d'effectuer les calculs nécessaires à l'insertion des extractions de racine dans le schéma dynamique d'une division. Les siècles ultérieurs voient ces algorithmes retravaillés d'une manière qui témoignent d'une nouvelle appréhension des rapports entre division et extraction de racine. En simplifiant quelque peu, l'on pourrait dire que, de même que la division se déroule sur trois lignes, l'extraction de racine carrée (resp. cubique) se déroule maintenant sur quatre (resp. cinq) lignes, en ménageant sous le dividende deux (resp. trois) lignes de comportement analogue à celui d'un diviseur et qui reçoivent d'ailleurs le nom de "diviseur". Un travail se manifeste donc, qui produit une montée en homogénéité sous deux rapports. Si l'on considère les listes d'événements qui affectent les lignes sur

---

30 On trouvera quelques précisions et un embryon de bibliographie dans [Chemla 1997 a&b].

31 [Chemla 1992] amorce la description de cet algorithme comme une extension d'une division. Une autre polarité entre en jeu au cours du chapitre : celle que l'on peut reconnaître sous les espèces de l'opposition entre nombres positifs et négatifs.

32 Le lecteur intéressé peut se reporter à [Chemla 1994], ainsi qu' à l'article qui lui fera suite. Tous les détails éliminés ici sont là traités plus en profondeur.

lesquelles se pratique l'algorithme, elles présentent des classes de comportement en nombre plus restreint au cinquième siècle qu'aux débuts de notre ère, un mouvement que la terminologie accompagne. Par ailleurs, de ce fait, division et extractions de racine apparaissent dorénavant comme différentes manifestations d'un même type d'opérations.

Le nouvel état des algorithmes d'extraction de racine, que l'on associe au nom de Jia Xian, au onzième siècle, peut apparaître comme produit par la poursuite du même travail. Et c'est la manière dont cette procédure tisse multiplication et division d'une nouvelle manière qui nous intéresse ici. A vrai dire, nous la considèrerons un temps plus tard, lorsqu'au treizième siècle, comme en témoigne le *Shushu jiuzhang* (*Procédures mathématiques en neuf chapitres*) de Qin Jiushao (1247)[33], elle est utilisée désormais pour rechercher "la" racine d'une équation algébrique de degré indéterminé et à coefficients positifs ou négatifs[34] : elle manifeste alors l'homogénéité maximale.

L'équation $AX^3 + BX^2 + CX + D = 0$ est alors représentée par la colonne

D
C
B
A

où A, B, C, D peuvent être positifs, négatifs ou nuls —ces divers nombres sont repris au contexte de la résolution des systèmes d'équations linéaires qu'ils n'ont depuis les débuts de notre ère encore jamais quitté[35]. C'est donc une colonne —dont les lignes peuvent arbitrairement montrer l'un ou l'autre face de la polarité positif/négatif—, sur laquelle l'algorithme de recherche de racine opèrera, en la balayant de manière réitérée de bas en haut.

Considérons maintenant cet algorithme, qui permet de produire ce qui est considéré comme l'unique racine de cette équation —j'évoquerai la procédure, pourtant générale, sur le seul exemple de cette équation cubique. Il propose de faire progresser les différents diviseurs C, B, A, à la manière d'un diviseur au début d'une division, vers la gauche aussi loin que faire se peut : C d'une colonne à la fois, B, de deux colonnes à la fois, et A, de trois. C'est l'étape qui met les "coefficients" en position pour le traitement du premier chiffre de la racine. Par la suite, avec la détermination de chaque nouveau chiffre, ils seront progressivement rétrogradés, comme l'est le diviseur d'une division ou le multiplicateur d'une multiplication à ce moment du processus. Je passerai désormais ces étapes sous silence.

L'étape fondamentale, dont la pure réitération constitue cette procédure, consiste, une fois le chiffre de la racine déterminé et placé dans la ligne du dessus comme à l'accoutumée—considérons le premier de ces chiffres, et appelons-le *a*— à multiplier par *a*

---

[33] Je me réfère à l'édition de Song Jingchang, *Yijiatang congshu*, 1842.

