Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques

Guy P. Brousseau

Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques

Guy Brousseau

1976

Référence bibliographique de ce texte

Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. In J. Vanhamme & W. Vanhamme (Eds.), *La problématique et l'enseignement des mathématiques. Comptes rendus de la XXVIIIe rencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques* (pp. 101-117). Louvain la Neuve

Pour en savoir plus sur les obstacles épistémologiques

Le sujet de cet article a été traité à plusieurs reprises au cours des recherches de l'auteur. Ces différents textes, publiés ou non, ont été réunis en un dossier les rassemblant autour d'une présentation et de commentaires récents de l'auteur.

Le lecteur trouvera des liens vers les éléments de ce dossier : sur http://www.guy-brousseau.com

Le dossier « les obstacles épistémologiques » se trouve actuellement (décembre 2010) dans le « journal n°2 » sur ce site internet.

FICHE SIGNALÉTIQUE DE LA PREMIÈRE PUBLICATION

Origine

Texte d'une conférence exposée lors de la XXVIIIe rencontre organisée en 1976 par la CIEAEM ; Louvain-la-Neuve (Belgique)

Catégorie

Texte publié

Etat

Conditionné par l'éditeur

Titre du texte

Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques

Langue

Français

Date de production, écriture

1989

Résumé

Dans cet article, l'auteur examine et discute la reprise en didactique des mathématiques de la notion d'obstacle épistémologique forgée par Gaston Bachelard (1938). Pour cela, il met en évidence certains caractères spécifiques de cette notion, notamment le fait qu'un obstacle épistémologique soit constitutif de la connaissance achevée. Par là, l'identification et la caractérisation d'un obstacle sont essentielles à l'analyse et à la construction des situations didactiques. Ces questions sont illustrées par le cas particulier de la construction du concept de décimal.

Equipe de recherche

IREM de Bordeaux

Nom de la revue ou de l'ouvrage

La problématique et l'enseignement des mathématiques. Comptes rendus de la XXVIIIe rencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques

Sous la direction de Willy et JacquelineVanhamme

Date de publication

1976

Page

101-117

Mots-Clés

Obstacle épistémologique ; obstacle didactique ; apprentissage ; erreur ; nombres décimaux ; nombres rationnels.

Commentaire

Cet article a été publié à nouveau en 1983 dans *Recherches en Didactique des mathématiques* vol 4-2 augmenté de résultats nouveaux et de réflexions sur l'article « épistémologie des nombres relatifs de Georges Glaeser (*Recherches en Didactique des mathématiques*, 1981 vol 2-3). Puis augmenté de trois tableaux, il constitue le chapitre 2 de l'ouvrage Théorie des situations didactiques (1998) publié aux éditions La pensée sauvage.

Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques

Guy BROUSSEAU

2.3

1. Introduction

1.0 Sujet de l'étude.

Un élève ne fait pas de mathématiques s'il ne se pose et ne résoud pas de problèmes. Tout le monde est d'accord là-dessus. Les difficultés commencent lorsqu'il s'agit de savoir quels problèmes il doit se poser, qui les pose, et comment.

1.1 Conceptions classiques de la notion de problème.

Pour simplifier ces difficultés, il semble que les didacticiens des mathématiques essaient, depuis quelque temps, de projeter la collection des problèmes imaginables sur un sous-espace produit des composantes suivantes :

1.1.1 Les intentions méthodologiques du professeur. C'est la composante décrite au début du "livre du problème" de GLAESER et de ses collaborateurs (problèmes de recherches, d'entraînement, d'introduction, etc ...).

1.1.2 Les intentions didactiques et les objectifs (par ex. ceux de BLOOM) : acquisition de connaissances, meilleure compréhension, analyse, etc ... .

1.1.3 Le contenu mathématique : Presque toujours la question consiste à demander à l'élève d'établir une formule vraie dans une théorie en cours d'étude. Le contenu d'un problème est donc a priori définissable comme un couple (T, f) T étant une théorie supposée explicitée dans le cours, et f la formule à trouver, à établir ou à placer dans une démonstration de T .

Cette conception permet d'abord de placer les problèmes les uns par rapport aux autres, à condition d'avoir une axiomatique convenable de la théorie à enseigner : Les discussions sur le choix de la meilleure axiomatique sous-tendent la plupart des recherches sur les programmes depuis des années. "La meilleure axiomatique" serait celle qui permettrait avec le moins d'efforts d'apprentissage ou d'enseignement, d'engendrer la collection des théorèmes-problèmes, d'examen ou de contrôle, fixée par un consensus social.

Faut-il prévoir plusieurs théories particulières que l'on reliera ensuite (tendance "classique") , ou une théorie unitaire générale dont on déduit les autres (tendance "moderne") ? Faut-il beaucoup d'axiomes faibles et bien rangés, (DIEUDONNE : Algèbre linéaire et géométrie élémentaire) ou peu d'axiomes puissants (CHOQUET : L'enseignement de la géométrie)? . Des axiomes "évidents" ou des axiomes "très élaborés" ?

En l'absence d'une théorie convenable de la connaissance, s'appuyant sur une théorie pertinente de l'apprentissage, des discussions n'ont jamais donné lieu à des études expérimentales scientifiques.

Cette conception permet en outre de distinguer deux choses :

le couple $(T\ ,\ f)$ qui caractérise le problème, et la démonstration de $T \vdash f$, laquelle peut faire l'objet d'une étude mathématique ou métamathématique. Et cette distinction va servir de base à une nouvelle décomposition du contenu mathématique, suivant deux critères différents, mais voisins :

- le domaine d'application : (la Théorie T), opposé à la "structure" mathématique ou logique opérant sur T .
- le modèle mathématique (au sens des logiciens), opposé au langage.

Ces paires de caractères opposés correspondent à des traits distinctifs sur lesquels les enseignants s'appuient spontanément : abstrait-concret, contenu-formel, théorique-pratique, etc ... mais leur mise en oeuvre n'a jamais fourni ni de typologies utilisables, ni d'indices objectifs.

1.1.4 Composantes métamathématiques. En fait, toutes les tentatives de descriptions rationnelles et formelles des mathématiques sont utilisées pour essayer de bâtir des variables intermédiaires, qui, sans être le contenu lui-même, permettraient de l'engendrer à moindre frais.

La conception des problèmes sous la forme $T \vdash f$ conduit souvent à assimiler les hypothèses à ce qui est connu, les conclusions à ce qui est cherché (ou l'inverse) et la résolution à un cheminement qui coïnciderait facilement avec la démonstration cherchée.

