Ératosthène et la théorie des médiétés

Bernard Vitrac

Ératosthène et la théorie des médiétés

Bernard Vitrac, CNRS UMR 8567, Centre Louis Gernet, Paris.

introduction

L'histoire des sciences grecques anciennes retient communément trois choses d'Ératosthène : son traité de géographie, en 3 Livres, et sa célébrissime mesure du méridien terrestre[1], deux importants contributions, auxquelles, dans un ordre d'idées un peu différent, on adjoint le fait qu'il a dirigé la bibliothèque d'Alexandrie et a probablement été le précepteur de l'héritier du trône. Natif de Cyrène, comme la reine Bérénice, il a été en relation directe avec le pouvoir Lagide et sa position institutionnelle forte pourrait, selon G. Aujac, avoir eu une certaine incidence sur l'édition et la transmission des textes scientifiques grecs anciens. Ses contributions aux mathématiques plus "abstraites" (géométrie, arithmétique), sont, à une notable exception près, plutôt mal connues. Elles sont souvent évoquées avec une certaine condescendance dans l'historiographie récente des mathématiques grecques, surtout quand celle-ci est le fait des mathématiciens.

L'exception, c'est bien entendu le crible (τὸ κόσκινον) qui porte son nom, dont on retient surtout le caractère extrêmement élémentaire. On s'appuie sur l'exposé qu'en fait Nicomaque de Gérase dans son *Introduction arithmétique* (Livre I, chapitre 13), ou plutôt sur l'interprétation classique de ce célèbre passage : le procédé permet de déterminer les nombres dits "premiers" — ceux dont les seuls diviseurs sont l'unité et le nombre lui-même — ou, du moins, les plus petits d'entre eux. Sa simplicité devient en quelque sorte le symbole d'une activité très en dessous des réalisations des grands auteurs de la même époque : Euclide, Archimède, Apollonius, pour ne citer que ceux que nous connaissons le moins mal. Elle pourrait justifier, au moins en ce qui concerne les mathématiques, le surnom quelque peu dévalorisant de "Bêta" qui s'appliquerait assez bien à un protagoniste de second rang[2].

Les historiens restent prudents à cause du caractère extrêmement partiel de notre connaissance des travaux arithmétiques ou géométriques d'Ératosthène. S'il a consacré des écrits à ces disciplines, ils sont perdus et nous sommes donc tributaires de témoignages postérieurs et de citations parfois tardives. Les spécialistes ne s'accordent pas sur le nombre, les titres, et la nature des ouvrages mathématiques que l'on peut raisonnablement lui attribuer. En suivant les sources anciennes, nous pouvons envisager trois titres d'ouvrages : le *Πλατονικός,* le *Μεσολάβος*; et le *Περὶ τῶν μεσοτῆτων*. Je propose d'examiner ce que les citations et témoignages nous apprennent à leur sujet, le contexte scientifique dans lequel ils s'insèrent, les (modestes) indications de contenu à propos desquelles nous pouvons spéculer.

[1] Le titre de l'ouvrage est explicitement cité par Héron, *Dioptre,* 302.16-17 Heiberg : « ἐν <τῷ> ἐπιγραφομένῳ περί τῆς ἀναμετρήσεως τῆς γῆς ».
[2] Cf. ici même l'article de B. Besnier.

I. les écrits mathématiques d'Ératosthène

Aucun de ces trois titres ne figure dans la notice biographique de la *Suda*. Le *Πλατονικός* est mentionné, à deux reprises, par Théon de Smyrne (IIe s.)[3], le *Μεσολάβος* et le *Περὶ τῶν μεσοτῆτων* apparaissent seulement dans la *Collection mathématique* de Pappus d'Alexandrie (IVe s.), respectivement aux Livres III et VII[4]. C'est bien peu si l'on se souvient qu'Ératosthène est un des auteurs scientifiques les plus souvent mentionnés dans les textes grecs anciens. Mais, d'une part, il s'agit souvent d'allusions à ses travaux de mathématiques "mixtes" (géographie, astronomie), d'autre part les Anciens ne s'astreignaient guère à des références bibliographiques précises. La désignation des écrits antiques est assez fluctuante et il n'est pas assuré que les trois titres que nous avons mentionnés désignent des ouvrages distincts.

Cela dit, Théon et Pappus sont de bons représentants des deux catégories d'auteurs anciens qui citent le célèbre Bibliothécaire : d'un côté les philosophes et prosateurs des époques impériale et tardive qui ne sont pas eux-mêmes engagés dans un travail mathématique spécialisé; de l'autre, ceux à qui l'on reconnaît une compétence technique dans ces domaines et que l'on peut donc appeler "mathématiciens". Parmi les premiers, nous avons déjà évoqué Nicomaque et Théon de Smyrne. On pourrait leur adjoindre Porphyre de Tyr, Jamblique de Chalcis et les commentateurs postérieurs de Nicomaque, Proclus de Lycie … sans oublier Vitruve, Plutarque, Sextus Empiricus ou Stobée.

