



5 – le Noyau premier

Jean Stratonovitch

► To cite this version:

| Jean Stratonovitch. 5 – le Noyau premier. 2014. hal-01064270

HAL Id: hal-01064270

<https://hal.science/hal-01064270>

Preprint submitted on 16 Sep 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Le noyau premier

Jean Stratonovitch

Nous avons montré dans l'article *Cahier des exigences d'une axiomatisation des notions spatiotemporelles* qu'en vertu du principe de fondation sur l'instrument et l'expérience, et parce que toute expérience de physique exige un cadre spatiotemporel pour pouvoir être mise en place, la cinématique est le noyau de la physique :

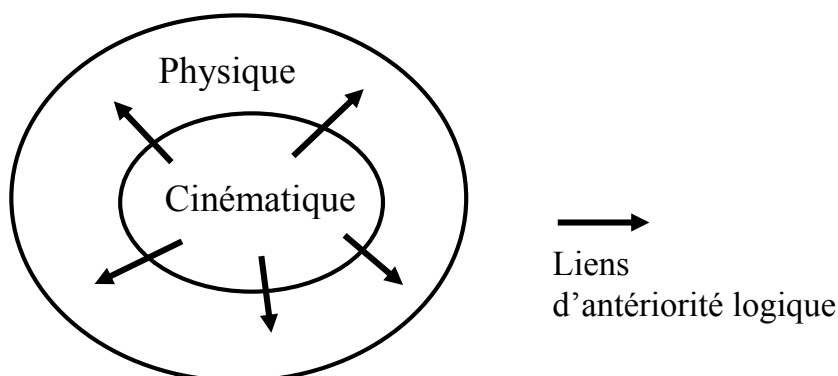


Fig. 1 : Physique et cinématique

Dans cet article, nous commençons la construction d'une axiomatisation de la cinématique. Divers systèmes d'axiomes sont évidemment possibles, et nous ne prétendons aucunement donner le « meilleur ». Nous entendons simplement montrer qu'il est *possible* de construire une axiomatisation de la cinématique conforme à l'exigence de fondation sur l'instrument et l'expérience ainsi qu'aux autres qui ont été dégagées :

- Bonne architecture mathématique. La cinématique doit être une théorie mathématique axiomatisée. Tous ses objets premiers doivent être explicités, ainsi que ses axiomes.
- Universalité. Le premier cadre à axiomatiser est le cadre galiléen parfait, celui du désert intersidéral.

- Minimalité. Le nombre des objets premiers doit être minimal, ainsi que les contraintes axiomatiques.
 - Solidité logique. Un modèle de la théorie doit pouvoir être construit à l'intérieur des mathématiques.
 - Pertinence. La théorie doit offrir une description précise et exacte du réel.
-

1 – ARCHITECTURE DU NOYAU DE LA CINÉMATIQUE

La géométrie précède la chronométrie

Ce n'est pas avec une équerre qu'on mesure des durées, ni avec une horloge qu'on vérifie qu'un angle est droit. La géométrie et la chronométrie, quels que soient leurs liens profonds, ne sont pas la même chose, puisqu'elles ne reposent pas sur les mêmes instruments.

On peut – et on doit – se demander si l'une précède l'autre. Qu'elle soit clepsydre ou horloge atomique, en passant par le sablier, l'horloge à poids et à balancier, le chronomètre à ressort et à roue oscillante et l'horloge à quartz, sans oublier la plus simple de toutes, l'horloge inertielle terrestre, que la nature nous offre sans que nous ayons à la fabriquer, toute horloge est une machine qui produit un mouvement dont nous convenons qu'il est régulier. On ne peut définir une machine que dans un cadre géométrique achevé, et tel est donc le cas de l'horloge.

Il faut se poser la même question à propos du concept de simultanéité. Sans horloge ni géométrie on se trouve bien démuné pour installer un quelconque protocole expérimental pour la définir. Celui que propose Einstein, par exemple, demande qu'on sache construire le milieu de deux lieux A et B, où siègera un observateur qui arbitrera la simultanéité entre les événements qui s'y déroulent au moyen des signaux lumineux qui lui en parviennent. Pour cela, il faut avoir construit la géométrie. Ce n'est évidemment qu'un exemple, et il existe d'autres techniques instrumentales de définition de la simultanéité, sur lesquelles nous reviendrons. Toutes celles qui ont été imaginées utilisent la géométrie d'une manière ou d'une autre.

La construction de la géométrie doit précéder celle de la chronométrie.

La construction de la géométrie requiert cependant certaines notions temporelles premières

Faire des expériences de géométrie – par exemple tracer les trois médiatrices d'un triangle pour voir si elles sont ou non concourantes – exige néanmoins qu'on dispose de certaines notions temporelles préalables : il faut *d'abord* tracer un arc de cercle de centre A, *puis* un arc de cercle de même rayon et de centre B, *puis* repérer leur point d'intersection M, etc.

Nous pouvons ici craindre un cercle vicieux : il faut disposer de la géométrie pour construire les notions temporelles, et néanmoins déjà disposer de notions temporelles pour construire la géométrie.

La pratique de la géométrie se ramène – nous détaillerons ce point ultérieurement – à deux sortes d'actes : d'une part le déplacement des instruments d'un lieu à un autre, d'autre part l'observation des indications qu'ils donnent lorsqu'ils sont immobiles relativement au réel qu'ils mesurent.

Le géomètre peut dans l'une et l'autre opération prendre tout le temps qu'il voudra, si bien que la mesure des durées n'est pas un préalable à la construction de la géométrie.