Certaines démonstrations peuvent être obtenues sans coup férir par l'application d'une suite finie de spécifications connues à l'avance : il existe alors un algorithme, automate producteur de la démonstration particulière cherchée.

Dans ce cas, on peut faire la description, classique et merveilleusement simple et gratifiante pour le professeur, de l'activité cognitive de l'élève, de l'apprentissage et du rôle de l'enseignant. Le maître apprend à l'élève, qui le mémorise, l'algorithme qui permet d'établir les théorèmes.

1.1.5 La composante heuristique. Mais pour d'autres démonstrations, il n'existe pas de tels algorithmes. Pour ne pas renoncer au modèle d'acquisition précédent, on va imaginer que la démonstration peut être conduite par des "intuitions" qui joueront un peu le rôle des algorithmes. Ces intuitions pourront être rationalisées localement, lorsque la mise en oeuvre d'une théorie déjà constituée, fournira la démonstration cherchée ou une partie de celle-ci (on appliquera un théorème)- le choix des théories ou des structures étant lui-même guidé par des heuristiques, que l'on peut, après coup, invoquer pour justifier la démarche suivie. Malgré leur caractère un peu had hoc, ces concepts ne manquent pas d'intérêt, comme le montrent dans cette rencontre les exposés de G. GLAESER, de G. PAQUETTE, M. CIOSEK, F. WILSON, de C. JANVIER etc ... .

1.2 Critique de ces conceptions.

Je conteste la validitié d'une telle décomposition classificatoire, malgré les facilités qu'elle procure, parce qu'elle conduit à accepter des présupposés regrettables, en séparant des éléments qui fonctionnent ensemble.

1.2.1 Le sujet.

Le sujet- l'élève- est absent de cette analyse, où il n'apparaît que comme un récepteur, un enregistreur extrêmement simplifié que le savoir acquis ne modifie pas sensiblement, ni surtout pas structurellement.

1.2.2 La signification et le sens.

De la même façon et par voie de conséquence, la signification de la mathématique disparaît : tout ce qui fait, non pas seulement la vérité, mais l'intérêt d'un théorème et avec cela, ce que F.GONSETH [*] appelait le caractère idoine (idonéisme) d'une connaissance mathématique, ce qui fait que cette connaissance existe comme solution optimale dans le champ défini par un certain ~~nombre~~ de contraintes (relatives au sujet connaissant ou à la connaissance elle-même) , ~~ce qui en fait~~ un objet au sens de R. THOM [*] ; une solution à un problème, ~~et enfin~~ ce qui dit l'intérêt du problème lui-même.

Le sens d'une connaissance mathématique se définit-non seulement par la collection des situations où cette connaissance est réalisée en tant que théorie mathématique, (sémantique au sens de CARNAP) - non seulement par la collection des situations où le sujet l'a rencontrée comme moyen de solution, mais aussi par l'ensemble des conceptions, des choix antérieurs qu'elle rejette, des erreurs qu'elle évite ~~(j'ajouterai~~; les économies qu'elle procure, les formulations qu'elle reprend ~~et bien~~ d'autres choses font aussi partie de ~~son sens~~).

1.2.3 L'apprentissage.

La construction axiomatique suggère un apprentissage féerique où le volume des connaissances - immédiatement acquises, structurées, utilisables et transférables - gonfle dans un espace vierge. Or ...

- Une notion apprise n'est utilisable que dans la mesure où elle est reliée à d'autres, ces liaisons constituant sa signification, son étiquette, sa méthode d'activation.
- Mais elle n'est *apprise* que dans la mesure où elle est utilisable et utilisée effectivement, c'est-à-dire seulement si elle est une solution du problème. Ces problèmes, ensemble de contraintes auxquelles elle répond, constituent la signification de la notion. Elle n'est apprise que si elle "réussit" et il lui faut donc un territoire de mise en oeuvre. Ce territoire n'est que rarement général et définitif.
- Du fait de cet emploi localisé, la notion reçoit des particularisations, des limitations, des déformations de langage et de sens : - si cette conception particulière de la notion est tout de suite battue en brèche par une autre plus économique, ou plus générale, ou moins fausse,elle n'est pas apprise et ne peut donc servir à créer le sens des acquisitions ultérieures.
- si elle réussit assez bien et assez longtemps, elle prend une valeur, une consistance, une signification, un développement qui rendent de plus en plus difficile sa modification, sa reprise, sa généralisation ou son rejet : elle devient à la fois, pour les acquisitions ultérieures, un obstacle, mais aussi un point d'appui.

Ceci montre :

- pourquoi l'apprentissage ne peut se faire selon le schéma classique de l'acquisition progressive et continue (telle que pour toute acquisition, il existe une suite finie d'acquisistions apportant chacune une quantité d'information aussi petite que l'on veut et qui lui soit équivalente). Et en conséquence,
- pourquoi la confusion entre algorithme d'établissement d'une formule et algorithme d'acquisition d'un savoir est dénuée de fondement.

....

[*] renvoie à la bibliographie en fin d'article.

1.2.4 Algorithme et raisonnement.

J'ai étudié sur plusieurs exemples toutes les conséquences néfastes de cette confusion sur l'apprentissage des opérations dans N [*] .

En enseignant par les mêmes procédés, et au même âge, aussi bien une théorie sophistiquée , celle des probabilités et des statistiques, que ces prétendus "mécanismes" d'opération, je crois avoir montré que cette séparation entre mécanismes et raisonnement n'était ni nécessaire, ni même utile; l'apprentissage se fait par la mise à l'essai de conceptions successives, provisoirement et relativement bonnes, qu'il faudra rejeter successivement ou reprendre en une véritable épistémologie, nouvelle à chaque fois.

Si les conditions l'exigent, l'élève peut lui-même résumer en "automatismes" des activités complexes, en retirant du sens et des possibilités de choix à son activité. Mais pour que ces automatismes puissent être utilisés, il faut qu'ils soient mis en place par le sujet lui-même.

1.2.5 Obstacles.

Ces travaux conformes aux conceptions de BACHELARD [*] et de PIAGET [*] montrent aussi que l'erreur et l'échec n'ont pas le rôle simplifié qu'on veut parfois leur faire jouer. L'erreur n'est pas seulement l'effet de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard que l'on croit dans les théories empiristes ou behavioristes de l'apprentissage, mais l'effet d'une connaissance antérieure, qui avait son intérêt, ses succès, mais qui, maintenant, se révèle fausse, ou simplement inadaptée. Les erreurs de ce type ne sont pas erratiques et imprévisibles, elles sont constituées en obstacles. [*] . Aussi bien dans le fonctionnement du maître que dans celui de l'élève, l'erreur est constitutive du sens de la connaissance acquise.