Il ne s'agit pas de stigmatiser (la compétence ou) l'incompétence de ces auteurs, mais de tenir compte de leur intérêt et de celui qu'ils prêtent à leurs lecteurs. Clairement, chez Nicomaque et Théon, le lectorat visé, probablement dans le contexte des écoles médio-platoniciennes de l'Époque impériale, implique certaines limitations. Ces auteurs veulent fournir les connaissances mathématiques de base utiles à la lecture de Platon, tout particulièrement celle du *Timée,* pour des apprentis-philosophes qui n'ont apparemment pas (encore ?) reçu la formation mathématique propédeutique que le maître de l'Académie avait certainement essayé d'introduire dans le cursus philosophique de l'École. A plusieurs reprises, ces Néopythagoriciens soulignent qu'ils exposent seulement ce qui est requis dans une introduction. Quand ils se réfèrent à Ératosthène, nous ne pouvons donc pas espérer de leur part un exposé très technique, à supposer que celui-ci se soit livré à ce genre d'exercice.

Les citations des mathématiciens enrichissent et complexifient le tableau. Au moins quatre d'entre eux le mentionnent : Ptolémée[5], Pappus et (un autre) Théon — tous alexandrins —,

---

[3] *Expositio,* 2.3-4, 81.17 Hiller. Ces citations correspondent respectivement aux fragments N°3 et N°1 tels qu'ils sont identifiés dans Hiller, E., « Der Platonikos des Eratosthenes », *Philologus,* 30 (1870), pp. 60-72.

[4] *Collectio,* resp. 54.31-56.1; 636.24-25 Hultsch. Cf. 672.5-6 Hultsch.

[5] Ptolémée cite Ératosthène dans l'*Almageste* (I. 12, 68.3-4 Heiberg) peut-être par l'intermédiaire d'Hipparque, au sujet de la valeur de l'arc intersolsticial [arc : méridien :: 11 : 83 (ou 2 : 15)]. Il le cite également dans ses *Harmoniques* (Livre II, chapitre 14) à propos des divisions numériquement déterminées de l'octave pour chacun des trois genres. Probablement faut-il y ajouter deux références implicites : l'une au début du Livre IX de l'*Almageste* (207.4 Heiberg), à propos de l'ordre des orbes planétaires, l'autre au début de la *Géographie* (I. 3) pour la mesure du méridien terrestre. Comme la citation par son commentateur Théon d'Alexandrie, les références de Ptolémée concernent donc les mathématiques dites "mixtes".

Eutocius d'Ascalon, auxquels il convient évidemment d'adjoindre le contemporain et correspondant d'Ératosthène : Archimède de Syracuse. Ce dernier lui expédie sa célèbre *Méthode concernant les théorèmes mécaniques,* après avoir testé son goût et ses aptitudes pour la résolution des problèmes géométriques comme il l'avait fait avec ses correspondants antérieurs. Même s'il avait des arrière-pensées quant à l'aide que cela pouvait lui apporter pour la diffusion de son ouvrage, le "défi" puis l'envoi d'un ouvrage aussi technique que la *Méthode* incitent fortement à penser que le Syracusain reconnaissait la compétence géométrique d'Ératosthène.

a. le *Μεσολάβος*

Dans son *Commentaire* à la première Proposition du second Livre de *La sphère et le cylindre* d'Archimède, Eutocius d'Ascalon a réuni une anthologie de douze (!) solutions au problème mécanico-géométrique dit des deux moyennes (généralisation de la duplication du cube) qu'Archimède supposait résolu. Le commentateur compare ces différentes solutions du point de vue de leur inspiration mathématique et établit des parentés. Tantôt il précise sa source (*Mécaniques* de Héron, *Miroirs ardents* de Dioclès, *Introduction mécanique* de Pappus; la solution d'Archytas est présentée d'après Eudème), tantôt non.

Dans cet ensemble, il insère un précieux document[6] qu'il est commode de diviser en trois parties principales : (**i**) une lettre, adressée par Ératosthène au Roi Ptolémée, qui décrit l'histoire du célèbre problème, puis fait l'éloge d'un instrument inventé par l'auteur et permettant de le résoudre; elle donne ensuite une explication purement géométrique, suivie d'indications à respecter pour la réalisation matérielle dudit instrument[7]; (**ii**) vient alors la description d'une offrande votive : un exemplaire de l'instrument, en bronze, rattaché à une stèle sur laquelle figurait un résumé de la démonstration retranscrit ici[8], suivi d'un (**iii**) épigramme de 18 vers s'achevant par une dédicace à Ptolémée et la "signature" d'Ératosthène[9].