Pour ce qui est de la simultanéité, la chose est moins flagrante. Lorsque le géomètre superpose par exemple une règle à mesurer (ou tout autre objet que nous postulons avoir des propriétés géométriques invariables – nous analyserons ultérieurement, également, ce que cela signifie) il fait en sorte que le point A_1 de sa règle, qui est celui où est gravé le zéro, coïncide avec un point A'_1 de l'objet *en même temps* qu'un autre point A_2 de la règle coïncide avec un point A'_2 de cet objet. Ce « *en même temps* » invoque une simultanéité dont il ne dispose a priori pas, sous peine de cercle vicieux.

On peut certes avoir envie de répondre que vu la longueur d'une règle à mesurer, la question ne se pose pas, et qu'une simultanéité naïve est alors suffisante. La réponse est sans doute acceptable en pratique, mais elle ne l'est pas en théorie.

D'abord parce les règles à mesurer ne sont pas nécessairement petites. Il paraît bien difficile, d'un point de vue axiomatique, d'interdire au géomètre de disposer d'autant de règles à mesurer qu'il le veut, surtout si elles sont seulement virtuelles, et on ne voit pas comment on pourrait lui interdire de les mettre bout à bout pour en fabriquer une plus grande. La longueur des règles à mesurer, du point de vue théorique, ne peut pas avoir de majorant. Nous avons le droit d'en envisager, si tel est notre bon plaisir, qui dépassent en longueur l'année-lumière.

En outre, que les règles soient petites ou non est une question hors de propos. Notre démarche, même si elle s'étend aux domaines du temps et de la mécanique, est de nature géométrique, en ce sens qu'elle respecte la précision absolue des mathématiques, pour qui deux nombres « égaux jusqu'à la milliardième décimale » sont des nombres qu'un abîme sépare encore, celui de l'infinité des décimales suivantes. La question de ce « *en même temps* » est exactement la même, de ce point de vue, avec une règle de vingt centimètres qu'avec une de vingt années-lumière.

Pour fixer les idées, et bien que cela n'ait aucune importance mathématiquement parlant, imaginons cette règle à mesurer immensément longue. Un géomètre veut vérifier qu'elle est superposée disons à une autre règle $A'_1A'_2$, en ce sens que *pendant un certain laps de temps*, le point A_1 est superposé au point A'_1 , *en même temps* que le point A_2 est superposé au point A'_2 .

Nous n'envisageons ici qu'une situation simple, à deux fois deux points A_1 et A_2 , A'_1 et A'_2 , mais le problème est le même, dans son principe, pour une situation à deux fois n points A_1, A_2, \dots, A_n d'une part, A'_1, A'_2, \dots, A'_n d'autre part, et admet une solution identique.

Notre géomètre, conscient des responsabilités qui sont les siennes, endosse l'habit et le titre de chef-géomètre et envoie deux assistants, l'un en A_1 , l'autre en A_2 . Ce sont eux qui vérifieront la superposition de A_1 et de A'_1 d'une part, de A_2 et de A'_2 d'autre part. Chacun d'eux, arrivé sur son lieu de travail au terme d'un long voyage, dépêche un sous-assistant en direction du chef-géomètre pour l'informer qu'au point qu'il est chargé de contrôler l'opération vient de commencer. Les assistants rejoignent le chef-géomètre à l'instant i de son histoire personnelle, et ce dernier sait alors que l'expérience de vérification de la superposition a débuté en A_1 comme en A_2 . Il laisse

passer une durée arbitraire, non mesurable, puis à l'instant j de son histoire personnelle renvoie les sous-assistants en leur points d'origine A_1 et A_2 proclamer la fin de l'expérience de superposition. À cette annonce en ces lieux, les assistants, chacun porteur du résultat de sa part de l'expérience, se mettent en route vers le chef-géomètre, qu'ils rejoignent à l'instant k de son histoire. Si le premier lui rapporte alors que durant son intervalle temporel particulier d'observation A_1 a toujours coïncidé avec A'_1 , et l'autre de même avec A_2 et A'_2 , alors le chef conclura que pendant au moins tout l'intervalle $[i, j]$ de son histoire personnelle les deux règles ont coïncidé en ces deux couples de point.

Il n'y a donc pas besoin de disposer de simultanéité pour conduire une expérience de superposition durable. L'affirmation que les points A_2 et A'_2 doivent coïncider *en même temps* que A_1 et A'_1 coïncident n'a cependant rien d'erroné ni de fallacieux, sans elle l'expérience se vide de son sens. Mais parce que cette simultanéité indispensable à la compréhension de l'expérience, quelle qu'elle soit, est nécessairement confinée dans les bornes que lui donne l'ordre chronologique, ce dernier suffit à la rendre en l'occurrence utilisable, même si nous ne savons pas précisément ce qu'elle est.

La pratique des expériences de géométrie demande des notions temporelles, mais ne requiert ni le concept de durée, ni celui de simultanéité.

Architecture du noyau de la cinématique

Le noyau de la cinématique se décompose donc en trois sous-noyaux emboîtés :

- le **noyau de la chronométrie**, qui installe les notions de durée et de simultanéité ;
- le **noyau de la géométrie**, inclus dans le précédent ;
- le **noyau premier**, inclus dans le précédent, qui installe les notions préalables à la géométrie, notamment les notions temporelles dont nous venons de montrer la nécessité.