1.3 Importance de la notion d'obstacle dans l'enseignement par les problèmes.

1.3.1 Intersections.

Nous admettrons donc que la constitution du sens, tel que nous l'entendons, implique une interaction constante de l'élève avec des situations problématiques, interaction dialectique (car le sujet anticipe, finalise ses actions) où il engage des connaissances antérieures, les soumet à révision, les modifie, les complète ou les rejette pour former des conceptions nouvelles. L'objet principal de la didactique est justement d'étudier des conditions que doivent remplir les situations ou les problèmes proposés à l'élève pour favoriser l'apparition, le fonctionnement et le rejet de ces conceptions.

On peut déduire de ce régime discontinu d'acquisitions que les caractères informationnels de ces situations doivent eux aussi varier par sauts . [*].

1.3.2 Conditions.

Dans ces conditions l'intérêt d'un problème va dépendre essentiellement de ce que l'élève y engagera, de ce qu'il y mettra à l'épreuve, de ce qu'il y investira, de l'importance pour lui des rejets qu'il sera conduit à faire, et des conséquences prévisibles de ces rejets, de la fréquence avec laquelle il risquerait de commettre ces erreurs rejetées et de leur importance.

Ainsi les problèmes les plus intéressants seront ceux qui permettront de franchir un véritable obstacle. C'est pourquoi à propos des problèmes, j'ai voulu examiner la question des obstacles en didactique.

2. La notion d'obstacle.

2.0 Obstacles épistémologiques.

Le mécanisme de l'acquisition des connaissances tel que nous l'avons décrit plus haut peut s'appliquer aussi bien à l'épistémologie ou à l'histoire des sciences, qu'à l'apprentissage et à l'enseignement. Dans un cas comme dans l'autre, la notion d'obstacle apparaît comme fondamentale pour poser le problème de la connaissance scientifique. Il faut se référer à BACHELARD qui, le premier a mis en avant cette idée.

"Il ne s'agit pas de considérer des obstacles externes comme la complexité ou la fugacité des phénomènes, ni d'incriminer la faiblesse des sens et de l'esprit humain; c'est dans l'acte même de connaître intimement qu'apparaissent par une sorte de nécessité fonctionnelle des lenteurs et des troubles ... On connaît contre une connaissance antérieure" .

2.0.1 BACHELARD étudie ces obstacles dans les sciences physiques : l'expérience première, la connaissance générale, l'obstacle verbal, l'utilisation abusive des images familières, la connaissance unitaire et pragmatique, l'obstacle substantialiste, réaliste, animiste, celui de la connaissance quantitative.

Ce sont de grands obstacles, qui ont résistélongtemps. Il est probable qu'ils ont leur équivalent dans la pensée de l'enfant. L'environnement matériel et culturel actuel a sans doute un peu modifié les conditions dans lesquelles les enfants rencontrent ces obstacles, et des études à ce sujet sont en cours (L. VIENNOT 76).

2.0.2 En mathématiques un très important travail d'épistémologie a été entrepris dans des directions voisines de celles de BACHELARD, dans l'entourage d'ALTHUSSER, par des gens comme P. RAYMOND, BADIOU, OVAERT, HOUZEL ... etc.

Il ne fournit pas pour l'instant une liste d'obstacles aussi simple que celle de BACHELARD; mais, de grands traits se dégagent ainsi que des classes d'obstacles, car la notion d'obstacle ellemême est en train de se constituer et de se diversifier : il n'est pas facile de dire des généralités pertinentes sur ce sujet, il vaut mieux faire des études cas par cas. On peut dire qu'à côté du travail de recensement et de description des grands obstacles à la *constitution* des concepts, se développent des études portant sur les caractéristiques de fonctionnement des connaissances, *à la fois comme appui* et comme obstacle (alternativement et dialectiquement).

De plus la notion d'obstacle a tendance à s'étendre hors du champ strict de l'épistémologie : en didactique, en psychologie, en psycho-physiologie etc ... .

2.1 Manifestation des obstacles en didactique des mathématiques.

2.1.1 Erreurs.

Un obstacle se manifeste donc par des erreurs, mais ces erreurs ne sont pas dues au hasard. Fugaces, erratiques, elles sont reproductibles, persistantes.

De plus ces erreurs, chez un même sujet, sont liées entre elles par une source commune, une manière de connaître, une conception caractéristique, cohérente, sinon correcte, ancienne et qui a réussi dans tout un domaine d'actions.

Ces erreurs ne sont pas forcément explicitables.

Il arrive qu'elles ne disparaissent pas radicalement, d'un seul coup, qu'elles résistent, qu'elles persistent, puis resurgissent, se manifestent longtemps après que le sujet ait rejeté de son système cognitif conscient le modèle défectueux.

Exemple : Un étudiant utilise le "théorème" suivant :"Si le terme général d'une série tend vers zéro, la série converge". Est-il distrait ? récite-t-il mal - en inversant hypothèse et conclusion- un théorème du cours ? a-t-il mal compris la notion de limite ? ou celle de série ? est-ce une erreur sur les conditions nécessaires et suffisantes ? ...

En rapprochant cette erreur de quelques autres, on comprend que de façon inconsciente, cet étudiant a fait un certain raisonnement, faussé par une représentation incorrecte des réels qui remonte à l'enseignement primaire et secondaire.

Le raisonnement est à peu près celui-ci : " Si x_i tend vers zéro, il existe un rang n à partir duquel les x_i sont négligeables, à partir de ce n on n'ajoute pratiquement plus rien, donc la série converge".

Peut-être cet étudiant n'écrirait-il pas ce raisonnement sans s'apercevoir qu'il est faux, mais il lui paraît évident, car il repose sur une pratique constante dans l'enseignement primaire et secondaire : le théorème suivant :

" $\forall x \in R$ (ou à Q) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists d \in D : | x - d | < \varepsilon$"

est interprété implicitement et parfois explicitement par :

"Dans tout calcul pratique $\exists n \in N$ tel que $\forall x \in R$, $\exists d \in D$ tel que [$|x - d| < 10^{-n} \Rightarrow (x - d)$ est "pratiquement négligeable", c'est-à-dire nul] " . (D est l'ensemble des décimaux)

Cette idée s'appuie elle-même sur une "mauvaise" définition des décimaux véhiculée depuis l'enseignement élémentaire et sur laquelle nous reviendrons plus loin.