[34] On pourrait suivre l'histoire de cette intégration. Je ne m'y arrête pas ici. Signalons simplement que dès *Les neuf chapitres*, les équations quadratiques sont traitées dans le cadre de l'extraction de la racine carrée, un trait caractéristique qui s'affirmera en Chine, où les équations algébriques se développeront uniquement dans ce contexte à la différence des autres traditions mathématiques.

[35] On a beaucoup trop peu insisté sur ce fait jusqu'à présent. Pourtant c'est l'un des facteurs qui devraient nous garder de projeter dans ces signes les nombres positifs et négatifs tels que nous les comprenons, mais nous ne pouvons aborder ici ce sujet.

une ligne et à l'ajouter à la ligne immédiatement au dessus. Ce qui donne la succession de configurations suivantes sur la table à calculer :

a
D
C
B
A

puis

a
D
C
B+aA
A

puis

a
D
C + a(B+aA)
B+aA
A

puis

a
D + a[C + a(B+aA)]
C + a(B+aA)
B+aA
A

Cependant, ces "additions" doivent être pensées algébriquement : selon la situation —à savoir : selon que les deux nombres à additionner sont de même signe ou de signes contraires—, l'opération réelle est une addition ou une soustraction[36]. Autrement dit : l'étape en question, selon les cas, reproduit le pas fondamental d'une multiplication ou d'une division. Il suffira d'ajouter que c'est la pure reprise de cette routine qui réalise jusqu'au bout le calcul de la racine pour se convaincre du fait que ce problème est désormais résolu par un tissage de nos deux opérations fondamentales : dans les calculs comme dans les positions, le processus est constitué par la simple répétition[37] des pas de base qui réalisent une division ou une multiplication.

---

[36] Les marques "positif" ou "négatif" sont donc, comme dans le cas de la résolution des systèmes d'équations linéaires, des indicateurs sur la base desquels décider la manière de mener l'algorithme. Voir [Chemla 1992].

[37] On se convaincra aisément que la nature des positions joue ici un rôle crucial. Voir [Chemla 1996].

Il est remarquable que multiplication et division conjuguent leurs effets pour pouvoir désormais produire, *de manière uniforme*, un ensemble d'algorithmes qui, jusqu'alors, apparaissaient certes comme analogues, mais restaient tout de même différents. Cette unification semble avoir été réalisée dans le même temps qu'une extension de la procédure à des puissances quelconques.

Les *changements* nécessaires à la résolution des problèmes qu'incarnaient ces algorithmes ont été re-produits à nouveaux frais : ils se composent maintenant d'une alternance de deux uniques opérations, opposées, dont les effets se complètent cependant. La décision relative à laquelle de ces deux opérations doit être mise en oeuvre à un moment donné dépend de la situation locale, du point de vue des signes —la polarité positif/négatif— des deux lignes en interaction. Il semble donc se manifester un travail au cours des siècles sur le changement en tant que tel : les transformations qu'incarnent les algorithmes sont repensées, conçues à nouveaux frais, redécrites. La recherche que laissent voir les résultats de ce travail paraît se pencher sur la question d'élucider les relations réelles qui unissent les procédures analogues, les processus/opérations élémentaires qui peuvent permettre, par composition, de produire la variété du réel mathématique. En l'occurrence, ces ingrédients, multiplication et division, forment, est-ce un hasard ?, un ensemble d'instances opposées mais complémentaires. C'est une recherche du même type qui peut rendre compte de l'identification du couple d'opérations "homogénéisation-égalisation", dont on constate la présence dans les listes de procédures fondamentales dressées par Liu Hui et Li Chunfeng[38]. N'est-ce pas une attention de cette nature dont témoigne Zhu Shijie lorsqu'il déclare en ouverture de l'ouvrage où il étendra l'algèbre jusqu'à quatre indéterminées, *Le miroir de jade des quatre éléments* (1303) : "Tous ceux qui étudient les quatre éléments (en l'occurrence : les quatre indéterminées), se donnant pour tâche d'éclairer le *li* (la constitution interne des choses, en particulier des procédures), doivent pénétrer le *li* de la multiplication et de la division, de la montée et de la descente, de la progression et de la régression et, par suite, la connaissance qui consiste à épuiser la nature (des existants) et à aller jusqu'au bout de la dimension d'esprit"[39] ?