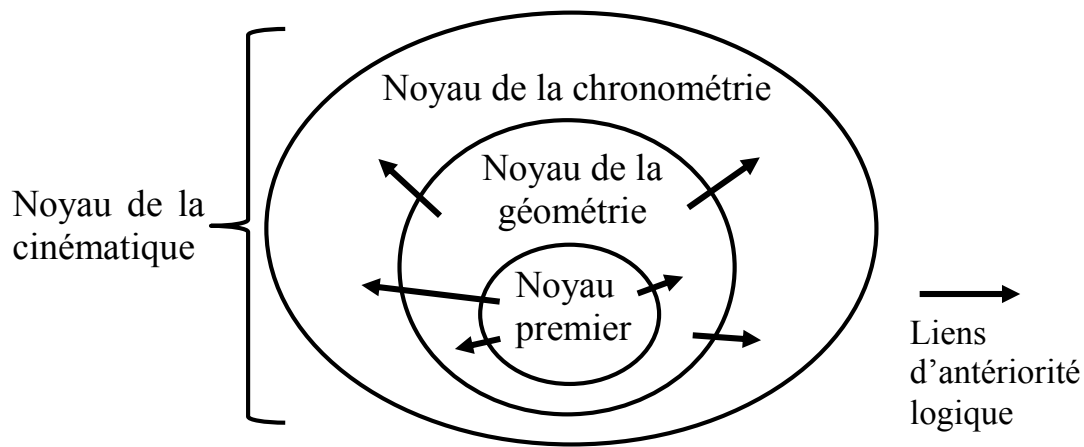


Fig. 2 : Architecture du noyau de la cinématique

2 – L'INSTRUMENT DU NOYAU PREMIER : LE POINT HISTORICISÉ

Le point historicisé

Que ce soit de façon abstraite ou concrète, on ne peut penser l'espace et le temps que si on dispose de la capacité de désigner des points et des instants.

L'un ne peut se faire sans l'autre : un point est toujours considéré en un instant (ou des instants) particulier de son existence, en lequel, par exemple, il coïncide ou ne coïncide pas avec tel ou tel autre point. Le point tel qu'il s'offre à la géométrie participe au grand maelstrom universel. C'est une entité historicisée, nous l'appellerons **point historicisé** – locution peut-être un peu lourde mais claire et qu'il sera toujours possible, dans un contexte sans équivoque, d'abréger en « point ». Il possède une **histoire personnelle**, définie comme étant un ensemble d'**instants personnels**. Ces instants sont de portée purement locale, même si leur appartenance à l'histoire du point les insère dans le contexte global de l'univers.

Le point historicisé est nécessaire à la désignation du réel spatiotemporel. Il est le premier *objet premier* de la cinématique, et l'instrument du noyau premier.

Ce ne sont pourtant pas de tels points qui apparaissent dans les diverses géométries, l'eulidienne comme les non-eulidiennes. Dans toutes, les points sont atemporels, aussi atemporels que par exemple les nombres entiers. On peut facilement l'expliquer. La géométrie naît dans l'espace « immobile » des figures qu'on trace sur le sol terrestre et qui restent perpétuellement identiques à elles-mêmes, du moins tant que rien ne vient les altérer, si bien qu'on peut oublier leur perpétuelle dimension temporelle. Mieux que cela, quand elle reconstitue le cadastre après les crues du Nil, elle reproduit à l'identique, au moins en théorie, la configuration d'avant, si bien qu'on peut penser que cette configuration n'a jamais cessé entretemps d'exister. La géométrie superpose au réel un univers immobile qu'il est commode et facile d'identifier à une réalité. L'apogée de ce point de vue est évidemment l'espace absolu newtonien, invisible, impossible à atteindre, mais pensé comme réel, et où les points, comme dans les espace géométriques, ont perdu toute temporalité.

Parallèlement, l'exigence de fondation sur l'instrument et l'expérience est ignorée, elle qui requiert pour la conduite des expériences de géométrie une séquentialité des travaux et donc une temporalité du contexte impliquant l'historisation des points.

Points de l'espace et points des objets

Comme l'exigence de fondation sur l'instrument et l'expérience, jointe à celle de minimalité, nous fait récuser l'espace en tant qu'existant a priori, l'expression « point de l'espace » n'a pour le moment aucun sens. Ce dont nous disposons, sur lequel tout le monde est forcé de s'accorder, et duquel il est impossible de retrancher quelque contenu que ce soit, ce sont seulement les points des objets.

Un point d'un objet, considéré sous l'angle idéal et non pas concret, c'est le fruit d'un passage à la limite à la fois naïf, audacieux, indispensable et fondateur – c'est d'ailleurs, historiquement parlant, le premier de tous les passages à la limite. Il idéalise en se faisant infiniment petit la plus petite partie que nous pouvons voir ou marquer sur un objet. Par le même passage à la limite, nous pouvons aussi considérer des objets infiniment petits, et donc des points isolés, des

points-objets. Ce ne sont pas tout à fait les mêmes que les précédents, mais nous tenons cette différence pour nulle et rangeons les uns et les autres sous la même bannière conceptuelle : les points **effectifs**.