2.1.2 Franchissement.

L'obstacle est constitué comme une connaissance, avec des objets, des relations, des méthodes d'appréhension, des prévisions, avec des évidences, des conséquences oubliées, des ramifications imprévues... Il va résister au rejet, il tentera comme il se doit, de s'adapter localement, de se modifier aux moindres frais, de s'optimiser sur un champ réduit suivant un processus d'accommodation bien connu.

C'est pourquoi, il faut un flux suffisant de situations nouvelles, inassimilables par lui, qui vont le déstabiliser, le rendre inefficace, inutile, faux, qui vont en rendre nécessaire la reprise ou le rejet, l'oubli, la scotomisation - jusque dans ses ultimes manifestations.

Aussi, le franchissement d'un obstacle exige un travail de même nature que la mise en place d'une connaissance, c'est-à-dire des interactions rejetées, dialectiques de l'élève avec l'objet de sa connaissance.

Cette remarque est fondamentale pour distinguer ce qu'est un vrai problème ; c'est une situation qui permet cette dialectique et qui la motive.

2.1.3 Caractéristiques informationnelles d'un obstacle.

Une connaissance, comme un obstacle, est toujours le fruit d'une interaction de l'élève avec son milieu et plus précisément avec une situation qui rend la connaissance "intéressante",- je veux dire "optimale" dans un certain domaine défini par des caractéristiques numériques "informationnelles" [*] de cette connaissance.

La connaissance, l'homme et le milieu étant ce qu'ils sont, il est inévitable que cette interaction aboutisse à des conceptions "erronées". Toutefois, ces conceptions sont commandées par les conditions de l'interaction qu'on peut plus ou moins modifier. C'est l'objet de la didactique.

Cette déclaration a d'importantes conséquences, d'abord pour l'enseignement : ainsi, si l'on veut déstabiliser une notion assez enracinée, il sera avantageux que l'élève puisse investir suffisamment ses conceptions dans des situations

- assez nombreuses et importantes pour lui,
- et surtout aux conditions informationnelles suffisamment

différentes pour qu'un saut qualitatif soit nécessaire.

Exemple: Un enfant de six ans sait distinguer des nombres jusqu'à 4 ou 5 à l'aide de procédés basés sur la perception. Ces procédés deviennent vite très "coûteux" et peu fiables dès que le nombre d'objets passe à 6 ou 7. Ils échouent au delà. Si l'on essaie d'enseigner dans l'ordre les nombres 6, puis 7, puis 8, on se heurte à des difficultés nombreuses et croissantes et une période de désarroi apparaît.

Au contraire, si l'on propose de comparer des collections de l'ordre de 10 à 15 objets, le modèle perceptif est si évidemment désavantageux, que l'enfant y renonce tout de suite et met en place de nouvelles stratégies (correspondance terme à terme). Ce que l'on veut appeler intuition n'est souvent que l'appréhension inconsciente des limites informationnelles des modes de connaissances.

2.2 Origine des divers obstacles didactiques.

2.2.0 Origine d'un obstacle.

Nous allons maintenant considérer les obstacles qui se présentent dans le système didactique. Ces obstacles à l'appropriation par l'élève de certaines notions peuvent être dus à plusieurs causes. Il est difficile d'incriminer seulement un des systèmes en interaction. C'est une autre conséquence de la conception de l'apprentissage évoquée ci-dessus.

La notion d'obstacle épistémologique tend à se substituer à celle d'erreur d'enseignement, d'insuffisance du sujet ou de difficulté intrinsèque des connaissances.

Toutefois, on peut distinguer des origines des obstacles didactiques : ce sera le système tel, qu'en le modifiant, on pourrait éviter l'obstacle, alors qu'aucune modification des autres systèmes ne permettrait de l'éviter.

On trouvera ainsi des obstacles didactiques

- d'origine ontogénique
- d'origine didactique
- d'origine épistémologique.

Pour l'exemple ci-dessus, (relatif à l'acquisition de la notion de nombre) nous parlerons plutôt de limitation neurophysiologique que d'obstacle.

2.2.1 Origine ontogénique

Les obstacles d'origine ontogénique sont ceux qui surviennent du fait des limitations (neurophysiologiques entre autres) du sujet à un moment de son développement : il développe des connaissances appropriées à ses moyens et à ses buts.

L'épistémologie génétique met en évidence des stades, des accommodationset des assimilations, qui à la fois, ressemblent aux étapes du développement des concepts par les lois de régulations qui les font apparaître, et en diffèrent par la nature exacte des limitations qui déterminent ces régulations.

2.2.2 Obstacles d'origine didactique.

Les obstacles d'origine didactique sont ceux qui semblent ne dépendre que d'un choix ou d'un projet de système éducatif. Par exemple, la présentation actuelle des décimaux au niveau élémentaire est le résultat d'une longue évolution dans le cadre d'un choix didactique fait par les encyclopédistes puis par la convention(conformément à une conception qui remonte à S.STEVIN lui-même) : Compte tenu de leur utilité, les décimaux allaient être enseignés à tout le monde le plus tôt possible, associés à un système de mesure, et en se référant aux techniques d'opération dans les entiers. Ainsi, aujourd'hui, les décimaux sont, pour les élèves "des entiers naturels avec un changement d'unité", donc des "naturels" (avec une virgule) et des mesures. Et cette conception, appuyée par une mécanisation de l'élève, va faire obstacle jusqu'au D.E.U.G.

Il est caractéristique que le principal facteur de discrimination des élèves dans un questionnaire récent, (IREM de Rouen) soit le calcul faisant intervenir, à la fois, des décimaux et des produits par une puissance de dix. Ainsi, c'est la"compréhension" même de la définition des décimaux qui explique les comportements des élèves. Mais actuellement, un tel obstacle est devenu à la fois didactique et socio-culturel.

2.2.3 Obstacles didactiques d'origine épistémologique.

Les obstacles d'origine proprement épistémologique sont ceux auxquels on ne peut, ni ne doit échapper, du fait même de leur rôle constitutif dans la connaissance visée. On peut les retrouver dans l'histoire des concepts eux-mêmes. Cela ne veut pas dire qu'on doit amplifier leur effet ni qu'on doit reproduire en milieu scolaire les conditions historiques où on les a vaincus.

2.3 Conséquences pour l'organisation des situations problématiques.

La conception de l'apprentissage, qui s'appuie sur l'étude du développement des connaissances en termes d'obstacles, diffère sensiblement de la conception classique, surtout en ce qui concerne le rôle et l'organisation des situations de problèmes. Et ce, d'autant plus que le problème va jouer dans les processus un rôle fondamental.

