Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire. L'étude de l'espace et de la géométrie

Guy P. Brousseau

Guy Brousseau

Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire

L'étude de l'espace et de la géométrie

Conférence invitée, publiée dans les actes

Séminaire de Didactique des Mathématiques, Rethymon 2000

Université de Crète, Département des Sciences de l'Education

1. L'enseignement de la géométrie en questions

1.1. Intérêt de la géométrie

La géométrie intervient, par ses objets, par ses énoncés, par ses méthodes, et par les représentations qu'elle propose dans de très nombreuses branches des mathématiques et des sciences, et quelque fois de façon inattendue.

De plus l'enseignement de la géométrie entraîne les élèves au raisonnement mathématique, c'est à dire à un mélange de raisonnement déductif et d'imagination inductive, activé par une manipulation familière des images. De ce fait elle prépare les élèves à aborder d'autres théories mathématiques

Il est inutile de reprendre ici tous les arguments qui ont été donnés à l'appui de l'idée que l'enseignement de la géométrie est une composante essentielle de la formation des élèves, et d'ailleurs aussi de les réfuter.

1.2. Propriétés didactiques

La géométrie offre aux professeurs une possibilité de provoquer chez leurs élèves une activité reconnue comme authentiquement mathématique par la plupart des mathématiciens eux mêmes. Ce n'est pas le cas de l'arithmétique élémentaire absorbée dans l'algèbre, de l'algèbre elle-même, souvent assimilée à du calcul et même réduite à des algorithmes, sans parler des statistiques dont le contenu est à peine reconnu comme mathématique et que les professeurs du moins en France ne daignent ou ne savent pas enseigner. Cela tient en partie au fait que la géométrie offre à propos d'un petit nombre d'objets, tout un feutre d'énoncés en interrelation, que l'on peut approcher par un tissu serré de théorèmes, et en partie à l'ancienneté et à la profusion luxuriante des approches ou des points de vue à son sujet.

Le succès de la géométrie comme moyen didactique d'introduire aux mathématiques aux sciences et à la culture est tel qu'il y a lieu de s'interroger sur certaines de ses conséquences.

L 'enseignement de la géométrie porte en lui une épistémologie spontanée : un ensemble de croyance et de déclarations sur ce que sont les mathématiques, sur la façon d'en faire, d'en chercher, d'en apprendre, d'en trouver, de les organiser, etc. que les élèves et les professeurs peuvent utiliser et développer ensemble. Avec cette épistémologie s'articule une « didactique » assez naturelle qui établit une marge assez large et surtout assez malléable pour le professeur entre ce qui est enseigné et ce qui est demandé aux élèves, de l'exercice aux problèmes les plus complexes il est souvent presque facile d'organiser des chaînes de problèmes suggestifs et néanmoins aussi proches les uns des autres qu'on le veut. C'est cette marge qui est connue et reconnue comme riche.

1.3. Les inconvénients d'un paradigme des mathématiques

Ces propriétés sont implicitement celles que les professeurs auraient tendance à exiger des autres branches des mathématiques.

Cette exigence est-elle légitime ? La géométrie est elle un bon représentant du fonctionnement de toute théorie mathématique ? Les conceptions didactiques qui lui sont attachées restent elles valides pour d'autres enseignements ? Ou au contraire la relative « facilité » de la didactique de la géométrie a-t-elle conduit les professeurs à de graves méprises dans d'autres domaines?

Les professeurs ont tendance à assimiler le raisonnement mathématique avec le raisonnement en géométrie (que je qualifierai de « visio-déductif »), puis finalement avec le raisonnement déductif. Cette tendance remise en honneur après l'écroulement du projet dit des mathématiques modernes est-elle fondée ? Il semble que ce processus ait contribué fortement à dévaluer la partie du « *raisonnement* » qui, à l'école primaire consistait à ordonnancer, à annoncer et à justifier un ensemble de tâches, ou un calcul, au profit exclusif du raisonnement déductif, c'est à dire à l'articulation logique des relations. Est-ce un progrès ? est-ce bien adapté ?

L'opposition exacerbée entre le raisonnement déductif en géométrie et le « calcul » a conduit à traiter l'algèbre comme un recueil d'algorithmes. Elle a contribué à faire disparaître de l'enseignement secondaire, l'algèbre en tant que théorie mathématique identifiable et à effacer ses rapports avec l'arithmétique élémentaire, ce qui a fini par perturber profondément les enseignements de mathématiques à l'école primaire.

Le fait que les probabilités et surtout les statistiques ne puissent s'inscrire dans les schémas didactiques développés par les professeurs de mathématiques sur le modèle de la géométrie en rend l'enseignement très difficile, du moins en France. Est-ce sans rémission ?

La confusion de la topogenèse déductive avec la chronogenèse didactique s'est nourrie d'un succès relatif dans le domaine de la géométrie au niveau secondaire. Quelles conséquences peuvent avoir les réifications des méthodes didactiques développées en géométrie dans les autres secteurs ?

1.4. Plan et méthode d'étude

Pour répondre à de telles questions, il me semble nécessaire

- de déterminer ce qu'est la géométrie, à la fois en tant que science, en tant que pratique et en tant qu'objet d'enseignement.

- et de mettre en évidence les conditions de sa construction et de sa diffusion, et notamment les équilibres et les régulations qui lui permettent de posséder les vertus didactiques que nous lui reconnaissons,

C'est l'objet principal de cet exposé qui laissera le questions ci-dessus sans réponse apparente..

La méthode que je vous propose est celle de l'analyse de situations.

Les *situations* sont des modèles[1] minimaux qui "expliquent" comment telle connaissance intervient dans les rapports particuliers qu'un sujet établit avec un *milieu* pour y exercer une influence déterminée.

> *En attendant d'autres exemples, un exercice ou un problème est une situation scolaire classique. Un certain ensemble de questions de calcul mental ou de figures planes constructibles à la règle et au compas constituent des milieux.*

Dans la première partie nous allons ainsi déterminer ce qui est commun et ce qui est différent des connaissances de géométrie par rapport à celles de l'espace. Puis nous avancerons une hypothèse sur les conditions essentiellement didactiques qui conduisent à l'organisation de la géométrie : amorphe dans les rapports d'expertise, essentiellement ésotériques, elle doit se structurer logiquement, se mathématiser, pour permettre des rapports exotériques. Elle doit de plus se prêter à des régularisations : dé-mathématisations et re-mathématisations pour s'adapter à des contraintes ergonomiques. La connaissance de ces processus est essentielle pour permettre aux professeurs d'organiser et aux mathématiciens et au public d'accepter un certain jeu (une liberté limitée) de la chronogenèse (le choix et l'ordre des connaissances enseignées) par rapport à la topogenèse (le choix et la définition « actuels » - et officiel - des connaissances mathématiques).

[1] En principe ces modèles sont des automates, par exemple des automates stochastiques finis, mais l'usage de cette référence est souvent plutôt métaphorique en ce sens que le modèle n'est pas entièrement spécifié.

2. La connaissance de l'espace

2.1. Les situations

2.1.1. Les situations comme modèles

Une des approches de la didactique des mathématiques consiste à modéliser non seulement les connaissances que l'on veut enseigner ou celles qu'un sujet apprend, mais aussi les conditions dans lesquelles elles se manifestent. Les *situations* sont des modèles[2] minimaux qui "expliquent" comment telle connaissance intervient dans les rapports particuliers qu'un sujet établit avec un *milieu* pour y exercer une influence déterminée.

> *En attendant d'autres exemples, un exercice ou un problème est une situation scolaire classique. Un certain ensemble de questions de calcul mental ou de figures planes constructibles à la règle et au compas constituent des milieux.*

Certaines situations sont telles que non seulement elles nécessitent de la part du sujet la mise en œuvre d'une connaissance, mais encore elles l'incitent et lui permettent de la développer s'il ne l'a pas déjà acquise. Elles constituent des *situations d'apprentissage*. Certaines de ces situations d'usage ou d'apprentissage se présentent spontanément et ne nécessitent pas l'intervention d'un tiers doué d'une intention d'enseigner la connaissance en question pour produire leur effet. D'autres au contraire exigent divers modes d'intervention et constituent des *situations didactiques*.

Certaines situations d'apprentissage - par exemple celles suggérées par le béhaviorisme - semblent ne pas dépendre de la connaissance enseignée, sinon par le texte des informations données ou demandées. Dans la mesure où l'apprentissage tend à permettre à l'apprenant la production autonome de réponses appropriées originales, la modélisation des situations d'apprentissage doit aussi prendre pour objet les situations naturelles de production des savoirs. Les situations grossières et non spécifiques évoquées ci dessus ne sauraient suffire à expliquer les relations étroites qui existent entre la cause des adaptations du sujet et leur résultat, entre la nature des connaissances apprises et leur sens, entre les raisons de leur mise en œuvre et leur place dans la culture.

2.1.2. Classification générale des situations

Une première classification des situations est déterminée en même temps

- par les rapports que le sujet établit avec son milieu (action, communication, justification, institutionnalisation, didactique),

- le type des systèmes en présence dans ce milieu (matériel, joueur antagoniste, opposant, partenaire coopérant, autorité, enseignant)

- la forme sous laquelle la connaissance du sujet se manifeste : décision, message, assertion, convention, référence

- la forme de la connaissance elle-même : connaissance implicite (ou schème), langage, savoir pratique, technique, technologique ou théorique

- les types d'apprentissages : didactique, sous la conduite d'un enseignant[3] ou non didactique. Dans ce dernier cas on peut repérer les types de Bateson ou de Piaget

2.1.3. L'observateur, la relativité des savoirs, la transposition didactique

[2] En principe ces modèles sont des automates, par exemple des automates stochastiques finis, mais l'usage de cette référence est souvent plutôt métaphorique en ce sens que le modèle n'est pas entièrement spécifié.
[3] Y compris la simulation d'une situation non didactique dans le cadre d'une situation didactique, que nous appelons alors situation "a-didactique"

En logique mathématique il est essentiel de distinguer la logique construite, le langage objet, de la logique utilisée par le constructeur. De même en didactique, il est essentiel de distinguer les connaissances rapportées à chacun des systèmes en présence dans une situation et en particulier de les distinguer de celles mises en œuvre par l'observateur - le constructeur du modèle. Ainsi il n'y a aucun cercle vicieux à utiliser des connaissances géométriques même avancées pour déterminer les situations propres à faire construire des connaissances géométriques même élémentaires par un sujet - à la condition évidemment que ces connaissances avancées ne soient pas nécessaires au sujet lui-même.

