

Les thèmes leibniziens de la solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace

Introduction

Le problème de l'espace

- Une thématique générale
- Cartographie de la notion d'espace chez Hermann Weyl
- Nature ontologique et épistémologique du problème de l'espace

La dualité du proche et du lointain, Fern-geometrie et Nahe-geometrie

- Présentation générale de la dualité chez Riemann-Weyl.....
- Exemple de la sphère
- Stratification de l'espace « en patchwork » de Weyl
- Parenthèse historique : Qu'est-ce qui est propre à Weyl dans cette construction ?

La dualité du proche et du lointain comme moyen pour concilier l'idéalisme transcendantal avec le caractère dynamique de la métrique einsteinienne

- La théorie de la relativité met en question l'idéalisme transcendantal.....
- Les oppositions apparentes au sein de la position épistémologique de Weyl.....
- La dualité du proche et du lointain pour sortir de l'aporie

Les thèmes leibniziens de la solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace **Erreur ! Signet non défini.**

- Caractère relatif de l'espace
- Le caractère « monadique » de la notion de sujet de Weyl.....
- Conception de l'Univers-bloc : idéalité du devenir
- Le principe de continuité leibnizien : L'épistémologie de la physique rejoint l'épistémologie des mathématiques dans le programme de la Nahe-geometrie.....

Conclusion

- La solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace.....
- Les traits leibniziens
- Après Hermann Weyl... ?

CEPERC, Aix-en-provence, 12 mai 2009

Julien Bernard,

ju_bernard@yahoo.fr

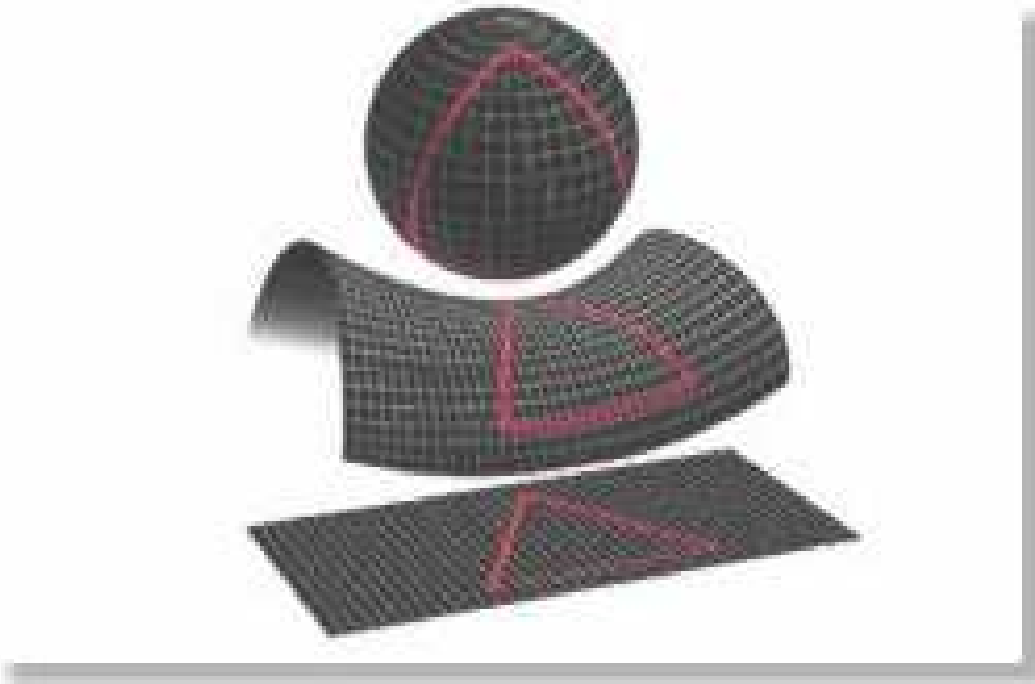
www.philo-bernard.fr

Les thèmes leibniziens de la solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace, CEPERC 12 mai 2009