Si tel est bien le cas, insistons-y cependant : pareil travail, orienté par des problèmes relatifs au changement et au rôle que jouent les polarités pour le faire advenir, a pu être un facteur déterminant pour conduire des mathématiciens chinois à la production d'un nouvel algorithme, auquel les historiens donnent aujourd'hui usuellement le nom de "Ruffini-Horner". C'est là qu'une perspective philosophique de cette nature a peut-être incité à explorer des questions mathématiques spécifiques et conduit à élaborer, ou à

---

[38] J'ai longuement traité ce point ailleurs, je ne peux y revenir ici, voir [Chemla 1992 & (à paraître)]. Dans les deux cas, la démonstration des algorithmes semble servir de base pour identifier de telles opérations fondamentales. Nous avons souligné le rôle que jouaient les positions dans le cas des algorithmes d'extraction de racine pour manifester tout d'abord les relations d'analogie ou d'opposition entre les algorithmes, puis ces deux composantes fondamentales que sont multiplication et division. Dans le cas de l'homogénéisation/égalisation, il est également pensable que le motif renvoie à une configuration de calculs récurrente sur la table à calculer, voir [Chemla 1996]. Les positions et les changements qui se combinent pour former des opérations permettent de travailler le changement, de le concevoir et d'exprimer les résultats dans la trame des textes et les dispositions des calculs.

[39] Je cite le *Siyuan yujian* (*Miroir de jade des quatre éléments*) de Zhu Shijie (1303), en m'appuyant sur l'édition basée sur le travail de Luo Shilin et incluse dans le *Wanyou wenku*, Shangwu yinshuguan, 1936. Cette dernière expression *jinxing qiongshen* évoque l'énoncé de l'appendice : « Explications des hexagrammes (*guo*) » du *Yijing*, où l'on lit *qiongli jinxing* "aller jusqu'au bout du *li* (la constitution interne), épuiser la nature (des existants)".

remarquer, des résultats qui, à l'échelle d'une histoire internationale des mathématiques, étaient à l'époque novateurs.

## CONCLUSION

Que ce soit au niveau de la mise en scène des calculs sur la table à calculer, au niveau de l'organisation du texte mathématique, ou pour ce qui est de l'évolution diachronique des procédures, nous avons vu travaillée, travailler la paire que forment nos deux opérations opposées de multiplication et de division. Ce premier examen incite à poursuivre l'enquête, puisque les textes mathématiques mettent plus généralement en oeuvre de multiples autres polarités. L'enjeu en est multiple.

Il s'agit en premier lieu d'élucider les questions théoriques qui ont orienté la pratique mathématique élaborée, en Chine, dans la tradition des *neuf chapitres*. Un même projet semble animer le classique et ses commentaires : identifier les opérations générales, fondamentales, à l'oeuvre dans la variété des procédures. Or, à l'analyse, ces procédures, en lesquelles Liu Hui reconnaît une incarnation mathématique des transformations plus largement à l'oeuvre dans le réel (*bianhua*), manifestent, pour ce qui est des opérations de base, le jeu d'instances opposées et complémentaires. Elles justifient, dans le même temps qu'elles reflètent, des conceptions sur le changement qui débordent le simple cadre des mathématiques et que le « Grand commentaire » du *Yijing* explicite.

Dans un développement où il traite du *Yijing*, J. Gernet [1993, p. 29] écrit : "Ce n'est pas sur le mode de l'affrontement des contraires que la notion de changement a été traitée en Chine, mais sur celui de leur complémentarité et de leur collaboration. C'est le fonctionnement d'oppositions inclusives, et non exclusives, qui explique les transformations et le fonctionnement même de l'univers dans son ensemble, l'association et les combinaisons du *yin* et du *yang* qui rendent compte de la naissance, du développement et de la décrépitude des êtres."