Points effectifs et points virtuels

Considérons une portion d'espace – dans un sens naïf et intuitif – par exemple un pavé. Les points de cet espace doivent être définis à partir des points effectifs : chaque point effectif durablement immobile relativement au pavé engendrera un point de cet espace. Il se peut toutefois qu'aucun point effectif ne soit durablement immobile à l'intérieur du pavé – et c'est même le plus probable. Faut-il alors définir les espaces comme des structures lacunaires, des éponges pleines de trous, voire des lambeaux épars ? Nullement. Ce que la géométrie modélise, comme généralement la physique, c'est le *possible* et non pas seulement *l'effectif*. Aucun point effectif, certes, n'est immobile en ce lieu, mais il est aussi *possible* que l'un d'eux le soit, quitte à ce que nous le maintenions en place par un dispositif approprié. C'est ce que fait Einstein dans *la Relativité*, quand pour définir un lieu de l'espace au-dessus de la place du Panthéon il utilise une longue perche dressée verticalement depuis le sol. Un certain point de la perche définit alors le lieu. Dans un deuxième temps, on n'utilise plus la perche, on se contente de l'imaginer, et le lieu reste tout aussi bien défini. En dépit des apparences, le point sur la perche n'a donc pas disparu de figure, puisque c'est lui qui définit le lieu. Il est simplement passé du statut de point *effectif* à celui de point **virtuel**.

Effectif et virtuel sont les deux manifestations du *possible*. La théorie ne fait pas de différence entre elles. C'est qu'analyser une situation oblige à l'envisager comparativement à d'autres, et notamment à ses variantes, celles qu'elle aurait été si tel ou objet avait modifié, ou si tel ou tel paramètre avait eu une autre valeur, etc. Cela revient à l'immerger dans un ensemble de situations fictives – virtuelles – parmi lesquelles elle n'est qu'un des possibles, traité à égalité avec les autres

Les points historicisés ne sont pas seulement les points effectifs des objets effectifs ; il faut leur adjoindre les points *virtuels* qui sont tous leurs possibles non réalisés.

.....

3 – LES INSTANTS LOCAUX

De même que pour l'espace, les exigences de fondation sur l'instrument et l'expérience et de minimalité excluent un temps existant en soi. La temporalité ne peut donc découler ni d'un temps absolu à la Newton, ni d'une durée propre purement locale à la Einstein, l'un et l'autre étant installés tout faits, hors de l'expérience constructive.

L'expérience de pensée donnée plus haut, où l'on vérifie la superposition durable de deux objets, suffit à dégager les expériences élémentaires qui, dans le noyau premier, installent les premiers éléments de la temporalité.

Lorsque le point historicisé M rencontre le point historicisé M' , l'évènement se déroule pour lui à un certain instant i_M de son histoire personnelle. Il est « évident » (mais indémontrable : cela fait partie des propriétés de base qui doivent être installées par des axiomes) que la rencontre de M avec M' est aussi une rencontre de M' avec M . Il existe donc un instant $i_{M'}$ de l'histoire personnelle de M' en lequel cette même rencontre a lieu.

Nous disons alors que les points M et M' **coïncident** aux instants i_M et $i_{M'}$ de leurs histoires respectives, ou encore qu'ils sont **coprésents** à ces instants-là.

Comme les instants personnels d'un point n'appartiennent qu'à lui, et que la donnée de l'un d'eux définit donc le point auquel il appartient, nous pouvons aussi dire que i_M et $i_{M'}$ coïncident.

Bien entendu, M et M' peuvent coïncider en plusieurs instants, et même en une infinité. Comme chacun des deux instants est alors unique en fonction de l'autre, le lien entre les parties de leurs histoires respectives en lesquelles ils coïncident est une bijection.

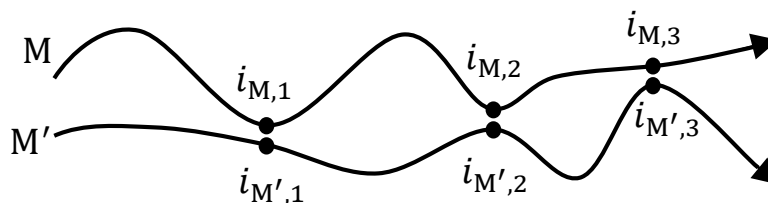


Fig. 3 : les parties des histoires de M et M' sur lesquelles ces deux points coïncident sont en bijection.

Supposons que l'instant personnel i_M coïncide avec l'instant personnel i_N , et que i_N coïncide également avec i_P . Alors les instants personnels i_M et i_P coïncident eux aussi. La relation de coïncidence entre instants personnels, dont nous avons posé plus haut qu'elle est symétrique, est également transitive. Comme tout instant personnel coïncide avec lui-même, elle est également réflexive. C'est donc une relation d'équivalence dont nous appelons **instants locaux** les classes.

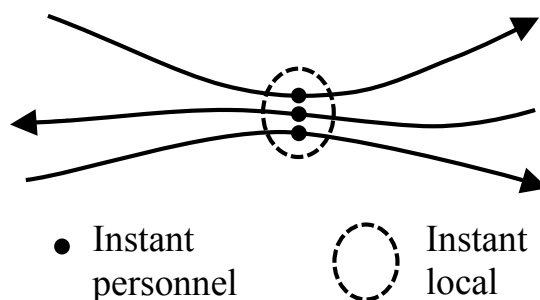


Fig. 4 : Instants personnels et instant local

Au lieu de dire que l'instant personnel i_M appartient à l'instant local i , il est plus parlant de dire que M , à l'instant i_M de son histoire personnelle, **participe, assiste, ou prend part** à i .

La première expérience ayant pour instrument les points historicisés est celle de la coïncidence (et donc de la non-coïncidence). Elle permet de construire ce que nous appellerons des **instants locaux**.