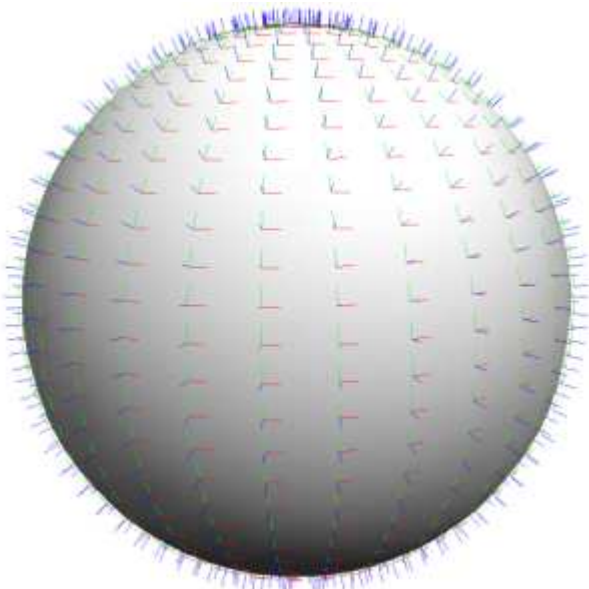
Cartographie de la notion d'espace chez Hermann Weyl

	Sphère mathématique		Sphère physique	Sphère phénoménale
	Proche	Lointain		
Strate topologique	Topologie de \mathbb{R}^4	Variété 4-dimensionnelle	Topologie du cosmos (question des fantômes...)	?
Strate affine	Espace vectoriel \mathbb{R}^4	Connexion affine : Γ_{jk}^i	Lignes droites (trajectoires des corps et de la lumière)	?
Strate conforme	Classe d'équivalence de formes quadratiques	« Connexion conforme » : On dispose d'un champ de formes quadratiques g_{ij} (définies à un facteur positif λ près, c'est-à-dire à une « homothétie » près)	Trajet des « rayons lumineux ».	?
Strate métrique	Forme quadratique (Pythagore)	« Connexion métrique » (sans torsion) : Les connexions. Alors, les Γ_{jk}^i dérivent de champs : g_{ij} et φ_i . Alors non seulement les g_{ij} associés aux Γ_{jk}^i nous donnent comment les directions liées à deux points voisins se connectent entre elles, mais les φ_i associés aux Γ_{jk}^i nous donnent comment les longueurs liées aux deux points sont reliées entre elles.	Trajet des corps massifs.	?

Les thèmes leibniziens de la solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace, CEPERC 12 mai 2009



Exemples d'espaces-« patchwork » reconstitués en « cousant » entre eux des espaces infinitésimaux



Exemple de la sphère

Les thèmes leibniziens de la solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace, CEPERC 12 mai 2009

Les textes d'*Espace-temps-matière* sont cités d'après la traduction anglaise de la 4^{ème} édition

Texte 1 **Analyse mathématique du problème de l'espace, texte de clôture de la période d'*Espace-temps-matière***

Ce volume contient quasi littéralement les leçons que j'ai tenu au printemps 1922 à l'institut d'études catalanes de Barcelone [...] Considérez principalement cette petite monographie comme un complément d'*Espace-temps-matière* (5^{ème} édition 1923).