L'écho que font, à ces considérations, les développements mathématiques analysés dans cet article appelle à examiner plus avant les relations qui ont pu s'établir entre réflexions sur le changement développées sur la base du *Yijing*, d'une part, et travaux menés en mathématiques sur les algorithmes, d'autre part. En effet, les mathématiques ont pu former l'un des domaines par référence auxquels l'on a étudié en Chine le changement. Les questions que l'on a posées en leur sein pourraient porter la marque de ces préoccupations. Mais réciproquement, c'est là un autre enjeu du programme de travail proposé ici, si de tels ponts furent établis entre mathématiques et philosophie, l'analyse des textes mathématiques pourrait fournir un biais intéressant pour interpréter ce que des écrits à caractère plus général nous disent de la manière dont les polarités produisent le réel. Cette solidarité entre des options philosophiques et mathématiques, entre autres, fait face à une solidarité fondée en Grèce sur d'autres choix, que J. Gernet [1993] rappelle. Le contraste entre ces deux situations, une fois que nous les aurons mieux appréhendées l'une avec l'autre, semble promettre une lumière nouvelle sur la part prise jadis, en Occident comme en Orient, par les questionnements philosophiques dans la définition de l'exercice mathématique.

## Bibliographie

[Chemla 1987] "L'aspect algorithmique récurrent dans les mathématiques chinoises : Paysages d'algorithmes, algorithmes de paysages", in Jean Dhombres (ed.) : *Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences, 20*, Société française d'histoire des sciences et des techniques, p. 86-104.

[Chemla 1989] "Qu'apporte la prise en compte du parallélisme dans l'étude de textes mathématiques chinois ? Du travail de l'historien à l'histoire du travail", *Parallélisme et appariement des choses, Extrême-Orient, Extrême-Occident, 11,* p. 53-80.

[Chemla 1992] "Résonances entre démonstration et procédure. Remarques sur le commentaire de Liu Hui (3° siècle) aux *Neuf Chapitres sur les Procédures Mathématiques* (1° siècle)", *Extrême-Orient, Extrême-Occident, 14*, p. 91-129.

[Chemla 1993] "Cas d'adéquation entre noms et réalités mathématiques. Quelques exemples tirés de textes chinois anciens", *Extrême-Orient, Extrême-Occident, 15,* p. 102-137.

[Chemla 1994] "Similarities between Chinese and Arabic Mathematical Writings (I) : root extraction", *Arabic Sciences and Philosophy, 4*, n° 2, p. 207-266.

[Chemla 1996]"Positions et changements en mathématiques à partir de textes chinois des dynasties Han à Song-Yuan. Quelques remarques", *Extrême-Orient, Extrême-Occident,* 18, p. 115-47.

[Chemla 1997a] "Croisements entre réflexion sur le changement et pratique des mathématiques en Chine ancienne: Le cas des *Neuf chapitres sur les procédures mathématiques* et de leurs commentaires", in J. Gernet et M. Kalinowski, *En suivant la voie royale*, Presses de l'Ecole Française d'Extrême-Orient.

[Chemla 1997b] "Philosophical reflections in Chinese ancient mathematical texts: Liu Hui's reference to the *Yijing*", in Kim Yungsik (ed.), *Proceedings of the VIII$^{th}$ International Conference on the History of Science in East Asia*, (à paraître).

[Chemla (à paraître)] "What is at Stake in Mathematical Proofs from Third Century China? A Comparative Study of Mathematical Verity", *Science in Context.*

[Gernet, Jacques 1993] "Le changeant et l'immuable", *Actes de la recherche en sciences sociales*, 100, pp. 27-31.

[Guo Shuchun 1992] *Gudai shijie shuxue taidou Liu Hui* (*Liu Hui, une grande figure des mathématiques mondiales anciennes)*, Shandong kexue jishu chubanshe, 468 p. (en chinois)

[Jullien, François 1989] *Procès ou Création. Une introduction à la pensée des lettrés chinois*, Editions du Seuil, 320 p.

[Jullien, François 1993] *Figures de l'immanence. Pour une lecture philosophique du Yijing*, Collection « Figures », Grasset, 1993, 284 p.

[Li Jimin 1990] *Dongfang shuxue dianji Jiuzhang suanshu ji qi Liu Hui zhu yanjiu (Recherches sur le classique mathématique oriental* Les neuf chapitres sur les procédures mathématiques *et sur son commentaire par Liu Hui*), Shaanxi renmin jiaoyu chubanshe, 492 p.

[Qian Baocong 1963] *Suanjing shishu* (*Dix classiques de mathématiques*), Zhonghua shuju, 2 volumes, 603 p.