Coïncider, c'est être au même lieu au même instant local. Les instants locaux sont donc tout autant des **lieux instantanés**. Infiniment petits à la fois dans leur dimension temporelle et dans leur dimension spatiale, ce sont les plus petites entités possibles intervenant en cinématique. Ils sont des « atomes » d'espace-temps, et nous pouvons encore les appeler, comme la relativité restreinte, **événements**, car ils sont la même chose, mais avec cette différence que les événements relativistes sont traditionnellement installés dans un cadre cinématique très largement préconstruit, où chaque espace galiléen possède déjà sa géométrie et sa chronométrie, et où seule se pose encore la question des passages de coordonnées d'un espace à un autre, tandis que du

point de vue de la fondation sur l'instrument et l'expérience les instants locaux sont, avec les points historicisés, les briques premières à partir desquelles doit être construite la cinématique.

.....

4 – L'ORDRE CHRONOLOGIQUE

Il n'a sans doute pas échappé au lecteur que dans les deux figures précédentes, nous avons représenté les histoires des points par des lignes terminées par une flèche – des lignes orientées selon la « flèche du temps ». Il a pu se demander dans quelle mesure cette flèche, qui correspond à une réalité dont nous connaissons tous l'opiniâtreté, n'infirme pas notre position de ne pas faire du temps un réel « en soi ». Si ce n'est pas le cas, en effet, comment comprendre ce mystérieux « sens du temps » selon lequel il se déroule ?

Imaginons que i_1 soit « le chat, en sautant sur la table, a fait tomber un verre à pied » et que i_2 soit « le verre en question s'est brisé sur le sol ». J'aurai beau assurer avec des trémolos de sincérité dans la voix que i_2 est antérieur à i_1 , personne ne me croira, parce qu'une telle affirmation contredit le lien de causalité entre les deux événements. Si j'avance à l'appui de mes dires un film montrant la scène dans cet ordre, le verre s'écrasant au sol, puis le chat qui le fait tomber alors qu'il est intact, on croira à un montage, ou à l'extrême rigueur à un bug du logiciel de la caméra. En matière d'arbitrage chronologique, le critère du lien de causalité l'emporte sur tout autre.

Ce serait déroger au principe de minimalité que de fonder le temps chronologique sur une base double, ou plutôt duelle : il n'y a pas d'une part un « temps » qui se déroulerait selon un certain sens, et d'autre part des liens de causalité qui – par un étonnant miracle – auraient toujours lieu dans le sens de déroulement de ce temps, il n'existe rien d'autre que des liens de causalité, à partir desquels nous construisons l'ordre chronologique premier indispensable aux expériences de géométrie et de chronométrie.

Ce temps premier, donc, s'identifie avec le lien causal. Pourtant, pourrait-on être tenté d'objecter, il existe des événements qui sont l'un antérieur à l'autre, et entre lesquels il semble n'exister aucun lien de causalité. Ainsi, l'instant i_1 de la vie d'un papillon où il se pose sur une fleur, le matin, et l'instant i_2 , le soir, où il est dévoré par un oiseau.

C'est oublier qu'à l'instant i_1 le papillon aurait tout aussi bien pu se faire manger, et qu'il n'aurait alors pas pu l'être à l'instant i_2 . Le lien causal est ici « en creux », il n'en existe pas moins.

Le lien causal peut être direct, comme dans l'exemple du papillon, mais il peut être aussi porté par une multiplicité de vecteurs successifs : de i_1 à i_2 un papillon, de i_2 à i_3 une araignée, et ainsi de suite. L'évènement se déroulant en i_3 dépend de celui se déroulant en i_2 , qui dépend de celui se déroulant en i_1 ; donc il dépend lui-même de celui se déroulant en i_1 . Autrement dit, la relation « être antérieur à » possède la propriété mathématique de la transitivité – ce qui, sans l'identification du temps chronologique avec le lien causal, reste bien mystérieux.

Nous comprenons également qu'elle soit antisymétrique. Si les instants locaux distincts i_1 et i_2 sont tels que i_1 soit antérieur à i_2 et i_2 antérieur à i_1 , une chaîne de points historicisés peut faire l'aller-retour $i_1 i_2 i_1$ dans le délai nul séparant i_1 et i_1 ; comme aucune « vitesse » (pour le moment notion naïve, impossible à définir rigoureusement) ne peut être infinie, $i_1 = i_2$.

En somme, c'est parce qu'il n'est rien d'autre que l'expression du lien causal physique que le classement chronologique est une relation d'ordre.

La deuxième expérience relative au point historicisé est le repérage du lien causal. Elle construit l'ordre chronologique.

Mathématisons cet **ordre chronologique global**. L'histoire de chaque point historicisé se déroule dans un temps séquentiel, non mesuré, qui est son **ordre chronologique personnel**. Mathématiquement parlant, son histoire personnelle est un ensemble ordonné, par une relation d'ordre totale : étant donné deux instants personnels i_M et i'_M d'un même point historicisé M , on a toujours $i_M <_M i'_M$ ou bien $i_M = i'_M$ ou bien $i_M >_M i'_M$.

Les ordres chronologiques personnels se prolongent à l'ensemble des points historicisés en un **ordre chronologique** global, ou tout simplement un ordre chronologique. L'opération peut se faire en deux temps. On définit d'abord l'**antériorité directe** : deux instants locaux i et i' sont le premier directement antérieur au second s'il existe un point historicisé M dont un des instants personnels i_M appartient à i et un autre instant personnel i'_M appartient à i' , avec i_M strictement antérieur à i'_M dans l'histoire de M .