2.3.1 Motivations - conditions.

Poser un problème consiste à trouver une situation avec laquelle l'élève va entreprendre une suite d'échanges relatifs à une même question qui fait "obstacle" pour lui, et sur laquelle il va prendre appui pour s'approprier, ou construire, une connaissance nouvelle.

Les conditions dans lesquelles se déroule cette suite d'échanges sont initialement choisies par l'enseignant mais le processus doit très vite passer en partie sous le contrôle du sujet qui va "questionner" à son tour la situation. La motivation naît de cet investissement et s'entretient avec lui. Au lieu d'être un simple moteur extérieur, de frustrations en équilibrations, elle est constitutive à la fois du sujet, (de sa parole) et de sa connaissance.

Ainsi, la résolution d'un problème prendra pour l'élève l'allure d'une sorte de démarche expérimentale, l'occasion donnée à la "nature" (ici, aux concepts mathématiques) de se manifester dans ses activités.

2.3.2 Caractère dialectique du processus de franchissement d'un obstacle.

Le processus de franchissement d'un obstacle comporte nécessairement une suite d'interactions entre l'élève et le milieu; cette suite d'interactions ne prend un sens que dans la mesure où elles se rapportent à un même projet (chez l'élève) à propos d'un concept - dans la genèse duquel elles constituent une étape et dont elles fondent la signification.

Ces interactions mettent en jeu des systèmes de représentations et peuvent souvent être interprêtées comme des échanges de messages. De plus, le maître et l'élève sont capables d'anticipation et finalisent leurs actions. Celles-ci prennent en conséquence un caractère dialogique; de plus les informations échangées sont reçues comme des faits confirmant ou niant des hypothèses ou encore comme des assertions. Si l'on admet qu'une connaissance se met en place en s'opposant à une autre sur laquelle elle s'appuie et qu'elle remplace, on comprendra que nous puissions dire que les processus de franchissement ont un caractère dialectique : dialectiques de l'a priori et de l'a posteriori, de la connaissance et de l'action, du moi et des autres ... etc .

Organiser le franchissement d'un obstacle consistera à proposer une situation susceptible d'évoluer et de faire évoluer l'élève selon une dialectique convenable. Il s'agira, non pas de communiquer les informations qu'on veut enseigner, mais de trouver une situation dans laquelle elles sont les seules à être satisfaisantes ou optimales - parmi celles auxquelles elles s'opposent - pour obtenir un résultat dans lequel l'élève s'est investi.

Cela ne suffit pas : il faudra que cette situation permette d'emblée la construction d'une première solution ou d'une tentative où l'élève investira sa connaissance du moment. Si cette tentative échoue ou ne convient pas bien, la situation doit néanmoins renvoyer une situation nouvelle modifiée par cet échec de façon intelligible mais intrinsèque, c'est-à-dire ne dépendant pas de façon arbitraire des finalités du maître. La situation doit permettre la répétition à volonté de la mise à l'épreuve de toutes les ressources de l'élève. Elle doit s'automotiver par un jeu subtil de sanctions intrinsèques (et non pas sanctions extrinsèques liées par le maître aux progrès de l'élève). Elle ne peut donc pas être programmée; c'est seulement son choix qui peut l'être.

Il s'agit pour le dialecticien d'identifier en même temps qu'une étape d'un concept, une situation qui pose à l'élève une question (de l'élève) à laquelle cette étape soit une réponse "constructible" dans le système de l'élève.

Nous avons été conduits à distinguer dans le fonctionnement de l'élève trois types de questions qui commandent trois types de situations didactiques.

2.3.3 Différents types de problèmes : validations, formulations, actions,...

a) *Les questions de validation* : l'élève doit établir la validité d'une assertion : il doit s'adresser comme un sujet à un autre sujet susceptible d'accepter ou de refuser ses assertions, de lui demander d'administrer des preuves de ce qu'il avance, de lui opposer d'autres assertions. Ces échanges contribuent à faire expliciter les théories mathématiques mais aussi à mettre en place les mathématiques en tant que moyen de prouver. Il s'agit moins d'apprendre les preuves acceptées que d'éprouver celles que l'on conçoit. Une démarche de preuve est construite dans une dialectique de la validation qui conduit l'élève, successivement à user spontanément des figures de rhétorique puis à y renoncer. Les relations que l'élève doit pouvoir établir pour cela sont spécifiques de cette dialectique.[*] (voir BROUSSEAU 70) .

Un problème de validation est bien plus un problème de comparaison, d'évaluation, de rejet des preuves que de recherche de la démonstration.

b)*Les questions de formulation* : Pour ses démarches de validation, la pensée doit s'appuyer sur des formulations préalables. Les langages s'élaborent eux aussi dans des dialectiques moins spécifiques que celles de la validation. La communication (et ses contraintes) y joue un grand rôle indépendant en partie des problèmes de validité. C'est dans ce cadre que se manifestent le mieux les contraintes d'économie qui commandent les choix mathématiques judicieux.

c) *Les questions d'action* ou de décision mathématique sont celles où le seul critère est l'adéquation de la décision - le système d'élaboration de cette décision peut rester totalement implicite ainsi que sa justification. Il n'y a à ce sujet aucune contrainte ni de formulation ni de validation. C'est la dialectique la plus générale, les autres n'en sont que des cas particuliers. Elle aboutit à la construction chez le sujet de régularités, de schèmes, de modèles d'action, le plus souvent inconscients ou implicites.

2.3.4 Dialectiques et obstacles.

Bien sûr, aucune de ces dialectiques n'est indépendante des autres, au contraire.

La formulation est souvent facilitée s'il existe un modèle implicite d'action : le sujet sait mieux formuler un problème qu'il a su résoudre.

L'action est facilitée par une formulation convenable (comme l'a montré VIGOTSKY)[*] . Le langage découpe la situation en objets et relations pertinentes. L'action fournit un type de validation implicite fondamental et la formulation un autre ...

Mais inversément, chaque domaine peut faire obstacle à un progrès dans les autres. Certaines choses se font mieux qu'elles ne se disent. Les modèles implicites prennent mieux ensemble un plus grand nombre de données et sont plus souples, plus faciles à restructurer. Des conditions trop favorables à l'action rendent inutile l'explication : par exemple, tant qu'on a utilisé les systèmes sexagésimaux des babyloniens pour les calculs astronomiques, la virgule ne s'est pas imposée, ni le nom de l'unité de référence, car une erreur de 1 à 60 est impensable pour qui sait de quoi il parle.