Il faut remarquer que l'idée qu'une même connaissance puisse différer suivant les types de situations dans lesquelles elle apparaît et suivant les partenaires de ces situations est un axiome important de cette approche. Il ne contredit que les interprétations naïves d'une idée répandue selon laquelle le savoir - en particulier mathématique - est par définition universel et invariant dans toutes les circonstances. Les connaissances se voient attribuer en mathématiques des catégories comme {vraies, faux} ou {certain, p-probable, impossible}. Les situations en font apparaître d'autres comme "pertinent", "adéquat", "optimal", "idoine" etc. indispensables pour permettre de comprendre comment des "conditions" similaires peuvent conduire, par le jeu des mêmes possibilités d'adaptation, à des réponses fausses ou correctes. Cet axiome est indispensable pour laisser à l'observateur la charge d'établir les rapports d'une connaissance de référence avec ses occurrences dans diverses situations. Il permet de concevoir la possibilité de la transposition didactique et en rend l'étude nécessaire.

2.1.4. Les propriétés didactiques des connaissances et des savoirs

La modélisation des conditions d'apprentissage ou d'enseignement par des situations formelles permet de donner un sens concret et des éléments de mesure pour des propriétés des connaissances comme :

La consistance interne, la compatibilité ou la dépendance par rapport aux activités antérieures. La complexité formelle, la complexité de l'acquisition, la pertinence: il s'agit de savoir si les éléments concrètement significatifs d'un énoncé sont observables par le sujet dans la situation, l'adéquation - la capacité à fournir la solution - dans une situation ou une classe de situations ou l'incertitude qu'elle réduit ou qu'elle augmente, l'utilité sur un certain champ suivant sa fréquence d'emploi, le coût de sa mise en œuvre ou de son emploi, l'économie qu'elle procure par rapport à d'autres connaissances, ses formes de dépendances avec d'autres connaissances, l'idonéïté c'est à dire l'adaptation à une demande sociale, sa disponibilité dans un certain répertoire…

Un des propos de cet article est d'étendre ce genre étude à des objets de savoirs de la taille d'une théorie mathématique.

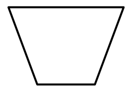
2.2. L'espace

Il est assez commun de justifier l’enseignement de la géométrie par le fait qu’elle est la science de l’espace, le décor essentiel de toutes nos actions et la matrice de toutes nos conceptions. Etudier l’espace est-ce autre chose qu’étudier la géométrie ? Qu’est-ce qui les distingue ? Dans quelles circonstances un individu a-t-il besoin de connaissances spatiales ? Ces circonstances ont-elles un modèle général ?

2.2.1. Situations spatiales

> *un bébé modifie l'orientation d'un cylindre pour le faire entrer dans un trou rectangulaire (situation n°1)*

On peut faire l'hypothèse que ce bébé utilise certaines connaissances de l'espace et des déplacements, et que ces connaissances sont largement plus complexes et précises que ne le laisseraient croire les possibilités d'explicitation du bébé. Ainsi les connaissances spatiales d'un sujet sont celles qui lui permettent de résoudre des problèmes spatiaux, qu'il ait ou non la possibilité de les formuler. Un problème spatial est un problème dont la résolution requiert effectivement la mise en œuvre d'une connaissance que l'observateur reconnaît comme bien décrite par un savoir de nature spatiale et plus particulièrement géométrique.

> *Par exemple (situation n°2) un enfant qui a besoin de la pièce A ci-dessous dont il a besoin pour terminer un puzzle, et qui doit pour cela la décrire à un autre enfant (qui ne la voit pas), a-t-il un problème spatial à résoudre ? Lequel ?*
>
> 
>
> *La réponse dépend de circonstances plus précises : le problème est différent*
>
> *- s'il ne reste qu'une pièce : il n'est pas nécessaire de la décrire*
>
> *- si les pièces restantes sont en petit nombre : il suffit de la nommer le terme géométrique de "trapèze" n'a pas plus de vertu qu'une métaphore comme "le pot de fleur"*
>
> *- s'il faut dessiner et découper la pièce manquante dans un carton, des connaissances spatiales et une certaine culture géométrique deviennent indispensables aux deux enfants*

Considérons la situation suivante :

> *(situation n°3) Un charpentier prépare au sol plusieurs coûteuses pièces de bois qu'il doit ensuite monter et ajuster dans l'espace à quinze mètres du sol*

Elle permet de mettre en scène d'autres connaissances spatiales par le jeu de diverses substitutions telles que la suivante

> *(situation n°4) Un chauffeur de taxi élabore un trajet pour conduire un client dans une banlieue éloignée*

L'ensemble des situations spatiales peut ainsi être généré à partir d'un "modèle fondamental" par la spécification ou la dégénérescence de ses variables et de ses variantes.

2.2.2. Variantes du milieu et des connaissances spatiales

A la fois, par la fréquence avec laquelle on les rencontre conjointement, et par leurs relations logiques ou mathématiques, un ensemble de situations peut

- favoriser le développement de conceptions, au sens de "connaissances associées, reliées à la fois par des dépendances logiques, d'adéquation et de co-présence"
- et par-là constituer un "milieu"

Les constructions de figures à la règle et au compas constituent un exemple premier de modélisation à la fois d'un milieu et d'une partie de la géométrie élémentaire.

Le jeu des variantes et des variables de la situation fondamentale de l'espace permet de déterminer au moins trois "conceptions" de l'espace et par conséquent trois "milieux" spatiaux correspondants : le micro-espace, le meso-espace, et au moins trois macro-espaces.

Le Macro-espace

Les situations où un sujet doit prendre des décisions relatives à un territoire beaucoup trop grand pour qu'il puisse l'embrasser d'un regard, lui posent - comme à notre chauffeur de taxi - des problèmes, entre autres de recollement de cartes et d'incrustation. Pour identifier et retrouver un lieu, établir un trajet, déterminer la forme d'un territoire etc. il est nécessaire de développer des concepts et des moyens spécifiques. Les solutions sont d'ailleurs différentes suivant qu'il s'agit de la terre entière ou d'une zone urbaine, rurale, sylvestre, souterraine, maritime ou aérienne.

Le Micro-espace
A l'opposé, l'enfant construit ses premières connaissances spatiales dans la manipulation de petits objets. Par le toucher avec ses mains ou sa bouche autant que par la vue, par les mouvements qu'il leur fait subir, il identifie leur consistance, leur forme solide, leurs positions relatives, et leurs propriétés. Le micro-espace est le milieu de l'élaboration de la conception du mouvement des objets autres que l'observateur. Il s'agit de conception pas de taille objective des objets. Un pilote d'hélicoptère peut interpréter le sol à ses pieds à l'aide de sa conception micro-spatiale.

Le Meso-espace
Les situations où l'enfant doit concevoir ses propres déplacements dans un territoire placé sous le contrôle de sa vue, sont l'occasion de développer des représentations différentes de celles du micro-espace et qui préfigurent celles qui seront nécessaires dans le macro-espace

Pour des raisons ergonomiques et à cause des techniques différentes qu'elles imposent, la conception des objets de la géométrie est différente dans chacun de ces milieux. La "droite" peut être déterminée, dans le micro-espace par le glissement qu'elle permet ou par l'intersection de deux plans, dans le meso-espace, par un alignement visuel, dans le macro espace, par le prolongement à l'aide d'un angle plat… Dans le micro-espace les distances sont des longueurs d'objets, les angles des "formes" ou des rotations ; les meures de longueurs y sont beaucoup plus économiques que les mesures d'angles, dans le macro-espace c'est l'inverse.

Les conceptions spatiales nécessaires à l'établissement des rapports humains avec leur milieu ne sont que très modestement prises en charge par la géométrie élémentaire [4]. Elle élimine naturellement toutes les techniques professionnelles, trop spécifiques et trop complexes, mais elle laisse sans connaissances et sans répertoire adapté, des situations très banales.

> *La situation qui consiste à indiquer à quelqu'un les déplacements d'un mobile dans un espace urbain en est un exemple (situation n°5). Cette situation suppose la gestion simultanée des mouvements relatifs de six trièdres de références : ceux liés au terrain, et au mobile réel, ceux liés à la carte et à la représentation du mobile, ceux liés aux deux interlocuteurs ; alors qu'il n'existe même pas une méthode standard pour évoquer précisément un carrefour en patte d'oie.*

2. 3 Les formes de connaissances spatiales

2.3.1. Modèles implicites

La description directe des connaissances spatiales implicites telle qu'elle se manifeste dans les situations d'action spatiale, est pour l'instant hors d'atteinte de nos investigations, malgré les progrès de la neurophysiologie. Sous le nom de vision spatiale, d'images mentales ou de représentations, nous les modélisons donc par l'espace lui-même, tel que nous le percevons et tel que la culture le représente.

2.3.2. Langages

La description de l'espace se manifeste d'abord dans les situations de communication d'informations spatiales. Les messages oraux, écrits ou graphiques se réfèrent à des systèmes de représentations plus ou moins analogiques ou à des langages et à des syntaxes plus ou moins arbitraires. La complexité des répertoires utilisables provient de ce que les représentations étant elles-mêmes spatiales, elles se prêtent à toutes sortes de réifications. Parmi les informations

[4] Nous entendrons ici par "géométrie élémentaire" une géométrie qui a été enseignée à un moment ou à un autre dans un pays quelconque dans la scolarité "obligatoire" ou dans l'enseignement pré-universitaire.

spatiales et les images de toutes sortes qu'utilisent les humains, bien peu relèvent de la description géométrique, par contre les transformations que doivent subir ces images sont beaucoup plus souvent de nature géométrique.

2.3.3. Enoncés

Les véritables connaissances sur l'espace se manifestent dans des anticipations ou dans des inférences qui dépassent la perception, la reconnaissance ou la description de l'environnement. Ces connaissances que l'observateur représente par des énoncés peuvent se manifester dans des décisions (théorèmes en actes) ou dans des communications (de questions, d'ordres ou d'informations) mais elles apparaissent clairement au sujet lui-même dans leur fonction de justification d'une prévision qui se substitue à une vérification empirique. Ce genre d'énoncé apparaît dans des types de situations dits de validation explicite ou de preuves.