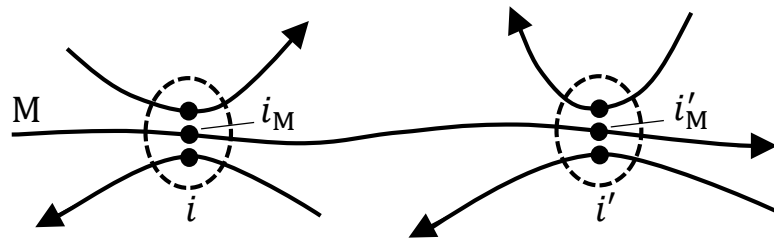


Fig. 4 : $i_M <_M i'_M$ donc $i < i'$

Puis on définit l'**antériorité** dans sa forme générale : deux instants locaux i et i' sont tels que i est antérieur à i' s'il existe une suite i_1, i_2, \dots, i_n d'instant locaux telle que chacun d'eux soit directement antérieur à son successeur, que $i_1 = i$ et que $i_n = i'$.

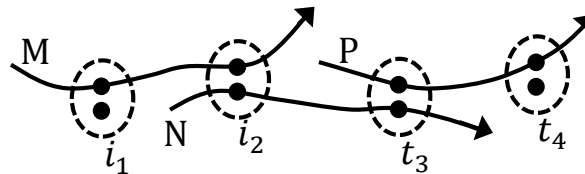


Fig. 5 : $(i_1 <_M i_2 \text{ et } i_2 <_N i_3 \text{ et } i_3 <_P i_4)$ donc $i_1 < i_4$

Cet ordre chronologique global n'est évidemment pas un ordre total : deux instants locaux i et j peuvent être tels qu'aucun des deux ne soit antérieur à l'autre.

.....

5 – HOMÉOMORPHISME DES HISTOIRES PERSONNELLES AVEC LA DROITE RÉELLE ORDONNÉE

Que les points historicisés soient infiniment petits nous conduit à ce que leurs instants soient infiniment brefs : la mesure des durées – qui n'est pas du ressort du noyau premier, mais qu'il nous faudra bien installer – peut en effet être ramenée à l'observation de la course cyclique d'un point, laquelle est divisible en parties aussi fines qu'on voudra.

Dès lors, entre deux instants personnels i_1 et i_2 de l'histoire d'un point historicisé, il est difficile d'échapper à l'idée qu'il y en a toujours un troisième, effectif ou virtuel, i_3 . En acceptant ce postulat, l'intervalle $]i_1, i_2[$ est un ensemble infini totalement ordonné.

Il se laisse cependant décrire avec la précision qu'on voudra par une suite d'instant finie mais suffisamment dense. En termes mathématiques, c'est un ensemble infini totalement ordonné ayant une partie dénombrable partout dense. L'impossibilité expérimentale de discerner des instants suffisamment proches fait qu'on ne peut discerner cet ensemble de son complété topologique, qui est bien plus commode à utiliser, et qui est isomorphe à un intervalle $]a, b[$ de la droite réelle. L'histoire d'un point historicisé, en postulant qu'elle n'a ni alpha ni oméga, est ainsi, par élargissements successifs, isomorphe à la droite réelle tout entière.

Les diverses bijections croissantes qui réalisent cet isomorphisme sont par théorème continues : elles respectent les notions de voisinage et de limite. Elles sont ce qu'on appelle des homéomorphismes. Les histoires des points, pour l'ordre comme pour la topologie, sont identiques à la droite réelle. Bien évidemment, elles ignorent la notion de durée. On peut rétrécir ou dilater telle ou telle partie de cette droite, elle conserve exactement son ordre et sa topologie.

.....

6 – L'INÉVITABLE « PÉCHÉ ORIGINEL » DE LA PHYSIQUE

Nous avons installé plus haut les points comme étant infiniment petits. L'idée n'est ni nouvelle ni originale, puisqu'elle remonte à la nuit des balbutiements des mathématiques, et qu'elle est aujourd'hui le fait de « toutes » les géométries (euclidienne, hyperbolique, elliptique, affine, projective, différentielle ...). Nous venons de voir qu'il en découle que les instant aussi eux aussi doivent être infiniment petits. Tel est bien le cas en relativité galiléenne, en non-relativité newtonienne, en non-relativité lorentzienne, en relativité restreinte, en relativité générale. En fait, on constate que dès qu'un édifice mathématique prétend représenter le réel cinématique avec pertinence, il est fondé sur des points et des instants infiniment petits.

À l'appui de cette conception vient un argument qui a longtemps paru très convaincant, celui que tant que les longueurs et les durées ont une certaine taille, on peut les diviser – au moins par la pensée – en éléments plus petits. Ainsi Pascal, dans sa célèbre méditation sur les deux infinis, l'infiniment grand et l'infiniment petit, dit de ce qu'on croyait à l'époque être le plus petit animal de la création, le ciron, qu'il « offre dans la petitesse de son corps des parties incomparablement plus petites, des jambes avec des jointures, des veines dans ces jambes, du sang dans ces veines, des humeurs dans ce sang, des gouttes dans ces humeurs, des vapeurs dans ces gouttes » et que, allant plus loin dans l'infiniment petit, on peut y voir « une infinité d'univers, dont chacun a son firmament, ses planètes, sa Terre... »