Analyse mathématique du problème de l'espace(1923), Préface de l'auteur

Texte 2 **La thématique du problème de l'espace**

Nous avons donc à différencier trois (choses) : 1. L'espace, ou plus généralement, s'y on y ajoute le temps, *le milieu extensif du monde extérieur*, 2. sa *structure métrique*, 3. son *contenu* [erfüllung] *matériel* avec ses *quale* [en latin dans le texte] changeants d'un endroit à un autre. Le problème philosophique de l'espace consiste d'abord en cela : saisir correctement les différences et les relations mutuelles entre ces trois moments au sein de la réalité effective, ainsi que leur rôle au sein de la construction [Aufbau] de cette réalité effective. C'est par exemple une question controversée (de savoir) si vraiment, comme le veut Kant, la juxtaposition spatiale n'est que la forme de l'intuition, irréductible à rien d'autre, et devant être simplement acceptée dans sa nature mystérieuse ; ou si cette forme, artificiellement opposée au contenu [inhalt] qualitatif, est un fétiche qui ne tient pas face à une analyse psychologique plus exacte ; ou (enfin de savoir) s'il est correct de parler d'un unique espace intuitif ou (plutôt) de différents espaces sensoriels (Espace tactile, espace visuel), etc. Par ailleurs, en philosophie, il s'agit de comprendre l'origine et la signification métaphysiques de l'espace [;]Si on vise cette fin très haute, comme le fait volontiers le métaphysicien, le plus impatient d'entre les scientifiques, alors on voudra comprendre avant tout la nécessité de l'espace et sa particularité, à partir des idées de la réalité effective données à la conscience. La nature du savoir géométrique et le caractère apparemment ou véritablement *a priori* des réflexions philosophiques à son sujet fournit un problème particulier à la théorie de la connaissance. Comment se fait-il qu'un si grand pouvoir de conviction soit inhérent aux propositions géométriques, même pour celle pour laquelle nous n'avons mis en place aucune expérience concernant sa justesse, ou aucune qui soit tout à fait suffisante? La célèbre *Critique de la raison pure* de Kant prend sa source dans ces problèmes.

Analyse mathématique du problème de l'espace, 1923

Texte 3 **Le véritable cœur de la théorie de la relativité générale : la découverte du caractère dynamique de la métrique**

« Ayant introduit la forme métrique fondamentale [...], nous pouvons formuler les lois de la nature, de telles sortes qu'elles soient invariantes pour n'importe quelles transformations de coordonnées ; c'est une possibilité d'existence mathématique et non pas un caractère distinctif de ces lois. On fait un nouveau pas quand on admet que la métrique d'univers n'est pas donnée a priori, mais que la

Les thèmes leibniziens de la solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace, CEPERC 12 mai 2009

forme quadratique qui la représente dépend de la matière par des lois invariantes aussi. Ce n'est que lorsque ce pas est franchi qu'on s'est élevé à une théorie qui mérite vraiment le nom de théorie de la relativité générale. Elle permet alors de résoudre le problème de la relativité du mouvement. [...] Et ce n'est que si nous admettons cette théorie que la gravitation apparaîtra comme une émanation du champ métrique, car nous savons par l'expérience que la gravitation est conditionnée par la répartition des masses (loi d'attraction de Newton). C'est moins dans la condition d'invariance générale, que dans cette nouvelle étape, que nous paraît être le noyau de cette théorie de la relativité généralisée. »

Espace, Temps, Matière, p198

Texte 4, L'espace : une forme homogène

« L'espace, comme le temps, est une forme des phénomènes. [...] Pourvu que les conditions subjectives soient satisfaites, la chose matérielle donnée nous ressemblera après [un quelconque] déplacement exactement identique à ce qu'elle était auparavant. »

Espace, temps, matière, p11

« Tout comme le temps est la forme du flux de conscience, [...] l'espace est la forme de la réalité matérielle extérieure. [...] C'est-à-dire, toute chose matérielle peut, sans changer de contenu, occuper une position dans l'espace différente de l'actuelle. Cela nous donne immédiatement la propriété d'homogénéité de l'espace qui est la clef du concept de congruence. »

Espace, temps, matière, p7

Texte 5 La « prophétie » de Riemann

« [...]une grandeur de dimensions multiples est susceptible de différents rapports métriques[...] il s'en suit nécessairement de là que les propositions de la géométrie ne peuvent se déduire des concepts généraux de grandeur, mais que les propriétés, par lesquelles l'espace se distingue de tout autre grandeur imaginable de trois dimensions, ne peuvent être empruntées qu'à l'expérience. » « [...] La question de la validité des hypothèses de la géométrie dans l'infiniment petit est liée avec la question du principe intime des rapports métriques dans l'espace. Dans cette dernière question, que l'on peut bien encore regarder comme appartenant à la doctrine de l'espace, on trouve l'application de la remarque précédente, que, dans une variété discrète, le principe des rapports métriques est déjà contenu dans le concept de cette variété tandis que, dans une variété continue, ce principe doit venir d'ailleurs. Il faut donc, ou que la réalité sur laquelle est fondée l'espace forme une variété discrète, ou que le fondement des rapports métriques soit cherché en dehors de lui, dans les forces de liaison qui agissent en lui. »