3. La géométrie

Comme collection de connaissances pour résoudre les problèmes "concrets" de mesure de la terre,; de repérage de la position d'un point etc., des procédés simples comme la triangulation suffisent. La géométrie marque donc un autre souci. Dans l'approche en termes de situations, la *géométrie* peut être définie comme *la collection des connaissances spécifiques du* ***contrôle de la consistance des énoncés*** *sur l'espace*. Peut être faudrait-il restreindre le champ aux figures de l'espace ?

3.1. Situation typique

Ainsi la situation typique dans laquelle peuvent apparaître des énoncés de géométrie est celle ou un proposant et son opposant, disposant d'un certain répertoire spatial commun produisent deux anticipations différentes du résultat d'une même opération et tentent d'argumenter leur prévision. Les énoncés bien formés qu'ils vont échanger auront pour chacun le statut de théorème (vrai ou faux) a pour objet de convaincre l'opposant de la validité d'un énoncé avant la vérification empirique, par le jeu de déclarations consistantes avec le répertoire commun. Lorsqu'un énoncé proposé n'est pas accepté par l'antagoniste le proposant essaie de construire une preuve en utilisant les énoncés acceptés et des moyens de construction légitimes. Une preuve acceptée par une communauté devient une démonstration. La situation suivante constitue un exemple de situation nécessitant la mise en œuvre d'un théorème:

> *(situation n°6) Un élève veut faire reproduire à distance un quadrilatère quelconque par son partenaire, de façon à ce que cette reproduction recouvre exactement le modèle qu'il a sous les yeux. Pour cela il communique les longueurs des quatre côtés croyant ces renseignements suffisants. Le partenaire prétend ne pas pouvoir effectuer le travail et réclame des renseignements supplémentaires. Contestation, débat…*
>
> *L'énoncé implicite du proposant est "quatre côtés déterminent dans le plan un quadrilatère et un seul"*
>
> *Un argument pragmatique consistera à proposer d'inverser les rôles*
>
> *La solution du problème, qui consiste par exemple à indiquer en plus la longueur d'une diagonale n'est pas une preuve.*
>
> *La preuve mathématique de la fausseté du théorème pourra être la production d'un contre exemple. Elle est fondée sur un argument sémantique et sur la réduction à l'absurde.*

3.2. Situation fondatrice de l'étude de la géométrie

La distinction entre connaissance de l'espace et géométrie tend à s'effacer dans notre culture devant la formidable efficacité des mathématiques dans ce domaine, et réciproquement devant l'intérêt des modèles géométriques pour toutes sortes d'études mathématiques. Cette distinction n'apparaît pas bien aux élèves et par conséquent elle n'est pas présente dans l'esprit des professeurs. Elle est pourtant très importante dès lors que l'on prend la géométrie non plus comme une connaissance utile par elle-même mais comme un moyen pour l'enseignement d'initier l'élève au raisonnement déductif ou comme initiation à l'usage d'une théorie mathématique. La confusion entre les différentes fonctions de la géométrie comme moyen de représentation de l'espace ou comme modèle d'une activité mathématique est la source d'erreurs, de malentendus et d'échecs.

Il s'agit de marquer dès son apprentissage quelle est la fonction, la nature et le sens des activités géométriques. Quels rapports il y a entre une figure, comme objet de la théorie mathématique, le dessin de cette figure et la figure envisagée par un sujet devant ce dessin. Une assez bonne approximation de ce que peut être une situation fondamentale permettant d'introduire la géométrie comme activité en quelque sorte opposée à la connaissance de l'espace, est la suivante.

> *(situation n°7) Le professeur demande "sérieusement" à ses élèves débutants de tracer les trois médiatrices d'un triangle ABC très aplati et prétend donner des noms appropriés A' B' C' aux sommets du petit "co-triangle" qu'ils "doivent" ainsi obtenir. Devant la trop petite taille de ce triangle le professeur prétend avoir choisi un triangle ABC particulier et incommode. Il demande aux élèves de trouver un triangle dont le co-triangle sera le plus grand possible. Les élèves s'acharnent. Ils doivent finalement émettre l'hypothèse que ces trois points pourraient n'en représenter qu'un seul et en apporter la preuve contre "l'évidence" de la figure et non pas avec. Pour cela il faut s'accorder sur la définition de la médiatrice comme lieu.*
>
> *Le professeur explique alors la différence entre "voir" et "démontrer". La géométrie ne consiste pas à décrire ce qu'on voit mais à établir ce qui "doit" être vu.*

4. Les conditions sociales de l'organisation de la géométrie

4.1. La métis et le logos

Les situations que nous avons présentées dans le chapitre précédent décrivent comment des individus ou des petits groupes en situations isolées, *peuvent produire et justifier des connaissances et des techniques spatiales, puis des énoncés de géométrie*. Elles rendent compte de la construction d'une expertise de l'espace. Elles n'expliquent pas comment ni pourquoi ces connaissances seraient accumulées, puis organisées en une théorie cohérente et déductive. La géométrie construite dans ces situations n'est une théorie qu'au sens de la théorie mathématique des modèles, c'est à dire une **collection amorphe d'énoncés valides**, et non pas une théorie au sens grec, c'est à dire une **suite d'énoncés vrais**. Ces situations ne permettent donc pas de fonder entièrement l'épistémologie didactique de la géométrie. D'autres situations doivent être envisagées pour son apprentissage et son enseignement.

Le passage de la collection amorphe à une théorie structurée par les démonstrations correspond au remplacement de la *métis*, l'intelligence personnelle rusée, la prudence la débrouillardise, la raison des savoirs techniques par le *logos* la raison discursive, la loi collective. Pour comprendre ce passage, et ses conséquences pour l'enseignement, il faut étudier, c'est à dire modéliser en terme de situations, les relations des individus ou des groupes qui produisent et utilisent la géométrie avec le reste de leur société et l'influence qu'ont ces relations sur les connaissances géométriques et sur la culture commune. Exprimer cette exigence c'est dire que l'organisation en particulier axiomatique de la géométrie et finalement ses structures mathématiques sont le résultat de contraintes liées à sa diffusion, à son enseignement. Et donc que cette théorie est de nature profondément didactique. C'est dire aussi que l'étude de cette organisation - les propriétés intrinsèques de la géométrie - à la lumière des situations qui la suscitent est essentielle pour décrire sa compréhension et son enseignement.

L'ambition d'expliquer à la fois les mathématiques, leur apprentissage, leur épistémologie et leur histoire par des modèles simplifiés de situations sort certainement du cadre d'une courte conférence et peut être aussi excède les capacités de son auteur. Même la modélisation précise des situations[5] que nous allons évoquer serait trop lourde. Toutefois l'évocation du fonctionnement *ésotérique* et du fonctionnement *exotérique* des mathématiques pourrait nous permettre de montrer certaines des propriétés didactiques essentielles de la géométrie, et ses limites.

4.2. L'expert et la géométrie ésotérique

Un savoir est ésotérique lorsqu'il est tenu caché du reste de la société - les béotiens - par les initiés qui le produisent ou le détiennent.

4.2.1. Les experts et les utilisateurs

Le fonctionnement ésotérique des savoirs qui nous intéressent, s'installe généralement dans une société lorsque ce savoir se manifeste sous deux formes sociales. L'ensemble de la population le connaît seulement sous la forme de réponses directes à ses demandes ou à ses besoins pratiques. Son élaboration et sa mise en œuvre n'est l'affaire que d'une petite société d'experts chargés de satisfaire ces besoins. sans qu'il leur soit nécessaire de fournir d'autres justifications que pragmatiques : l'adéquation et l'efficacité de ces pratiques. D'une part les experts n'ont pas intérêt à diffuser leur savoir hors de leur communauté et d'autre part la population ne souhaite pas et n'a pas intérêt à faire l'effort nécessaire à l'exercice de ce savoir. Elle se contente d'un système de représentations, une méta-connnaissance pour gérer l'appel des pratiques. Plusieurs professions peuvent s'intercaler entre les experts et le public avec des cultures différentes : concepteur, exécutant, utilisateur par exemple.

4.2.2. L'organisation des savoirs pour l'expertise

Dans un tel système, l'ensemble des connaissances des experts peut être organisé de façon presque quelconque, pourvu que l'on puisse en extraire rapidement, à la demande le savoir voulu. Elle peut être même une simple compilation désordonnée. L'organisation de ce savoir n'est qu'une affaire d'économie informationnelle et d'ergonomie humaine. Les justifications et les preuves peuvent rester locales et ne jouer qu'un rôle voisin des moyens mnémotechniques. L'absence de moyens culturels d'organisation des connaissances conduit alors les uns comme les autres à traiter ces connaissances comme des algorithmes : les utilisateurs connaissent leur nom, leur champ d'application et les résultats attendus, l'expert connaît les algorithmes et leur mise en œuvre. Les innovations sont simplement intégrées au savoir antérieur et ne sont que rarement généralisées. Néanmoins, dans une civilisation avancée, le nombre, l'importance et la sophistication des énoncés produits dans ces situations, peuvent être considérables, à la fois comme techniques et comme savoirs. La production de connaissances nouvelles est un art, leur compréhension aussi.

4.2.3. La diffusion des savoirs ésotériques

L'enseignement et l'apprentissage d'algorithmes ne pose vraiment des problèmes didactiques que par leur quantité et leur diversité.

Or, la diffusion des connaissances avancées restant confinée à un petit groupe professionnellement intéressé, les experts peuvent consentir des efforts importants à l'acquisition d'une importante collection d'algorithmes et de connaissances isolées. Ils n'ont pas de raison impérieuses d'être exigeants sur la rigueur, la qualité, l'organisation cohérente ou la communicabilité de ces connaissances.