Il est certes mathématiquement vrai que nous pouvons grâce à une homothétie convenable faire tenir jusqu'au moindre détail un amas de galaxies à l'intérieur d'un atome. Mais depuis Pascal nous avons réussi une prodigieuse exploration de l'infiniment petit, et nous savons qu'il est constitué de ces objets indivisibles que sont les particules, dont la taille, si tant est que cette notion puisse avoir un sens clairement défini, ne peut de toute façon pas être nulle. Du coup, l'hypothèse de la

C'est en vain qu'on essaierait d'évacuer le problème en donnant aux points et aux instants une certaine épaisseur, en utilisant par exemple des fonctions de répartition. Ces représentations auraient également leurs points caractéristiques, définis avec une précision infinie ridiculement hors de propos.

divisibilité à l'infini de l'infiniment petit, qui pouvait à l'époque aller de soi, perd sa légitimité, et l'infinie immensité qui en est le corollaire n'est qu'une vue de l'esprit, un mirage engendré par la superposition au réel d'un continuum fait de points infiniment petits.

L'assertion qu'étant donné une longueur non nulle, on peut toujours trouver une longueur par exemple deux fois plus courte, est donc pour le moins discutable. Dans le monde ordinaire, elle s'applique à des longueurs effectives, pouvant être représentées par des objets, et sa validité est parfaite. Mais lorsqu'on s'avance suffisamment loin dans l'infiniment petit, on peut croire qu'elle finit par ne concerner que des longueurs non représentées, hors de propos, étrangères à la réalité du domaine exploré

N'empêche, c'est une assertion qui a de la force intuitive. C'est un fait que nous avons le plus grand mal à nous représenter le réel autrement qu'en utilisant des longueurs divisibles à l'infini – c'est-à-dire à penser l'infiniment petit autrement que selon une géométrie semblable à celle observée à notre échelle.

La difficulté n'est pas seulement d'ordre psychologique. Elle est aussi d'ordre mathématique. Si nous devons fonder la cinématique sur des entités premières non infiniment petites et cependant considérées comme indivisibles, telles des petits cailloux posés côte à côte, nous serions conduits à des structures numériques discontinues (du type $\varepsilon\mathbb{Z}$) qui nous poseraient des problèmes inextricables. Nous perdriions la division et avec elle des notions comme la vitesse, l'accélération ou les rapports de longueur ; il nous faudrait donc dire adieu aux lois de la mécanique et au théorème de Thalès. Nous perdriions aussi la racine carrée et avec elle le théorème de Pythagore et le coefficient γ de la cinématique lorentzienne. Nous perdriions la notion de limite, de continuité, de dérivée, et toutes les fonctions élémentaires, le sinus, le logarithme, l'exponentielle. Nous perdriions les équations différentielles et le calcul intégral. Nous serions pour ainsi dire privées de tout. L'outil des nombres réels nous est indispensable pour penser mathématiquement l'espace et le temps, et nous impose son corollaire, l'acceptation de longueurs et de durées si petites qu'on peut raisonnablement douter qu'elles correspondent à quoi que ce soit.

Ainsi, le premier pas d'une axiomatisation de la cinématique respectant l'exigence de fondation sur l'instrument est l'expérience, le premier pas sans lequel aucune expérience ultérieure ne pourra être

faite, est *nécessairement* de nous accorder des points et des instants théoriques dont la précision infinie non seulement outrepassa et outrepassera toujours infiniment ce que ce que l'*expérience* nous permettra jamais d'atteindre. Nous n'avons pas le choix, et nous y gagnons beaucoup, puisque nous disposerons d'un outil mathématique efficient. Mais

Dans le domaine temporel, le manque de pertinence des instants infiniment petits rejoint le concept de durée, au sens que Bergson donne à ce mot, cette indivisibilité intime du mouvement et du changement. Nous croyons représenter l'objet en mouvement en l'immobilisant en des instants successifs i_1, i_2, \dots, i_n , mais nous n'y parvenons pas, ou alors de façon très fallacieuse, puisque le mouvement est quelque chose dont la substance même est perdue dès qu'on l'immobilise pour l'observer.

nous y perdons aussi quelque chose : en installant ces points et ces instants infiniment aigus, et par là hors du réel, nous infléchissons notre volonté première de construire un modèle totalement pertinent de l'espace et du temps. Le pouvoir infini de séparation que nous nous attribuons n'a aucun sens dans le réel, ne correspond à rien que nous puissions atteindre concrètement.

Nous commettons ainsi un « péché originel » qui nous suivra où que nous allions et quoi que nous fassions. Des premiers pas de la physique jusqu'à son achèvement, si tant est qu'il soit possible de l'atteindre, nous traînerons avec nous ces nombres « réels » à la précision infinie vertigineusement et ridiculement trop grande, capables de leurrer leur monde au point de faire croire à un Pascal qu'il y dans un atome assez de place pour loger une infinité d'univers.

Ainsi nos règles à mesurer – quand nous les aurons construites – seront supposées graduées avec des nombres réels, ce qui revient à remplacer la matière effective par une « matière du géomètre » homogène, lisse et continue, qui n'a pas d'existence concrète. Elle n'en a pas moins une *nécessaire existence logique*, à l'intérieur du modèle théorique, imposée par l'emploi de ces nombres.

De même, nous traînerons avec nous un temps mathématiquement parfait, inexorablement nécessaire à la mathématisation, mais dont la pertinence est de plus en plus douteuse quand on descend dans l'infiniment bref. Cette distorsion doit aussi concerner l'ordre chronologique. Si tel est bien le cas, il n'y a rien d'invraisemblable à ce que dans l'infiniment bref nous voyions certains liens de causalité « remonter le cours du temps » –

contrairement à la construction même du temps chronologique. La chose ne paraît impossible que si l'on fait du temps décrit par des nombres réels un existant en soi, et pas une construction certes nécessaire mais que ces nombres grèvent d'un inexorable défaut de pertinence.