B. Riemann, *Des hypothèses qui servent de fondement à la géométrie*

Les thèmes leibniziens de la solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace, CEPERC 12 mai 2009

Texte 6

« La vérité ne se tient pas dans l'espace comme dans une « caserne à loyers » formée de bâtiments alignés rectangulairement de façon homogène et devant laquelle tous ces différents jeux de force pourraient passer tout en l'ignorant(;) mais elle s'y tient au contraire comme l'escargot construit[baut] et agence [gestaltet] lui-même la matière de sa maison. Un corps qui est parvenu à une figure d'équilibre sous l'influence d'un champ de force, devra modifier sa forme [Gestalt], sitôt qu'il est poussé par un champ de force à une place du champ différemment constituée. Si le champ de force est toutefois produit par le corps lui-même, alors il l'emmènera lors de sa modification de place, et l'équilibre existant du corps + champ de force se maintiendra. Une tôle flexible qui convient exactement sur une portion d'une surface courbée, ne pourra pas en général être déplacée sur la surface de telle sorte qu'elle se moule constamment sur elle ; mais sa libre mobilité lui est redonnée, aussitôt que la surface courbée n'est pas retenue, mais peut être emmenée par la tôle. La libre mobilité des corps dans le champ métrique, malgré son inhomogénéité, est assurée exactement de la même manière lorsque le champ métrique est produit à partir de la matière et se modifie avec elle. »

Analyse mathématique du problème de l'espace, 7^{ème} leçon, p45

Texte 7 **La Nahe-geometrie a pour corrélat physique une ontologie des champs**

« Nous devons considérer ces lois d'actions de proximité [les équations de Maxwell] comme la véritable expression de l'uniformité d'action dans la nature, tandis que nous considérons [les équations de Coulomb] comme n'étant qu'une simple dérivation mathématique de celle-ci. A la lumière des lois exprimées par [les équations de Maxwell], qui ont une signification intuitive simple, nous pensons avoir *compris* la source des lois de Coulomb. En faisant cela, nous tirons une révérence aux diktats de la théorie de la connaissance. Même Leibniz formulait le postulat de continuité, de l'action infiniment proche, comme un principe général, et ne pouvait pas par là être en accord avec la loi de gravitation de Newton, qui implique l'action à distance et est en tout point similaire à la loi de Coulomb. La clarté mathématique et la signification simple des lois [de Maxwell] sont des facteurs additionnels à prendre en compte. Dans la construction des théories physiques, nous remarquons incessamment qu'une fois que nous avons réussi à mettre en lumière l'uniformité d'un certain groupe de phénomène, cela doit être exprimé dans des formules d'une harmonie mathématique parfaite. Après tout, du point de vue physique, la théorie de Maxwell dans sa dernière forme apporte un témoignage constant de la fertilité impressionnante qui a résulté du passage de la vieille idée de l'action à distance, à celle moderne de l'action de proximité. »

Espace-temps-matière, §9, p66

Texte 7 **Déplacement de la frontière entre a priori et a posteriori, le passage à un « idéalisme transcendantal de proximité »**

Les thèmes leibniziens de la solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace, CEPERC 12 mai 2009

« nous savons que la gravitation dépend de la matière, cette conception a pour conséquence que le champ de direction et, par là aussi, la structure métrique du monde fondant ce champ de direction, sont dans une dépendance causale vis-à-vis de la matière.