A l'opposé la diffusion de l'art des mathématiques exclut - par définition - l'explicitation des instruments de production et de conviction. Pour que l'élève artiste puisse produire - et non pas seulement reproduire -, le professeur ne doit pas lui dire ce qu'il est nécessaire qu'il comprenne par

[5] Que l'on trouvera dans l'ouvrage de Montréal

lui même. Dans la Chine classique, la preuve est un instrument personnel de conviction et sa communication "explicite" n'est pas envisageable

D'autre part les connaissances populaires sont alors aussi peu coûteuses que possible.

Ainsi, dans tous les cas, dans ces sociétés, la pression didactique reste très faible et n'exerce qu'une faible influence sur l'évolution des savoirs. L'ésotérisme est la solution qui minimise les efforts d'apprentissage et d'enseignement d'une société. Mais permet-il une gestion démocratique ?

4.2.4. Illustrations historiques

La pratique ésotérique des mathématiques est universelle et constante. L'exemple typique est celui des Pythagoriciens, qui les utilisent pour conseiller les princes, lesquels ne s'intéressent guère aux moyens qui ont permis de les établir dès lors qu'elles sont efficaces. Mais dans l'Egypte ancienne, le partage est institutionnel : la pratique ésotérique est partagée entre les scribes et s'oppose à la pratique commune et officielle. Pour établir un partage, le scribe connaît des techniques ignorées de l'assujetti (et les exprime en hiératique), lequel peut néanmoins en contrôler l'équité dans son système (hiéroglyphique). Pour des raisons toutes différentes, à la Renaissance, Cardan ou Tartaglia, ne dévoilent pas leurs méthodes et de nos jours, le département d'état américain voulait placer sous secret militaire les mathématiques de la cryptographie et peut être toute la théorie des nombres.

4.3. La géométrie exotérique et la démonstration

Une connaissance est exotérique lorsqu'elle est partagée par la société de ses producteurs ou de ses experts avec le reste de la population.

4.3.1. Production, diffusion et institutionnalisation des connaissances nouvelles

Lorsque dans une société, d'experts ou non, le fait de *produire* des connaissances ou des techniques nouvelles devient une activité suffisamment recherchée, il en résulte plusieurs conséquences. D'abord cela crée à nouveau deux classes ou les producteurs sont comparables aux initiés et les et les autres aux béotiens. Mais la lente évolution pragmatique tend à être remplacée par des **débats**, plus rapides et permettant un meilleur contrôle intellectuel, les productions et les producteurs doivent être identifiés etc.

Le répertoire commun prend alors un statut nouveau : il doit être *explicite* (décrit exhaustivement) et *organisé*, pour rendre plus rapides les comparaisons et les confrontations (pour montrer la nouveauté pare exemple). Pour cela l'apparition d'un nouveau type de connaissances et de concepts est nécessaire et les raisons d'accepter ou de refuser une modification de répertoire tendent alors à devenir beaucoup plus explicites.

Les raisons d'adopter une connaissance dans la culture d'une société, ou de l'en rejeter, nous intéressent particulièrement parce que ce sont les mêmes qui interviennent pour la construction d'une enseignement. Elles sont très nombreuses et variées. La validité et la consistance de cette connaissance avec celles qui sont déjà connues interviennent d'abord ; mais aussi le "rendement" de leur usage par rapport à l'investissement nécessaire à leur acquisition. Ce terme de rendement couvre donc la fréquence d'utilisation, l'économie de pensée ou de travail que procure cette connaissance, la facilité de son acquisition et ses possibilités de diffusion, et même la qualité de sa représentation auprès des utilisateurs entrent en ligne de compte[6].

[6] Les principales propriétés requises d'une connaissance pour son usage ou pour son enseignement sont les suivantes : sa *pertinence* : la possibilité de repérer ses éléments concrètement significatifs dans la situation à résoudre, sa "réalisabilité" ou sa falsifiabilité : elle peut être effectivement mise en œuvre, son *adéquation* : elle résout le problème posé, son "optimalité" : elle résout le problème de la façon la plus économique, son idonéïté : elle est adaptée à la demande ou à l'attente d'un système extérieur. Ces propriétés découlent d'autres sur lesquelles nous reviendrons ultérieurement : La *complexité formelle* de son expression ou de sa construction, son *intérêt* sur un certain champ

Suivant les époques, suivant la culture scientifique de la communauté, les intérêts économiques des protagonistes et suivant la structure politique qui régit les débats, seules certaines de ces raisons doivent et peuvent être soumises à analyse et à débats.

4.3.2. L'organisation des savoirs pour la diffusion et pour les débats

Par définition le rapport exotérique s'établit entre deux interlocuteurs qui ont vis à vis d'une connaissance en jeu des positions différentes : des répertoires de référence, des usages et des modes de justification différents. Nous supposons seulement que c'est toujours celui qui reçoit la connaissance qui est le maître de l'accepter ou non. Nous avons vu précédemment que si la proposition nouvelle n'est pas acceptée d'emblée par l'opposant, le proposant doit essayer de construire une preuve en empruntant ses énoncés au répertoire de l'opposant. (situation identique à une situation d'enseignement). La difficulté vient de ce que le répertoire du destinataire de l'énoncé n'est pas connu de l'émetteur (et peut-être pas non plus du récepteur) et qu'il lui faut le rechercher "en aveugle" au cours du débat. Si le débat est public et si l'acceptation est collective, le répertoire accepté de tous peut être identifié et apparaît comme une "loi" capable d'arbitrer les devoirs du proposant et de l'opposant. Le proposant se détermine par rapport à ce qui est établi et n'a plus besoin de connaître son opposant. Mais si tous les énoncés de la théorie peuvent être remis en question dans ce débat, ou s'il s'agit de les communiquer (ou de les enseigner tous). Il est beaucoup plus économique

- d'abord de l'organiser totalement de façon déductive, cela permet de repérer tout ce qui a été établi et ce qui est nouveau et de l'établir,

- ensuite de choisir les énoncés primitifs les plus "universellement acceptés comme évidents.

Il n'est pas question d'expliquer dans le détail tous les aspects de l'émergence de la géométrie déductive par ces quelques considérations ergonomiques. Concevoir la connaissance comme le résultat d'une production humaine, et mieux, d'une genèse, d'une construction dont on peut rendre compte, et non pas seulement comme la découverte erratique d'une réalité ineffable a été une révolution philosophique et didactique majeure aux multiples facettes. Considérer que cette histoire collective à un sens et qu'on le peut simuler au niveau d'un individu en est une autre.

4.4. La diffusion et l'enseignement

4.4.1. Caractère didactique de l'organisation déductive de la géométrie

Par rapport à une collection d'algorithmes, le propre d'une théorie est de permettre à la fois la construction d'une infinité d'énoncés et de ne pas permettre la construction d'une démonstration commune unique. Par conséquent, s'il est possible de communiquer une méthode unique pour évaluer la validité d'une formule de la forme a + b = c où a, b, et c, sont des fractions il n'y a pas de méthode pour communiquer "la" géométrie, même élémentaire.

Mais même si l'enseignement n'a pour but que d'informer un partenaire - ou un élève - de l'état de l'art donc de transmettre un nombre fini d'énoncés, la diffusion - ou l'enseignement - de tous les résultats déjà acquis peut vite s'avérer très lourde. Si on suppose que l'impétrant a une certaine capacité à établir par lui même certains résultats, une méthode plus efficace est possible.

Alors les énoncés de la théorie sont répartis en quatre classes.

a) Certains énoncés sont proposés comme devant être acceptés (les "évidences", postulats, demandes ou axiomes),

b) d'autres sont exposés et démontrés par le diffuseur : les théorèmes, ils serviront de répertoire de référence et n'auront pas besoin d'être démontrés à nouveau,

c) d'autres sont proposés sous la forme de questions ou de conjectures, par le diffuseur ou par le récepteur, (les exercices, les problèmes). Ils ne peuvent entrer dans le répertoire de référence, et même s'ils sont rencontrés plusieurs fois leur démonstration doit toujours être produite.

d) d'autres enfin ne seront pas évoqués, ni même envisagés. [7]

Le rôle de la troisième classe est de préparer l'apprenant à poursuivre seul l'établissement ou l'apprentissage d'énoncés figurant dans la dernière. Les énoncés non abordés sont eux mêmes répartis en trois classes : ceux qui peuvent être considérés comme "évidents" ou faciles : ils constituent les assortiments d'exercices dont s'illustrent les meilleurs cours et où les théorèmes semblent fonctionner presque comme des algorithmes, ceux qui sont susceptibles d'être établis par des raisonnements de complexité et de difficulté raisonnables, et les autres.

Nous venons de montrer pourquoi un tel partage est inéluctable et quel rôle essentiel il peut jouer dans l'enseignement, pour minimiser le nombre d'énoncés à enseigner, et pour la découverte d'énoncés nouveaux. Les mathématiciens ne cessent pas de réorganiser les théories mathématiques pour les rendre plus propres à appréhender les problèmes nouveaux, autrement dit pour rendre plus puissante et générative la partie des mathématiques déjà connue.

Quels rapports ces organisations culturelles ont-elles avec le fonctionnement effectif des institutions humaines, des sujets et notamment des élèves ? Ont-elles une influence importante ? quelles propriétés interviennent ? cette intervention est-elle indépendante des dispositifs didactiques ou pédagogiques envisagés pour l'enseignement d'un énoncé isolé ? C'est une question centrale pour l'enseignement des mathématiques et pour la didactique.

4.4.2. Chronogenèse, topogenèse et didactique

La répartition effective des énoncés dans les différentes catégories didactiques joue un rôle central dans le fonctionnement des connaissances enseignées dont il fixe la forme et surtout le sens.

La topogenèse est l'organisation des connaissances obtenue à la fin d'un processus d'apprentissage ou utilisée à un moment de l'activité mathématique. On peut considérer que "l'état actuel" des connaissances mathématiques constitue une vaste topogenèse assez stable pendant la durée d'un enseignement. Une organisation déductive de la géométrie constitue une topogenèse : elle fixe une place et un rôle à chaque connaissance. La chronogenèse est l'organisation des connaissances (d'une sujet ou d'une société) dans l'ordre chronologique de leur acquisition (ou de leur découverte). Nous avons montré que dans la société des mathématiciens, la chronogenèse suit exactement une topogenèse déductive, quitte à la modifier.