Nous ne pouvons pas éviter ce « péché originel », pas plus que sa cohorte de conséquence. Tout ce que nous pouvons faire, c'est de ne pas en rajouter. De limiter la chose à sa plus petite émergence possible. Les points historicisés infiniment petits, aux instants personnels infiniment courts, et dont l'histoire personnelle est ordonnée selon le lien causal, ne doivent avoir d'autres attributs que ceux-ci.

En particulier, aucun ne peut avoir de « masse ». Le point matériel est certes un objet commode, mais ce n'est qu'une approximation qui n'est jamais totalement valide. Seuls des objets de mesure non nulle peuvent avoir une masse, qui n'est définissable qu'au travers des instruments et des expériences qui permettent de l'atteindre.

De même, aucun point historicisé ne peut être doté de la vertu magique de délivrer un temps régulier : ce ne sont pas des horloges, car aucune horloge ne peut être ponctuelle.

Les points historicisés ne devront jamais avoir d'autres attributs que ceux de réaliser *un marquage infiniment précis des événements et de l'ordre dans lequel ils s'enchaînent*.

.....

7 – RÉSUMÉ ET AXIOMATISATION DU NOYAU PREMIER

Résumé et axiomatisation

L'instrument du noyau premier est le *point historicisé*, qui dispose d'une *histoire* faite d'*instants personnels*. Sur le plan de la modélisation mathématique, il revient au même de dire que le point

historicisé est un ensemble d'instantan personnels, tous distincts de ceux des autres points historicisés.

Axiome NP1 : L'ensemble des instantan personnels d'un point historicisé est muni d'un ordre total, appelé ordre chronologique personnel, qui le rend isomorphe à l'ensemble ordonné des nombres réels.

La première expérience que le point historicisé permet de réaliser est celle de la coïncidence, encore appelée simultanéité locale.

Axiome NP2 : La relation de coïncidence, définie parmi les instantan personnels des points historicisés, est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont les *instantan locaux*.

La deuxième expérience associée au point historicisé est le repérage de l'ordre chronologique.

Un instant local i_1 est *directement antérieur* à un instant local i_2 s'il existe un point historicisé M ayant dans son histoire personnelle un instant $i_{M,1}$ appartenant à i_1 et un instant $i_{M,2}$ appartenant à i_2 , tels que $i_{M,1}$ soit antérieur à $i_{M,2}$.

Si la suite finie d'instantan locaux i_1, i_2, \dots, i_n est telle que chacun de ses termes soit directement antérieur au suivant, sans pour autant que d'un pas à l'autre cette antériorité soit nécessairement assumée par le même point historicisé, nous disons que i_1 est *antérieur* à i_n . Cette relation est le *prolongement à l'ensemble des instantan locaux des ordres chronologiques personnels*.

Axiome NP3 : Le prolongement à l'ensemble des instantan locaux des ordres chronologiques personnels est une relation d'ordre (stricte ou large selon que les ordres chronologiques personnels sont pris au sens strict ou au sens large).

Vérification de consistance

Appelons « point historicisé » une quelconque application continue M de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^3 , « instant personnel » de M un quelconque

couple (M, t) , où $t \in \mathbb{R}$, « histoire personnelle » de M l'ensemble $\{M\} \times \mathbb{R}$.

Posons que (M, t) et (M', t') coïncident si et seulement si $t = t'$ et $M(t) = M'(t)$, et ordonnons selon la valeur de t l'histoire personnelle de M .

Il est immédiat que les trois axiomes sont vérifiés, et cela prouve la consistance de cette axiomatisation du noyau premier. Remarquons que le modèle ainsi construit diffère profondément de celui que nous croyons être correct, puisque c'est un modèle du temps absolu et de l'espace absolu. Mais au niveau de la vérification de consistance, c'est sans importance : il nous suffit en effet d'exhiber *un* modèle mathématique, et nous prenons le plus simple qui nous tombe sous la main.

Il n'aurait toutefois guère été plus compliqué de faire cette vérification dans un cadre relativiste, qu'il soit galiléen ou lorentzien. Les axiomes qui viennent d'être posés sont valides dans les quatre cadres obtenus en croisant les alternatives relativiste/non relativiste et galiléen/lorentzien.

.....
.....
.....

Table des matières

1 – ARCHITECTURE DU NOYAU DE LA CINÉMATIQUE	2
La géométrie précède la chronométrie	2
La construction de la géométrie requiert cependant certaines notions temporelles premières.....	3
Architecture du noyau de la cinématique.....	5
2 – L'INSTRUMENT DU NOYAU PREMIER : LE POINT HISTORICISÉ	6
Le point historicisé	6
Points de l'espace et points des objets	7
Points effectifs et points virtuels	8
3 – LES INSTANTS LOCAUX	9
4 – L'ORDRE CHRONOLOGIQUE	11
5 – HOMÉOMORPHISME DES HISTOIRES PERSONNELLES AVEC LA DROITE RÉELLE ORDONNÉE	14
6 – L'INÉVITABLE « PÉCHÉ ORIGINEL » DE LA PHYSIQUE.....	15
7 – RÉSUMÉ ET AXIOMATISATION DU NOYAU PREMIER.....	18
Résumé et axiomatisation.....	18
Vérification de consistance	19