Mais en outre, Einstein retient de cela que la structure métrique du monde est toujours de telle sorte qu'elle a (déjà) supposé notre géométrie infinitésimale métrique générale. On ne niait pas absolument par là qu'il y ait quelque chose d'*a priori* dans la structure du milieu extensif du monde extérieur, seulement la frontière entre l'*a priori* et l'*a posteriori* était placée à un autre endroit. En effet, même dans la géométrie infinitésimale métrique générale, la nature du champ métrique, (c'est-à-dire) la nature de la métrique au point P et de la connexion métrique du point P avec les points de son entourage immédiat, est la même en chaque endroit; elle est essentiellement *une* et par-là absolument déterminée, ne participant pas au vague inéliminable de ce qui occupe un endroit variable sur une échelle continue; en elle s'exprime la nature *a priori* de la structure spatio-temporelle. L'orientation mutuelle de la métrique aux différents points est par contre *a posteriori*[;] *a posteriori* c'est-à-dire fortuite en soi et capable de changements continus, dépendant du contenu matériel dans la nature, pour cela aussi jamais tout à fait exactement saisissable de manière rationnelle, mais au contraire seulement de façon approchée et à l'aide d'indications intuitives et immédiates de la réalité effective. L'espace de la vieille géométrie euclidienne doit être comparée à un cristal qui est construit à partir d'atomes égaux invariables selon l'ordre d'un réseau invariable, rigide et régulier; l'espace de la nouvelle géométrie de Riemann-Einstein (doit être comparé) à un fluide qui se compose des mêmes atomes invariables égaux les uns aux autres, mais avec une orientation et un mode de rangement élastiques, mobiles vis-à-vis des forces s'exerçant.

Analyse mathématique du problème de l'espace, 1923, 7ème leçon

Texte 9 La détermination métrique est extérieure à la notion d'espace

« La *théorie de la relativité générale*, en accord avec l'esprit de la physique moderne de l'action par contact [Nahewirkungsphysik] admet [le caractère euclidien de l'espace] seulement dans l'infiniment petit. Elle utilise donc comme métrique du monde le concept plus général de la métrique basée sur une forme quadratique *différentielle* développée par Riemann dans sa conférence d'habilitation. Mais ce qui est nouveau en principe dans cette vision, c'est que la métrique n'est pas une propriété du monde en lui-même, mais plutôt l'espace-temps comme forme des apparences est un continuum quadridimensionnel complètement informe dans le sens de l'*analysis situs*. La métrique, par contre, exprime quelque chose de réel qui existe dans le monde[...] »

Reine Infinitesimalgeometrie

Texte 10 L'espace comme forme, et l'observateur « œil-ponctuel »

« Bien que les choses soient plus compliquées en réalité, nous accepterons le système le plus simple de l'optique géométrique dont la loi fondamentale énonce que le rayon de lumière joignant un point M à un observateur en P est une ligne *géodésique*, la plus courte entre celles joignant ces deux points. Nous ne tenons pas compte du caractère fini de la propagation. Nous n'accordons à la conscience réceptrice qu'une simple faculté optique de perception et la réduisons à un « œil-observateur » qui

Les thèmes leibniziens de la solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace, CEPERC 12 mai 2009

observe immédiatement les différences de directions des rayons incidents [...] La loi de continuité gouverne non seulement l'interaction des choses physiques mais aussi les interactions psychophysiques. La direction dans laquelle nous observons les objets est déterminée non pas uniquement par leurs lieux d'occupation mais aussi par la direction du rayon qui en émerge et vient frapper la rétine, c'est-à-dire par l'état du champ optique directement en contact avec ce corps réel mais insaisissable dont l'essence est d'avoir un monde objectif qui se présente à lui sous la forme d'expérience de conscience. Qu'un contenu matériel G est le même que G' ne peut rien dire d'autre que le fait qu'à chaque point de vue P respectivement à G , il correspond un point de vue P' relativement à G' (et vice versa) tels qu'un observateur en P' reçoit la même « image des directions » que l'observateur en P .

Espace-Temps-Matière, p99