---

[7] illustrations historiques
La pratique exotérique des mathématiques apparaît en un lieu, à un moment et dans des conditions bien délimités : le monde Grec entre le VI^ième^ et le IV^ième^ siècles. En simplifiant, l'ensemble de la société libre s'intéressent à ce que Thalès ramène de ses voyages et qu'il justifie (d'après Eudème). Pythagore, tout en reconstituant un contrat ésotérique avec la société, développe à l'intérieur de la secte le rôle du débat et de l'organisation déductive de ce bien commun qui devient une doctrine et bientôt une philosophie et non plus une simple expertise. L'éclatement du monde grec en cités, à la fois alliées et rivales, favorise le développement différencié des connaissances et leur communication, et donc aussi la diffusion écrite, des idées. De Platon à Euclide l'intérêt des mathématiciens et de la cité, se reporte de l'aspect empirique des choses sur leur connaissance théorique et rigoureuse. Avec Euclide et la fondation de la bibliothèque d'Alexandrie une révolution s'est accomplie.
Sous l'effet de la diffusion, le rôle des mathématiques et par conséquent le principe de leur organisation à profondément changé. Il est remarquable que cette évolution ne s'est pas produite dans d'autres cultures contemporaines ou postérieures, et qu'elle ne s'est pas faite pour d'autres types de connaissances que la géométrie.
La production de connaissances et d'idées nouvelles est encouragée. Elles ont un auteur qui sera peut être critiqué mais reconnu. Les connaissances devront être diffusée hors du cercle des experts. Aucune déclaration nouvelle n'est acceptable si elle n'est pas accompagnée de sa preuve dans les formes convenues, afin de permettent à chacun de la vérifier, ou encore si cette preuve ne permet pas de confronter la nouvelle proposition au corps des connaissances déjà établies. D'ésotériques ces connaissances sont devenues exotériques.

L'enseignant a intérêt à faire coïncider le plus possible la chronogenèse avec la topogenèse, pour des raisons d'économie et de légitimité, aussi bien interne et technique (vis à vis de l'élève) qu'externe et culturelle (vis à vis de la société qui le mandate). Mais cette stratégie présente des inconvénients : elle suppose que la production personnelle des connaissances mathématiques fonctionne sur le même modèle que les *formes actuelles* de la production sociale et professionnelle des mathématiques (ou plus précisément sur leur représentation). Or nous avons montré précédemment que ces démarches réelles étaient très différentes. La démonstration n'est pas un bon modèle pour décrire le cheminement de la pensée du créateur du théorème. Elle peut en décrire la conclusion, la partie finale et jouer un rôle dans l'étayage de sa conviction, mais les instruments de la pensée naturelle sont beaucoup plus riches, beaucoup plus puissants et rapides, plus rhétoriques, que la réduction au modus ponens ne le laisserait croire.

Choisir une organisation axiomatique comme base d'une topogenèse scolaire et déterminer les modalités d'une adaptation chronogénétique économique et efficace constituent un des points cruciaux pour l'enseignement. L'étude des conditions de ces choix et les lois d'équilibres qu les contrôlent sont des sujets d'étude essentiels pour la didactique.

Imposer la démonstration comme modèle de la pensée et même de l'activité mathématique est une des conséquences les plus dangereuses de l'optimisation spontanée de l'enseignement. On a observé[8] les effets de cette confusion dans l'enseignement : la difficulté des élèves à raisonner en se détachant de la forme standard des démonstrations constitue un véritable obstacle au dévelppement de leur activité mathématique. Il serait intéressant de savoir dans quelle mesure cette observation de didactique est révélatrice d'une difficulté épistémologique. Le modèle de construction déductive adapté à la géométrie n'aurait-il pas constitué un formidable obstacle historique aux progrès de la pensée algébrique ?

Existe-t-il un fonctionnement "naturel" de l'acquisition des connaissances que la psychologie, en particulier la psychologie génétique pourrait proposer ? Il suffirait alors de construire des organisations déductives aussi proches que possible de cette ontogenèse. Mais on peut en douter en observant le cours assez tourmenté des évolutions historiques de la topogenèse qui manifestent l'importance d'influences de toutes sortes notamment collective, et relativement peu un modèle universel. Il semble plus raisonnable de déterminer d'une part *les propriétés didactiques des organisations de connaissances* (en particulier des théories) ou plutôt l'influence de certaines de ces propriétés sur l'ensemble des dispositifs didactiques qui les accepteraient comme topogenèse, d'autre part les dispositifs didactiques qui permettent d'aménager localement le passage d'une chronogenèse adaptée à cette topogenèse. Il s'agit en fait de ce que les mathématiciens ont toujours fait de façon géniale ou non mais artisanale. La didactique des mathématiques tente de relever le défi de développer une science de ces phénomènes, science qui prendrait à sa charge l'étude des équilibres nécessaires à la diffusion des mathématiques.

5. Les propriétés ergonomiques de l'organisation de la géométrie et leur régulation

Des ouvrages comme ceux de Dieudonné, de Choquet, d'Artin et de Berger présentent entre eux des différences considérables. Ils ont succédé et sont aujourd'hui accompagnés d'un très grands nombre d'autres[9], moins célèbres mais d'ambitions similaires. Même sans tenir compte des ouvrages anciens, aucune autre branche des mathématiques n'offre aujourd'hui une richesse et une diversité de présentations comparable à celle de « la » Géométrie, au point d'ailleurs que Lucien Godeaux parlait "des" géométries.

Que signifient ces différences ? Le vingtième siècle semble avoir été constamment écartelé entre la position de Poincaré, a prioriste mais toute orientée vers l'utilisation et la position formaliste représentée par Hilbert. Il peut paraître très présomptueux pour des géomètres amateurs de vouloir s'immiscer dans ce débat. Mais en fait, l'argumentation des protagoniste est constamment nourrie de considérations de nature didactique et ergonomique. En effet selon l'organisation et la

[8] Art. Antibi
[9] cf bibliographie

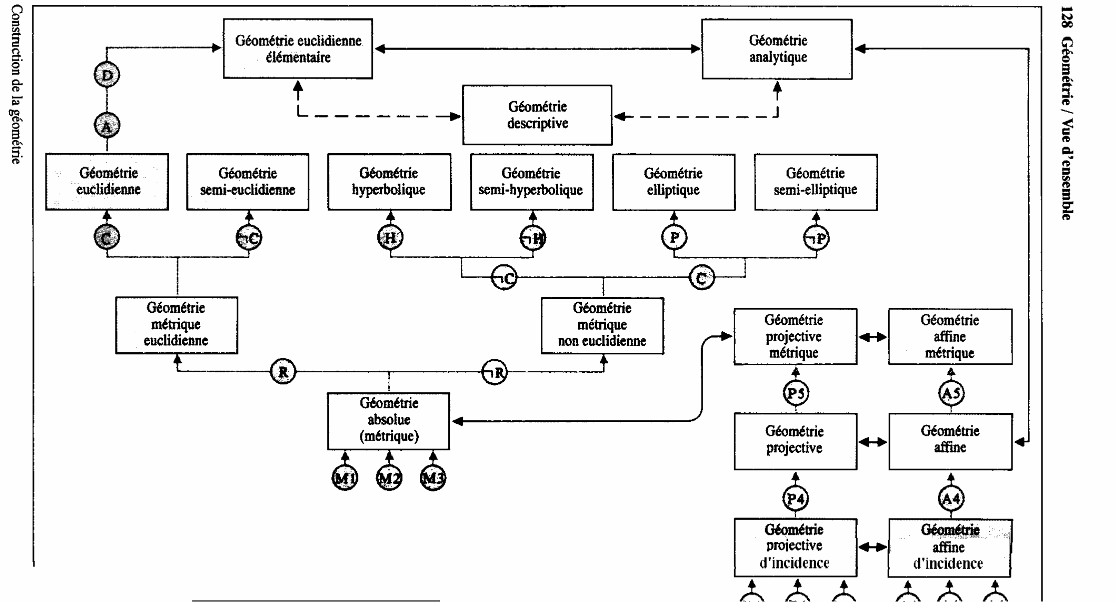


Schéma emprunté à F. Reinhardt & H. Soeder, Atlas des mathématiques, LGF 1997

présentation de la théorie, les activités mathématiques des élèves et leurs apprentissages demanderont ont plus ou moins d'efforts, seront plus ou moins fiables sur des domaines plus ou moins vastes… Quelle est la valeur de ces arguments ? Presque tous se réclament de l'évidence et de l'expertise mathématique de leur auteur.

Le livre de Berger à pour objet de montrer les branches de la géométrie qui restent vigoureusement vivantes, répondant ainsi à un constat d'une certaine forme de décès exposé dans celui de Dieudonné. Tous les autres réorganisent des savoirs établis, travail mathématique parfois considérable, "ingénieux". Quelles raisons évoquent-on, sur quelle gamme de variables sont-elles établies ? Quelle influence ces différences ont-elles ou devraient-elles avoir sur l'enseignement ? Est-il possible d'objectiver ces différences, de les quantifier et de rechercher des références objectives on peut trouver à leurs vertus?

5. 1. L'organisation de « la » géométrie

La géométrie en tant que partie de la culture est organisée en un très grand nombre de sous systèmes de connaissances qui diffèrent entre eux par leur contenu, leur organisation ou le milieu auquel ils se rattachent, systèmes très riches en connaissances et en applications elles-mêmes souvent complexes. (que l'on pense au théorème de Feuerbach par exemple ou à celui de Dandelin dans le secondaire).

5.1.1. L'organisation logique des théories géométriques

Ces sous systèmes (ces géométries) peuvent différer par certains énoncés vrais dans certaines, faux dans d'autres (Théories *L*. –différentes). Le tableau 1 présente un certain nombre de ces théories et les axiomes qui les discriminent. Mais elles peuvent aussi être *L*.-identiques et A--différentes c'est-à-dire différer par les systèmes d'axiomes qui les engendrent. Un exemple relativement récent est donné par les approches de Dieudonné et de Choquet dans leurs ouvrages respectifs. Dieudonné veut un système d'axiomes détaillé et qui permette d'introduire *progressivement* les structures algébriques puis géométriques (formelles) fondamentales. Choquet veut une axiomatique réduite (simple dit-il) aux axiomes forts c'est à dire donnant vite accès à des théorèmes non évidents, et intuitifs. Elles peuvent aussi être A—identiques mais T--différentes en ce sens que les objets, les définitions des mêmes objets, l'ordre des énoncés peuvent être différents. Il faut enfin distinguer des exposés qui conduisent finalement à concevoir la même organisation théorique comme référence (topogenèse) : même objets, même définitions, même ordre déductif terminal, mais qui diffèrent par des variables plus spécifiquement didactiques comme la répartition des énoncés entre théorèmes et problèmes, l'ordre chronologique d'introduction (chronogenèse), la forme linguistique etc.