De même un langage trop facile à manier peut bloquer longtemps une reformulation nécessaire ... (C'est l'obstacle verbal de BACHELARD).

Le franchissement d'un obstacle implique très souvent, à la fois une restructuration des modèles d'action, du langage et du système de preuves. Mais le dialecticien peut en précipiter les ruptures en favorisant la multiplication et l'alternance des dialectiques particulières.

Nous ne nous sommes que trop attardés sur des généralités. Il n'est pas possible de comprendre les rapports réciproques des obstacles et des problèmes sans une étude spécifique.

3. Problèmes dans la construction du concept de décimal.

3.1 Histoire des décimaux.

3.1.1 Il n'est pas possible dans le cadre de cet article de présenter une épistémologie des décimaux. Une telle épistémologie reste à faire. Elle est difficile à cause de l'éparpillement sur quinze ou vingt siècles des faits à prendre en considération. A chaque "étape" on croit qu'il n'y a qu'un pas à franchir mais il ne l'est pas, et c'est rarement faute d'avoir essayé. Il faut comprendre ce que ce pas avait d'inconcevable, et souvent aussi de ce qu'il faisait perdre par rapport à l'état précédent.

3.1.2 Les chinois avaient un système de mesure décimal au XIIIème siècle av. J.C., les babyloniens, la numération de position, les pythagoriciens concevaient l'ensemble des fractions et Archimède a contribué à concevoir les fractions comme rapports; il faudra pourtant attendre les arabes (Abu'l-Wafa, 2ème moitié du Xème siècle) pour voir la notion de rapport s'appliquer aux fractions et ce rapport tendre à s'identifier aux nombres. Mais il faut attendre Al Kashi (1427) et indépendamment S. STEVIN (1585) pour que les décimaux apparaissent.

3.1.3 Ce dernier utilisait la même notation pour l'étude des nombres géométriques - en fait, les polynômes à coefficients entiers - et ce n'est pas par hasard. On avait utilisé les décimaux avant lui (BONFILS de Tarascon 1350, REGIOMONTANUS (1563) ...). Mais il est le premier à proposer de substituer les fractions décimales aux fractions rationnelles et de les noter de façon à permettre de ramener leurs calculs aux règles connues dans les naturels "chose si simple qu'elle ne mérite pas le nom d'invention", dit modestement ce brugeois, elle "enseigne facilement expédier par nombres entiers sans rompuz tous comptes se rencontrant aux affaires des hommes". Mais il en voit tout l'intérêt et demande que "l'on ordonnat encore légitimement par les supérieurs, la susdite dixième partition à fin que chacun qui voudrait la pourrait user".

3.2 Histoire de l'enseignement des décimaux.

La "vulgarisation" des décimaux devient alors un problème de didactique et il faudra deux siècles pour franchir le premier pas : GOBAIN [*] en 1711 n'en fait pas état dans un ouvrage destiné aux marchands; d'ALEMBERT en 1779 présente dans l'encyclopédie (à l'article Décimale) la question dans sa forme mathématique. Dans l'édition de 1784 l'abbé BOSSUT présente les décimaux à la manière d'un naturaliste : ce sont des entiers avec une virgule pour présenter les mesures. L'aspect fraction décimale est relégué dans un "appendice". Une fracture s'annonce entre les fractions décimales et les "décimaux populaires" aux algorithmes si merveilleusement simples, qu'ils vont permettre de vulgariser totalement la comptabilité commerciale. La question n'est pas réglée par la décision de la convention; l'enjeu est trop grand tout au long du dix-neuvième siècle, l'aspect politique du problème didactique l'emporte : il faut lutter. Ainsi Charles X réintroduit des nouvelles toises de 6 nouveaux pieds et ne conserve du système métrique que ses normes arbitraires.

3.2.2 Les efforts de vulgarisation ont été facilités par le choix du système métrique. La générosité des intentions révolutionnaires a conduit à enseigner les "mécanismes" indépendamment des justifications mathématiques, (il fallait réussir en 3 ans à donner tout ce qui était essentiel pour le citoyen). Ces conquêtes du XIXème siècle vont créer des obstacles au XXème où il ne s'agit plus de communiquer l'instruction, mais d'éduquer, de faire comprendre.

Les méthodes actives appliquées au système métrique vont faire progressivement disparaître le décimal en tant que rapport, que fraction, il en restait quelque chose à propos des changements d'unités, mais l'efficacité pour les uns , la non directivité pour les autres contribuent à faire disparaître les derniers discours justificateurs.

3.2.3 Aujourd'hui, en France au moins, la rupture est officiellement consommée. Les programmes de 1970 ont introduit une construction (inachevée) des rationnels qui consiste à construire ces excellentes applications à partir des mauvais opérateurs que sont les naturels. Cette construction ne sert à rien, à l'introduction, ni à la compréhension, ni à l'étude des décimaux : deux continents se sont séparés. Et ils le sont surtout dans les conceptions même des maîtres et des parents.

3.3 Obstacles didactiques à la construction des décimaux.

Ainsi une rénovation de l'enseignement des décimaux se heurtera aujourd'hui à de nombreuses difficultés techniques et socio-économiques : quel en sera le prix ? Nous n'avons voulu étudier que les questions d'épistémologie expérimentale dans des conditions scolaires normales pour l'enfant.

Aussi les solutions que nous étudions ne sont-elles pas applicables dans l'état actuel des choses, par l'ensemble des maîtres. Nous ne pouvons pas ici donner en détail l'analyse de tous les obstacles, je renvoie le lecteur à un texte actuellement en préparation. Je me contenterai donc d'évoquer les plus importants.

3.3.1 Le fait d'attacher les décimaux à des mesures conduit à les faire considérer par l'enfant comme un triplet (n, p, u): d'une part un entier n et d'autre part une division par 10^p , c'est-à-dire un changement d'unité, et une unité u : 3,25 mètres, 325 cm exprimé en mètres. La pratique de "changements d'unité" font que p et u entretiennent des rapports privilégiés : (il suffit de proposer des exercices, où, à la fois, on change d'unité et on multiplie par une puissance de 10 pour s'en appercevoir). Le décimal fonctionne comme un entier *et* n'est plus détachable d'une unité : l'objet n'est pas le décimal, mais la grandeur physique. - L'élève ne peut alors interpréter le produit de deux décimaux que dans le cas par exemple du produit de deux longueurs, ce qui le ramène aux obstacles bien connus des nombres concrets : il aura du mal à concevoir $a^2 + a$ et traînera implicitement des équations aux dimensions.