Dans son ouvrage cité en référence, et dans son désir de favoriser la vision, de montrer des énoncés « fins » (simples à énoncer difficiles à résoudre) et de montrer que la géométrie est vivante et utilisée, Marcel Berger présente toutes sortes d'exemples de ces différences.

5.1.2. Les "milieux" des théories géométriques

Chaque sous-système est généralement associé à un « milieu », c'est à dire à un ensemble de conditions matérielles, de situations ou de problèmes qui justifient la mise en œuvre conjointe, simultanée ou non des connaissances de ce système. Par exemple dans la construction de figures planes, la restriction à l'usage de la règle (graduée ?) et du compas détermine un « milieu », un champ de possibilités, de questions résolubles et de concepts différent de ce que procurerait l'usage des systèmes articulés ou à glissières. Les comparaisons d'Henri Lebesgue[10] illustrent parfaitement cette notion de milieu.

Un milieu détermine des fréquences d'emploi et de co-présence des énoncés, qui à leur tour justifient que ces énoncés soient générés et contrôlés par des concepts spécifiques, regroupés en définitions, convenus en théorèmes etc. pour des raisons ergonomiques. La géométrie descriptive constitue un milieu (restreint) pour la géométrie projective, les pavages du plan constituent un milieu entre autres pour la théorie des groupes… Pour identifier les "milieux" peut être fort différents, créés par les choix des auteurs d'ouvrages cités ci dessus, l'approche anthropologique propose d'étudier directement les "praxéologies" (tâches, techniques et technologies) associées à ces ouvrages.

5.1.3. Les variables ergonomiques et didactiques

L'organisation d'une théorie mathématique répond à des impératifs spécifiques : il s'agit de favoriser l'accès à des questions nouvelles ou de faciliter l'usage d'un concept fréquemment sollicité mais incommode. Le choix d'enseigner une ou des géométries, présentées de telle ou telle manière manifeste des décisions de nature didactique. Quelques unes de ces raisons sont parfois « explicitées » ou au moins évoquées par les auteurs. Elles visent toutes à minimiser certaines variables de nature ergonomique pour diminuer certains types d'efforts ou de difficultés du destinataire (éventuellement en fonction d'une projet précis qu'on lui prête) ou de l'apprenant. De sorte que les modifications apportées dans un cas comme dans l'autre remplissent des fonctions similaires et sont au fond de même nature.

Elles agissent sur des variables de nature informationnelle (liées à la quantité d'information ou à la complexité ou à l'ergonomie), dont nous donnerons des exemples plus loin. Un inventaire raisonné de usages effectifs de ces variables montre à quel point elles sont considérées par les mathématiciens de façon intuitive, locale et partielle. En l'absence de « théories » mathématiques qui engloberaient à la fois la complexité des connaissances et de leurs fonctions, celle des situations ou des milieux où elles se manifestent, et celle des caractéristiques des sujets et des institutions au sein desquelles ils agissent, il semble impossible d'en rationaliser l'usage. Pourtant si la théorie des situations ne permet pas encore de poser les équations de choix qui permettraient de hiérarchiser ces variables, elle permet déjà d'identifier certains phénomènes dans lesquels elles entrent. Les plus importants sont sans doute ceux qui sont liés à la gestion, par les professeurs, d'une variable que nous pourrions appeler "*la valeur de l'activité mathématique des élèves*" et que nous allons tenter de cerner ci-après. Pour optimiser cette variable, les professeurs ménagent ce que nous avons appelé des dé-mathématisations et des re-mathématisations qui concernent aussi bien

- les situations proposées et les milieux créés,
- les connaissances des élèves,
- leurs répertoires, des décisions ou des milieux.
-

[10] Henri Lebesgue, « Leçons sur les constructions géométriques », Gabay, Paris

5.2. Dé-mathématisation, re-mathématisation

5.2.1. Apprentissage et institutionnalisation d'une connaissance.

A un instant donné dans une situation problématique ou dans un milieu donné, un sujet (ou une institution) arrête sa décision grâce à la construction opportune d'une connaissance c adéquate (sa réponse) à l'aide de R son répertoire de connaissances et de savoirs. Cette construction peut prendre la forme d'une suite de déclarations, d'un texte assez complexe, d'une organisation complexe d'actions etc. (fig 1). Lorsque les déclarations et les constructions produites sont de nature mathématique, et que les étapes de la construction sont repérables comme des énoncés de mathématique, elle est ce par quoi nous décrivons une *activité mathématique* m(c)[11].

Si le milieu conduit à mobiliser fréquemment « la même » connaissance, la reconstruction permanente de la conclusion peut s'avérer très coûteuse (en efforts, en temps etc.) Il paraît alors (implicitement plus facile au sujet de joindre directement la connaissance en question à son répertoire R, de façon à la produire "directement" à la demande sans avoir à la reconstruire.[12]

Le passage du statut de connaissance construite opportune à celui d'élément directement disponible dans le répertoire constitue un apprentissage" lorsqu'il s'agit d'un sujet et une institutionnalisation lorsqu'il s'agit d'une institution. Il consiste dans ce cas en une augmentation de son "répertoire officiel" (par exemple en mathématiques la publication des théorèmes, ou celle des lois et règlements dans les sociétés).

L'apprentissage ou l'institutionnalisation se produit lorsqu'il apparaît au sujet ou à l'institution (à tort ou à raison) que E_2, le coût de l'apprentissage A(c) de c dans R (c'est-à-dire celui de l'augmentation du répertoire), augmenté du coût global de l'usage de c dans ce nouveau répertoire,[13] est sensiblement inférieur à E_1le coût global de l'usage de *m(c)* dans l'ancien[14].

Ce processus régit l'activité mathématique : certaines suites d'énoncés peuvent être condensés en *théorèmes*, certains textes en *définition*, certaines suites d'actions en « *algorithmes* » mais seuls les résultats nouveaux "non triviaux" à un moment donné peuvent faire l'objet d'une publication. Théoriquement cette publication dispense les autres mathématiciens de l'obligation de répéter la construction (du moins à l'identique) de ces objets qui de ce fait tendent à devenir connus, puis banals, puis triviaux.

5.2.2. L'activité mathématique dans l'enseignement d'une connaissance

Cette loi régit aussi les processus didactiques où l'on ne s'occupe que d'objets mathématiques établis. Le professeur doit distinguer le répertoire officiel des élèves, leurs théorèmes, dont ils peuvent faire usage comme le font les mathématiciens (sans les re-démontrer), et les problèmes qui doivent faire l'objet d'un travail *m'(c)* qui **simule l'activité mathématique** des mathématiciens. Les rapports entre le champ des théorèmes scolaires et celui des problèmes effectivement résolus est l'instrument même du travail didactique.

---

[11] c résulte de < (R) → m(c) > (où "→ " désigne la construction de c dans R)

[12] c résulte de < (R; c) - - - c > (où - - - désigne l'extraction de c du nouveau répertoire (R; c)

[13] qui est la somme, sur l'ensemble S des situations, occasions d'emploi de c, d'une fonction du coût de l'extraction de c dans le nouveau répertoire : (R; c) - - - c, et d'une fonction de la fiabilité F de c et de l'enjeu I dans chaque situation.

E_2 = coût de A(c) dans R + $\sum_S co\hat{u}t_s(R---c) + f(I_s, F_s)$

[14] qui est la somme, sur l'ensemble S des situations, occasions d'emploi de c, d'une fonction du coût de la production de c dans l'ancien répertoire : R → m(c) , et d'une fonction de la fiabilité F de c et de l'enjeu I dans chaque situation.

$E_1 = \sum_S (co\hat{u}t_s(R \to m(c)) + f(I_s, F_s'))$

Il régit enfin, mais de façon plus complexe, les processus cognitifs. L'apprentissage dépend des mêmes paramètres mais ils interviennent dans la mise en mémoire de façon beaucoup plus complexe, de même que les modes psychologiques d'établissement des connaissances sont mal représentés par les processus sociaux de reconnaissance.

Le travail de l'enseignant consiste à augmenter le répertoire officiel et effectif de ses élèves. Il existe des moyens de faire entrer une connaissance dans un répertoire qui sont non spécifiques - ils ne font pas appel au sens ni à l'usage de cette connaissance -, la répétition par exemple. Ils ne sont pas toujours inefficaces et les procédés didactiques basés sur ces moyens constituent l'essence de la didactique traditionnelle, populaire, et administrative. Mais il est acquis que le sens joue une rôle essentiel dans les apprentissages à cours et à long terme. Or l'acquisition par des processus "naturels" semblables à ceux évoqués ci-dessus est évidemment beaucoup plus coûteuse et parfois tout aussi inefficace que la précédente. Le travail de l'enseignant est donc de trouver un équilibre dynamique optimal entre ce qu'il peut obtenir par l'un et l'autre de ces moyens. La partie délicate de ce programme est pourtant de maximiser **l'activité mathématique de l'élève** et de la rentabiliser au maximum. Le rendement de cette activité en terme d'augmentation du répertoire est en balance (en concurrence et en coopération), avec celle des autres modes d'acquisition. Or il lui est très difficile d'apprécier la valeur de l'activité à partir de ses manifestations, si les conditions dans lesquelles elle se produit ne sont pas contrôlées. Réciter, citer opportunément, produire en repensant et construire une connaissance sont des activités mathématiques différentes, qui ont des rendements didactiques très différents. Le moyen de ce contrôle est "la situation didactique" qui fixe le répertoire connu, ce qui est demandé, ce qui est donné, et les ressources du milieu utilisables. Etant donné que toutes les connaissances mathématiques qui permettent d'établir ce que l'on attend de l'élève sont établies et aujourd'hui accessibles. L'activité mathématique des élèves dépend du contrôle didactique du milieu[15].

L'appréciation de ce qui augmente ou diminue, valorise ou dévalorise l'activité mathématique des élèves devient un facteur important dans l'activité d'enseignement.

Par exemple avoir une calculette a sa disposition et l'utiliser dans chaque activité d'apprentissage des tables et des opérations aurait l'influence la plus funeste sur cet apprentissage (quelle que soit la didactique retenue). L'élève n'a plus qu'à lire et activer le symbole de l'opération, à lire et transcrire les chiffres des nombres donnés etc. Ce sont des activités mathématiques très différentes de la mise en œuvre d'un répertoire de tables et d'un algorithme de calcul. La répétition n'améliorera que la vitesse d'exécution dans le premier cas alors qu'elle peut aussi améliorer la connaissance des nombres et de quelques connaissances par le contrôle que l'élève doit mettre en œuvre dans ces activités complexes pour lui. Si vu d'assez loin il n'y a guère de différence entre exécuter un calcul par un algorithme ou par un autre, on peut même discuter l'intérêt de l'apprentissage du calcul manuel en tout cas le rendement didactique et scolaire n'est pas le même. Le professeur aura tendance à dire que la plus grande partie des activités mathématiques nécessaires à la réalisation de l'exercice sont passées de l'élève à la machine. L'activité de l'élève a été à l'avance "démathématisée", son répertoire n'a aucune chance de s'augmenter des connaissances visées.

Il en résulte l'idée suivante : une situation didactique nécessite pour son évolution et sa conclusion que certaines connaissances mathématiques soient fournies, soit par l'élève, directement prises dans son répertoire, ou produites par son activité mathématique propre, soit pas le professeur, soit par le milieu. La connaissance fournie par un des sous systèmes n'a pas besoin de l'être par les autres. Cette production peut donc être perçue comme une aide ou comme une limitation à l'activité des autres.

- comme une aide, dans la mesure où les autres systèmes n'auraient pas pu la fournir (aussi bien aussi vite…), si elle permet à la situation didactique de continuer à se dérouler alors qu'elle se serait arrêtée, si elle permet à l'élève de s'affranchir d'une question subalterne oiseuse pour améliorer la valeur mathématique de son activité, etc.

- - ou comme une limitation illégitime si elle prive l'élève de la possibilité d'exercer lui même une activité nécessaire à son apprentissage.

[15] Ce contrôle est l'objet de la théorie des situations didactiques

Il est intéressant de préciser et si possible de formaliser le point de vue des professeurs en précisant comment ils essaient de saisir et de "mesurer" la valeur mathématique de l'activité de leurs élèves.

5.2.3. Mathématisation, démathématisation, remathématisation

5.2.4. Les transformations des mathématiques, la démathématisation et la remathématisation

5.2.2. La mathématisation et la dé-mathématisation des répertoires.

Les connaissances sont produites et compilées par des répertoires différents qui se superposent et se contrôlent éventuellement mutuellement. Un répertoire est d'autant plus mathématisé que son utilisation est plus sûre : les connaissances sont productibles, étayables et vérifiables, sous le contrôle de raisonnements et de calculs et par le recours éventuel à des méta-répertoires. Ces propriétés vont généralement de pair avec une structure « hiérarchique » plus dense et plus « logique » ou rationnelle par rapport aux connaissances « erratiques » faiblement reliées aux autres connaissances. La mathématisation de la mémoire remplace des énoncés directs par des énoncés de contrôle et par des moyens d'organisation. Cette mathématisation a des propriétés ergonomiques : si les connaissances rares sont remplacées par des moyens de contrôle plus fréquemment utilisés (une classification par exemple) et si la syntaxe d'identification reste simple. Mais cette économie de principe n'est pas intrinsèque ni suffisante: le répertoire doit être aussi « adapté » au milieu, c'est à dire rapide, efficace et économique pour traiter les problèmes qui s'y rencontrent plus fréquemment. Il doit permet de retrouver une connaissance donnée d'autant plus rapidement qu'elle est plus fréquemment utile. La *familiarité* d'une connaissance permet de la dé-mathématiser, c'est à dire de la détacher de sa structure de contrôle pour la mettre en œuvre plus rapidement. Un répertoire est accomodé à un milieu (ou à un champ d'applications) lorsque sa structure de production et de contrôle est « adaptée » à la fréquence de rencontre de façon à rendre minimum le coût global de son fonctionnement. (entre le coût de l'acquisition, celui de la production et celui des risques encourus par déperdition du contrôle). Le répertoire est ainsi déterminé par l'équilibre entre des forces de dé-mathématisation et des forces de mathématisation. En fait, elles maintiennent le fonctionnement du sujet entre les bornes déterminées par ses capacités, tout en lui permettant de traiter des problèmes objectivement plus complexes . L'apprentissage d'une nouvelle connaissance est d'autant plus facile qu'il se produit par le jeu de processus déjà existants dans le répertoire, que la fréquence de rencontre et la forme d'étayage (de vérification) justifie l'économie que procure cet apprentissage.

***

Le « remplacement » d'une démonstration par le théorème correspondant, d'une définition par son étiquette, ou d'un calcul original par un algorithme correspond à une « dé-mathématisation » de la connaissance. Elle augmente le répertoire et diminue la difficulté ou la complexité d'un raisonnement. Cette dé-mathématisation rend plus rapide la production de la décision, mais elle tend à lui permettre d'échapper au contrôle que confère la production, à la priver de sens, ou du moins à lui permettre de se passer provisoirement de sens. Bien sûr globalement la dé-mathématisation est indispensable à l'exercice et à l'augmentation des mathématiques.

5.2.3.Les transformations des décisions et du milieu

Les mêmes règles s'appliquent à l'élaboration des décisions grâce aux connaissances, et à l'organisation du milieu. Les sociétés et les sujets utilisent les propriétés des milieux qui les entourent ou qu'elles fabriquent pour se décharger des processus complexes ou trop coûteux. Ecrire ou dessiner, utiliser une calculette ou faire un nœud à son mouchoir sont des recours de ce genre. Le milieu est le partenaire indispensable de la pensée, qu'il s'agisse de distinguer de classer, d'ordonner, etc. Il y a une logique et une ergonomie du recours au milieu comparable bien que très différente à celle de l'organisation des productions de connaissances, des répertoires ou des actions.

5.2.4. L'isostasie des mathématisations et des démathématisation

Comprendre une notion mathématique c'est comprendre l'organisation générale des équilibres entre ces différents processus qui lui donne son intérêt et donc ses possibilités d'exister, chez un individu aussi bien que dans une société. Ainsi l'axiomatisation, le choix d'une axiomatique et son usage ont pour objet de permettre à un répertoire de « glisser » d'un champ à un autre légèrement ou fortement différent sans que soient modifiés trop profondément les capacités informationnelles de traitement nécessaires. La diffusion des connaissances mathématiques suit approximativement les mêmes schémas et les mêmes lois. La « percolation » des idées entre des institutions aussi.

5.3. Exemple : les propositions de Dieudonné et de Choquet

6. Les situations didactiques de l'organisation de la géométrie

L'usage local et opportuniste de la déduction a été présenté plus haut comme une forme de la rhétorique. Les professeurs cherchent à provoquer l'engagement personnel de l'élève dans des débats, mais en même temps ils doivent marquer toute les différences éthiques et scientifiques qui opposent le désir ou l'intérêt de convaincre à tout prix et le recours à une justification totalement et explicitement placée sous le contrôle de celui qui l'acceptera, avec un code minimal « universel » de non contradiction. Ces pratiques conduisent-elles rapidement à rechercher des organisations générales des savoirs ?

Nous avons aussi signalé rapidement l'intérêt pour la société que l'enseignement vise une organisation commune des savoirs, donc une topogenèse plus ou moins complexe mais unique. Le professeur a intérêt à utiliser aussi un modèle chronologique au moins pseudo-axiomatique dans la mesure où il veut éviter d'avoir à utiliser des théorèmes avant de les avoirs « enseignés », ou des objets ou des concepts avant de les avoir « introduits », ne serait-ce que pour se soustraire aux reproches de certains élèves. Si, de plus, il considère qu' « enseigner » c'est démontrer et introduire c'est définir (pour se défendre du reproche d'enseigner des choses fausses, incompréhensibles ou inacceptables, il doit se restreindre à une chronogenèse strictement axiomatique. Alors, le seul choix qu'il lui reste est de prendre la topogenèse comme modèle de sa chronogenèse. Nous verrons dans le paragraphe suivant les difficultés que soulève cette solution. Car les causes des apprentissages ne sont pas en général les raisons de savoir. La topogenèse est une re-production très éloignée des conditions originelles, psychologiques et didactiques des chronogenèses. Leur ordonnancement suppose des analyses complexes[16], une classification générales des situations didactiques[17] ne suffit pas.

Mais il s'agit au préalable d'identifier quels types de situations « non didactiques » pourraient permettre aux élèves d'avoir une idée du fonctionnement et de l'organisation de la géométrie comme corps de connaissance organisé et axiomatisé.

6.1. La recherche de l'évidence

La première situation est banale. Un interlocuteur demande à l'autre de lui rendre « évident » un énoncé qu'il est prêt à accepter. C'est la demande d' « *explications*[18]». Elle est basée sur l'idée

16 par exemple : BROUSSEAU G. (1981) Problèmes de didactique des décimaux. in revue Recherches en didactique des mathématiques. vol.2.1. Ed La pensée sauvage. Grenoble.