- Les décimaux seront implicitement limités au rang des plus petites unités *pratiquées* couramment : (ou encore ils auront deux chiffres après la virgule comme les francs). L'enfant raisonne comme s'il existait des atomes simplement plus petits que l'incertitude tolérable sur la mesure et comme si tous les nombres étaient des nombres entiers.

3.3.2 3,25 est 325 avec la centaine comme unité disent les commentaires officiels, toutes les relations topologiques vont être perturbées et pendant longtemps : l'enfant ne trouvera pas de décimal entre 3,25 et 3,26 , mais par contre, il trouvera un prédécesseur dans D à 3,15 : ce sera 3,14 etc ... . Même s'il corrige sa réponse sur tel ou tel point, les raisonnement intuitifs vont être guidés par ce modèle erroné (nous trouverons des erreurs sur ce point, comme celle citée plus haut, jusqu'à l'université).

Cette assimilation aux naturels sera évidemment renforcée par l'étude des opérations sous forme de mécanismes, c'est-à-dire d'actions que l'on effectue de mémoire, sans comprendre, comme dans les naturels, avec seulement un petit complément pour la virgule.

De tête, le calcul suivra une autre pente. On calculera le produit de la partie entière et celui de la "partie décimale" et on recollera les morceaux : $(0,4)^2 = 0,16$, mais $(0,3)^2 = 0,9$ et quelquefois $(3,4)^2 = 9,16$.

C'est encore l'effet de la mesure : ce qui compte le plus c'est la partie entière : la partie décimale fait ce qu'elle peut.

3.3.3 Evidemment, l'assimilation aux naturels ne va pas aller sans difficultés dans le cas de certaines divisions qui flanquent la pagaille dans l'édifice, mais le modèle ne sera pas rejeté pour autant; ce seront les nombres "qui tombent pas juste" que l'on enfouira, indices que l'on a dû se tromper quelque part. On les arrondira, au mieux, on les "encadrera" (sans même les définir) mais l'élève les redoutera.

La définition implicite des décimaux "des naturels avec une virgule" fera que pour l'élève, les naturels ne seront pas des décimaux, mais $0,33\underline{3}$ sera un décimal.

Une des pires conséquences de cet obstacle sera souvent de faire passer aux yeux des élèves les tentatives trop timides et trop tardives de le franchir (en 4ème par exemple) pour des raisonnements et billevesées sans objets.

3.4 Obstacles épistémologiques - Plan didactique.

Les obstacles ci-dessus sont tous d'origine didactique. Les vrais obstacles épistémologiques et historiques sont autres.

3.4.1 Il s'agit d'abord de symétriser N pour la multiplication. On peut concevoir quelques fractions mais très vite on veut pouvoir les obtenir "toutes" et pouvoir au moins les additionner et les multiplier par un entier. *Il est indispensable, non pas d'enseigner la construction, mais de poser le problème.* Il faut que l'enfant voit qu'il ne peut pas s'en tirer avec les naturels et en tire toutes les conséquences, notamment sur l'ordre.

Nous avons montré que l'enfant à 10 ans peut inventer Q^+ pour résoudre ce problème (voir ci-dessous le problème des feuilles de papier). Je ne crois pas que D pourrait le satisfaire à ce moment et je ne vois pas comment et pourquoi il l'inventerait.

3.4.2 Par contre, une fois bâti $(Q^+, +, <)$ et placé devant la nécessité de ranger, par exemple, ou d'additionner de nombreuses fractions, l'enfant peut être conduit à utiliser de préférence les fractions décimales et à voir qu'elles "approchent" les autres fractions (que D est dans Q) . Nous avons aussi montre que cela est possible à l'aide du " problème de l'explorateur" et la dialectique qui s'ensuit [*].

Le problème est inverse du précédent. Il s'agit, non plus d'inventer et de combiner les éléments d'un ensemble inconnu et nouveau, mais au contraire d'approcher un ensemble connu avec une sous-famille bien choisie.

3.4.3 Un texte à paraître donnera le détail des 25 "problèmes" qui constituent la dialectique (qui dure 60 heures), mais je répugne à extraire de leur contexte les exemples que je donne au paragraphe suivant avec des commentaires insuffisants [*] :

* Tout y est question d'équilibre. Par exemple, si les enfants mécanisent" le calcul dans Q, l'invention de D tarde et son usage prend mal. S'il n'est pas suffisamment connu, D n'est pas construit ni compris.

* Il faut par exemple se garder de "reconnaître" trop vite des pratiques connues : les enfants savent encadrer un rationnel entre deux décimaux aussi voisins qu'ils veulent, bien avant de découvrir que cette pratique est "la division" et de l'instituer en algorithme.

* Il ne faut pas cependant laisser trop longtemps les grands problèmes au niveau implicite. Les dialectiques de la formulation et l'organisation fréquente de débats amène au niveau conscient ce qui doit être su.

3.4.4 Le deuxième grand obstacle, c'est la conception des rationnels et des décimaux en tant que rapports, en tant qu'applications linéaires opérant dans Q . Dans une situation propice (voir le problème du puzzle) les enfants construisent cet ensemble d'applications, quelques-unes d'abord, puis d'autres qu'il faudra désigner : les fractions, ou les décimaux, ou les naturels se prêteront à cette désignation.

La somme, la composition de ces applications, puis la décomposition sur D , fourniront un modèle unificateur de Q , de N et de D .

3.5 Trois exemples de problèmes permettant le franchissement d'obstacles.

3.5.1 Le problème des feuilles de papier. (leçons 1 à 3).

C'est un problème de communication; les enfants doivent inventer un langage pour indiquer à des camarades dans quels tas ils ont choisi une feuille de papier. Le jeu est joué effectivement : les enfants cherchent un système pour désigner l'épaisseur des feuilles. Après quelques tentatives, ils imaginent de faire un petit tas dont on peut mesurer l'épaisseur avec un double décimètre (ou un pied à coulisse scolaire). Ils envoient le nombre de feuilles et l'épaisseur (entière) ; Exemple : (19 ; 3) .

C'est un exemple de dialectique de la formulation. Les erreurs, les contestations, les comparaisons, les conduisent à expliciter les conditions d'emploi de ces couples : équivalence, erreurs de mesure ... et à en désigner les classes.