17 Telles que celle Telle que celle que l'on trouvera dans BROUSSEAU G. (1998) "La théorie des situations didactiques et ses applications" ouvrage en préparation sous la direction de Jean Portugais (Université de Montréal) Sous presse chez Gaétan Morin Ed. (Montréal)

18 Cf Bendeko Mopondi « Les explications en mathématiques » in revue Recherches en didactique des mathématiques. vol.2.1. Ed La pensée sauvage. Grenoble.

qu'il existe « une » vérité, commune ou « partageable » entre les différents interlocuteurs. Cette explication consiste pour l'explicateur à rechercher dans le répertoire du demandeur les connaissances qu'il a déjà admises et à les relier par des raisons dont il a l'usage. En fait les raisons de ne pas trouver un énoncé « évident » sont si nombreuses dans la vie courante, que le répertoire est fatalement étendu à un grand nombre de connaissances et de raisons a priori rhétoriques. C'est le jeux du pourquoi des enfants, auquel peuvent se livrer avec malignité aussi des élèves plus grands. La délimitation des questions et des raisons du champ constitue l'objectif premier d'une culture, et en particulier de la culture géométrique. Il est clair que l'explicateur « trouve » implicitement que ses raisons sont évidentes, et qu'il ne peut pas les imposer au demandeur. Ce qui crée une distance, que l'accord vient annihiler. Le demandeur peut donc accepter comme des évidences des énoncés qui ne le sont pas dans le simple désir de se rapprocher de l'explicateur (l'inverse se produit aussi). Il est donc essentiel que l'évidence soit « éprouvée » par l'intérêt porté par les deux interlocuteurs au milieu « source » de l'évidence. Ce sont les deux motivations antagonistes de cette situation :

- la recherche de « la » vérité conduit à fouiller toujours davantage l'opinion de l'autre dans la recherche d'une identité complète de sentiments ou d'opinions sur la situation, c'est le moteur universel de tous les prosélytismes radicaux

- la recherche d'un consensus, qui conduit à accepter (comme évidents) les propositions de l'autre comme compatibles, approchées ou même identiques malgré des différences visibles

6.2. La recherche de la consistance

Une coopération effective nécessite plus qu'un accord d'évidence. Il faut être assuré de ne pas trouver de décisions contradictoires parmi les conséquences des connaissances communes. L'idée d'accord suffisant est différente de celle d'évidence. Elle conduit à traquer moins les désaccords que les contradictions et les ambiguïtés

6.3. La construction d'un résumé

Il s'agit de « résumer » un ensemble d'énoncés, donc de proposer un système capable de générer cet ensemble d'énoncés à partir d'un nombre plus petit d'informations. Cette situation couvre un champ plus large que la recherche d'une axiomatique pour un ensemble amorphe d'énoncés. Elle peut conduire aux stratégies statistiques

6.4. La modélisation[19]

C'est une situation très proche de la précédente. Le résumé est choisi explicitement (et non plus seulement produit) en référence avec un usage particulier du résumé : Le modèle est un résumé mais n'est pas exhaustif en ce sens qu'il ne permet pas de rétablir tous les énoncés d'origine. Par contre il doit satisfaire des conditions supplémentaires, être consistant, générer un système « approché », discriminer un énoncé, etc.

6.5. L'étude des modèles

Qu'il s'agisse de comparer des modèles, d'en choisir un pour établir l'indépendance d'un énoncé par rapport à un système, le sujet franchit un pas important lorsqu'il passe de l'usage d'un modèle à son étude d'un point de vue extérieur. Les comparaisons d'axiomatiques pour l'introduction d'un objet aussi complexe que les géométries ne sont sûrement pas des situations que les élèves ou même les étudiants peuvent aborder raisonnablement. La manipulation de modèles peut leur donner une idée assez précises de quelques principes.

6.6. L'établissement de « la » vérité

L'établissement et la gestion individuelle et sociale de « la » vérité dans une société est un des apprentissages essentiels dont l'enseignement est dévolu à l'école. Entre la croyance absurde en l'existence partout et toujours d'une vérité unique, universelle, explicitable, publiable et imposable urbi et orbi, et l'acceptation non moins absurde d'un relativisme absolu et d'un inconsistance généralisée, la pratique humaine de la vérité est un difficile apprentissage et une négociation constante, à la charge de la société autant que des enseignants et que des élèves. Il n'y a pas « une » géométrie plus vraie qu'une autre, et toutes les géométries ne sont pas équivalentes pour des usages déterminés. En particulier, nos rapports avec notre espace commun et nos connaissances de cet espace peuvent être universellement partagées.

7. La géométrie, modèle didactique pour d'autres théories mathématiques ?

La géométrie intervient, par ses objets, par ses énoncés, par ses méthodes, et par les représentations qu'elle propose dans de très nombreuses branches des mathématiques et des sciences, et quelque fois de façon inattendue. Il est fréquent de défendre l'enseignement de la géométrie au motif qu'elle préparerait les élèves au raisonnement mathématique, c'est à dire à un mélange de raisonnement déductif et d'imagination inductive, activées par notre manipulation familière des images. Il est inutile de reprendre ici tous les arguments qui ont été appelés à l'appui de la défense de l'enseignement de la géométrie, ni d'ailleurs de les réfuter. Il s'agit seulement ici de s'interroger sur les points suivants :

L'assimilation du raisonnement mathématique avec le raisonnement en géométrie (que je qualifierai de « visio-déductif »), puis avec le raisonnement déductif, remise en honneur après l'écroulement du projet dit des mathématiques modernes est-il fondé ? Ce processus a dévalué la partie du « *raisonnement* » qui, à l'école primaire consistait à ordonnancer, à annoncer et à justifier un ensemble de tâches, ou un calcul, au profit exclusif du raisonnement déductif, c'est à dire à l'articulation logique des relations. Est-ce bien adapté ?

L'opposition exacerbée entre le raisonnement déductif en géométrie et le « calcul » a conduit à traiter l'algèbre comme un recueil d'algorithmes. Elle a contribué à faire disparaître l'algèbre en tant que théorie identifiable de l'enseignement secondaire, ce qui a fini par perturber profondément les premiers enseignements de l'arithmétique élémentaire.

Le fait que les probabilités et surtout les statistiques ne puissent s'inscrire dans les schémas didactiques développés par les professeurs de mathématiques sur le modèle de la géométrie en rend l'enseignement très difficile, du moins en France. Est-ce sans rémission ?

La confusion de la topogenèse déductive avec la chronogenèse didactique s'est nourrie d'un succès relatif dans le domaine de la géométrie au niveau secondaire. Quelles conséquences peuvent avoir les réifications des méthodes didactiques développées en géométrie dans les autres secteurs ?

8. Conclusions

Ma conclusion sera que l'espoir de bénéficier d'une didactique spontanée par la pratique précoce de la géométrie est un espoir fallacieux. Ce qui ne veut pas dire qu'il faut négliger l'enseignement de la géométrie. Plus que pour d'autres secteurs des mathématiques et à cause du poids de certaines « évidences » et de leur ancienneté il est nécessaire de repenser son enseignement à la lumière d'une didactique scientifique.

Bibliographie

Théorie des situations didactiques en mathématiques

Articles

N. et G. BROUSSEAU. (1987). Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire. 535 pages IREM de BORDEAUX.

BROUSSEAU G. (1987) "Didactique des mathématiques et questions d'enseignement: propositions pour la géométrie" in Les sciences de l'éducation pour l'ère nouvelle, Didactique 1. vol 1/2 pp 69-100. CERSE. Caen

BROUSSEAU G. (1996) "Promenade avec Thalès entre la maternelle et l'Université". in Commission Inter-IREM Premier Cycle Autour de Thalès. pp. 87 -124.

BROUSSEAU G. (1997) "Theory of Didactical situations in Mathematics". Recueil de textes de Didactique des mathématiques 1970-1990" traduction M. COOPER et N. BALACHEFF, Rasamund SUTHERLAND et Virginia WARFIELD. (KLUWER).

BROUSSEAU G. (1998) "La théorie des situations didactiques”. Recueil de textes de Didactique des mathématiques 1970-1990" présentés par M. COOPER et N. BALACHEFF, Rasamund SUTHERLAND et Virginia WARFIELD. (La pensée sauvage, Grenoble)

Thèses

Galvez Perez Grécia **;** El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano : una proposición para la ensenanza de la geometria en la escuela primaria. **Psychologie cognitive**; Université de Mexico ; **1985**

Berthelot René & **Salin** Marie-Hélène) ; Représentation de l'espace chez l'enfant et enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire. **Didactique des Mathématiques**; Université Bordeaux I; **1992**

Bautier Thierry; Etude des médiations dans l’enseignement des transformations géométriques. **Didactique des Mathématiques**; Université Bordeaux I; **1993**

Fregona Dilma ; Les figures planes comme "milieu " dans l'enseignement de la géométrie: interactions, contrats et transpositions didactiques. **Didactique des Mathématiques**; Université Bordeaux I; **1995**

Molina Carmen; Integración del invidente en la clase de matemáticas **(Didactique des Mathématiques;** Universidad de Zaragoza; **1999**

Ouvrages de ou sur la géométrie didactique

Artin Emil ; Géométric Algebra ; Interscience Publishers ;1957

Berger Marcel ; Géométrie Nathan ;1990

Choquet Gustave ; L’enseignement de la géométrie Hermann ;1964

Deltheil R. **et Caire** D. **;** Compléments de Géométrie ; Baillère ; 1951

Dieudonné Jean ; Algèbre Linéaire et Géométrie élémentaire Hermann 1964

Pour l’honneur de l’esprit humain ; Hachette ; 1987

d’Ocagne Maurice ; Cours de Géométrie de l’Ecole Polytechnique ; 1918-1919

Efimov Nicolas ; Géométrie Supérieure ; Editions de Moscou ; 1978-1985

Forder H. G. ; Geometry ; Hutchinson's university ;1950

Fresnel Jean ; Géométrie ; Université Bordeaux 1, 1990

Godeaux Lucien ; Les Géométries ; Armand Colin ; 1952

Gonseth Ferdinand ; Les mathématiques et la réalité ; Albert Blanchard ; 1936-1974

d'Ocagne Maurice ; Cours de Géométrie de l'Ecole Polytechnique ; 1918-1919

Lebesgue Henri ; Leçons sur les constructions géométriques, (1941) ; Gabay ; 1987

Levy-Bruhl Paulette ; Précis de géométrie ; P.U.F. ; 1967

Poincarré Henri ; La Science et l'hypothèse ; Flammarion ; 1916

La valeur de la science ; Flammarion ; 1938

Article d'André **Lichnerovicz** dans **Pier** Jean Paul ; Development of Mathematics 1900-1950 ; Birkhauser ; 1993

VEB ; Petite encyclopédie des Mathématiques ; Pagoulatos ; 1980

Reinardt Fritz et **Soeder** Heinrich ; Atlas Mathématique ; Pochothèque ; 1974 1997