Des problèmes de prévision (quelle sera l'épaisseur d'un carton obtenu en collant telle et telle et telle feuille) où, encore, le critère de réussite est l'expérience et l'acceptation par tous les enfants, des débats scientifiques (est-ce que les couples sont des nombres ?) conduisent les enfants à explorer Q^+.

3.5.2 Le problème de l'explorateur. (leçons 12 à 15)

Deux joueurs (ou deux équipes) s'affrontent. Chacun choisit une fraction comprise entre 0 et 10 , qu'il cache à l'autre : Exemple : A choisit 2/3 et B 45/10 . A tour de rôle les joueurs choisissent un intervalle et le proposent. Exemple : A écrit [3; 4 [. Si la fraction de B appartient à l'intervalle, celui-ci annonce : "tu me vois". Si elle est à l'extérieur, "tu ne me vois pas". Si elle est à l'origine de l'intervalle, "tu m'attrapes".

Ici B dit : "tu ne me vois pas".

Pour comparer leurs fractions, les élèves "ramènent au même nombre de feuilles" (opération connue sans être mécanisée). Le gagnant est celui, qui, lorsqu'on arrête le jeu "voit" l'autre dans l'intervalle le plus petit. Au début, les enfants croient pouvoir deviner toutes les fractions. Ils développent des stratégies de filtrage (le filtrage linéaire et décimal apparaissent). Ils distinguent des fractions faciles ou difficiles à attraper. Toute la topologie de Q^+ se met en place *contre* celle de N , dans une dialectique qui pourrait faire penser à celle de l'obus et de la cuirasse.

3.5.3 Le problème du puzzle. (leçon 25) .

"Voici des puzzles de TANGRAN comme ceux que vous avez utilisés au club de mathématiques. Fabriquez-en de semblables, plus grands. Par exemple, ce côté mesure 4 cm, son image devra mesurer 7 cm. Travaillez par groupe, mais partagez-vous le travail. Vous vérifierez ensuite que le puzzle marche comme il faut."

Bien sûr, si $f(a+b) \neq f(a) + f(b)$, le résultat ne sera visiblement pas bon. D'où des discussions, des nouvelles tentatives, le rejet de modèles défectueux comme $f(a) = a + k$.

Les conditions que doit satisfaire l'application linéaire, (de Q^2 dans Q^2) que ce soient la conservation des angles ou la condition sur la somme des images, sont fatalement éprouvées, formulées, validées.

A cette occasion, l'idée persiste longtemps chez l'élève (malgré plusieurs expériences parfois) qu'une application simplement croissante fournit nécessairement un agrandissement convenable.

Puis, il croira que toutes les applications sont linéaires, ... mais ceci est une autre histoire.

4. Conclusion.

Quels sont ces obstacles que ces problèmes permettent de franchir ?

Comment sont organisées les situations d'action, de formulation, de validation annoncées ?

Quelles dialectiques s'engagent et à quels propos ?

Où sont ces caractéristiques informationnelles des situations, favorables aux déstabilisations des notions ?

Je prétends que toutes ces choses sont observables dans les exemples ci-dessus et je compte les montrer dans un prochain ouvrage (on peut trouver des analyses de ce genre à propos de la construction des probabilités dans BROUSSEAU 74 [*]).

En attendant, il est possible que le lecteur ne les voit pas par suite de quelque obstacle, théorie de l'apprentissage, de la connaissance, ou tout autre cause. Je l'engage à les vaincre à son tour en réalisant ces situations, en les étudiant, en les modifiant, en les discutant.

Bibliographie.

BACHELARD : La formation de l'esprit scientifique - 1975 - Urin.

BLOOM : Taxonomie des objectifs pédagogiques - Tome 1 , domaine cognitif ; tome 2 , domaine affectif - 1976 - Presses Universitaires du Québec.

BROUSSEAU et PROUTEAU : Note de travail : Problème d'enseignement des décimaux du cours moyen à la 4ème -et son annexe -IREM de Bordeaux 1977 .

BROUSSEAU : Les structures ordonnées dans l'enseignement élémentaire. IREM de Bordeaux - Novembre 1974 - C.R. du stage des IDEN.
: Quelques leçons sur les nombres décimaux au Cours Moyen. IREM de Bordeaux - in cahier 17 - 1976.

BROUSSEAU et BRIAND : Premières découvertes des lois du hasard à l'école élémentaire. Film OFRATEME - Série Ateliers de Pédagogie -1976
: Documents d'accompagnement du film (13 p.) -1976.

BROUSSEAU et BRIAND : Quelques réflexions sur une approche des décimaux et document d'accompagnement. Film OFRATEME - Série Ateliers de Pédagogie.
avec N. BROUSSEAU : La construction des rationnels et des décimaux (64 séquences - à paraître).

BROUSSEAU : Réflexions sur l'enseignement du calcul numérique. IREM de Bordeaux - in cahier 15 - 1974.

BROUSSEAU : Etude d'une expérience de probabilités - (14 p.). IREM de Bordeaux - février 1974. A paraître dans une publication ultérieure.

BROUSSEAU : Peut-on améliorer le calcul des produits de nombres naturels ? (in Actes du Congrès International des Sciences de l'Education) Septembre 1973 - Paris .

BROUSSEAU : L'apprentissage des opérations dans les naturels. 1973 - Cahier de l'IREM de Bordeaux - N° 13 .

GLAESER : Le livre du problème (tome 1, 2 et 3) - Cedic - 1973

GLAESER, PAQUETTE, JANVIER, WILSON, CIOSEK : voir table des matières.

GONSETH : Les mathématiques et la réalité - 1946.

PIAGET : L'équilibration des structures cognitives - P.U.F. - 1975.

REGNIER : La crise du langage scientifique. Antropos - 1976.

SALIN M.H. : Le rôle de l'erreur dans l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire. Mémoire de D.E.A de didactique des mathématiques. novembre 1976.

SEURET : Traité d'arithmétique - 1834.

S.STEVIN : La disme enseignant facilement expédier par nombres entiers sans rompuz, tous comptes se rencontrant aux affaires des hommes - 1585 (manuscrit) - 1634 (première édition).

d'ALEMBERT : in Encyclopédie universelle de 1799, et
in Encyclopédie des mathématiques de 1784,
à l'article "décimal".

GOBAIN : L'arithmétique aisée - 1710 .

TATON : Histoire générale des sciences - 1966 - P.U.F.
in tome 1 - VERCOUTTER et ITARD - La science antique et médiévale.
in tome 2 - KOYRE - La science moderne.

THOM : Stabilité culturelle et morphogénèse -1972 -
Reading Massachussetts.