Il y eut de savantes discussions sur l'authenticité du tout ou des différentes parties de ce témoignage d'Eutocius. La position désormais la plus répandue[10] est celle que défendait déjà Wilamowitz[11] :

— le résumé de démonstration et l'épigramme gravés sur la stèle, sont authentiques;

— la première partie sous forme de lettre est un faux tardif, élaboré à partir de la portion authentique, probablement après Pappus.

---

[6] Archimedes, *Opera Omnia,* III, 88.4—96.27 Heiberg. Trad. Ch. Mugler, *Archimède,* Tome IV. Paris, Les Belles Lettres, 1972, pp. 64-69

[7] *Ibid.,* III, 88.4—94.8 Heiberg.

[8] *Ibid.,* respectivement 94.8-14 et 94.15—96.14 Heiberg.

[9] *Ibid.,* 96.14-27 Heiberg.

[10] Depuis Heath (*A History of Greek Mathematics*. Oxford, Clarendon Press, 1921. Rééd. New York, Dover Publ. Inc., 1981, vol. I, pp. 244-246) jusque, très récemment encore, Fuentes Gonzalez dans sa longue notice du *DPhA,* R. Goulet (dir.), vol. III, notice « Ératosthène de Cyrène » E52, pp. 188-236, en particulier pp. 211-212.

[11] von Wilamowitz-Mœllendorff, Ein Weihgeschenk des Eratosthenes. *Göttinger Nachrichten,* 1894. Repris dans *Kleine Schriften,* II : Hellenistische, spätgriechische und lateinische Poesie. Berlin, 1941, pp. 48-71.

Celui-ci, en effet, dans le Livre III de la *Collection mathématique,* après avoir présenté une classification des problèmes géométriques selon trois catégories en fonction des méthodes (en fait, de la nature des lignes) utilisées pour les résoudre, ajoute :

> « … mais ils (les Anciens) y sont parvenus (à résoudre le problème des deux moyennes) cependant d'une façon admirable en faisant usage d'instruments propres à exécuter la construction manuellement et commodément, comme on peut le constater dans le *Mésolabe* d'Ératosthène et dans les *Mécaniques* de Philon et de Héron [ou *Catapultes*] »[12].

Comme Eutocius, il décrit (avec quelques variantes) l'instrument, en explique le principe géométrique et décrit son utilisation pour résoudre le problème des deux moyennes[13]. Pappus est le seul auteur grec à livrer le nom, depuis traditionnel, de l'instrument[14], le mésolabe (*μεσολάβος* ou *μεσολαβίον*) et, si l'on admet l'homogénéité des citations des trois auteurs dans le texte qui précède, il est naturel d'y voir un titre, même si celui-ci ne figure pas (ou plus) dans l'extrait d'Eutocius.

Il y a une vingtaine d'années, Wilbur Knorr[15] a réexaminé ces textes et mis en évidence la faiblesse de plusieurs des arguments de Wilamowitz contre l'authenticité de la lettre[16]. Tout en admettant la possibilité d'interpolations ponctuelles, il conclut (un peu rapidement me semble-t-il) à l'authenticité globale de l'ensemble[17]. Je ne suis pas sûr qu'il faille choisir entre ces positions simples et tranchées. Nous avons probablement affaire à des textes "rééditées" plusieurs fois. Pappus et Eutocius s'inspirent sans doute d'anthologies déjà constituées : Eutocius pourrait avoir utilisé un ou plusieurs florilèges, sans doute le *Rucher* (Κηρία) de Sporus de Nicée (II^e^ ou III^e^ s.)[18]. Pappus est plus modeste et n'expose que quatre solutions (toutes instrumentales), celles d'Ératosthène, de Nicomède, de Héron, puis la sienne qui n'est rien d'autre (ainsi que le remarque Eutocius) qu'une variation sur la solution proposée par le mathématicien de l'époque hellénistique Dioclès. Même les témoignages des philosophes de l'Antiquité tardive évoquent le problème des deux moyennes en mentionnant l'existence de plusieurs solutions[19].

Il se pourrait même que le *Mésolabe* d'Ératosthène, dans une (première) partie historique, présentait les solutions antérieures : celles d'Archytas (auquel cas la mention « ὥς Εὔδημος

---

12 Pappus, *Collectio,* III, 54.22—56.2 Hultsch.
13 *Ibid.,* 56.18—58.21 Hultsch.
14 Mais voir aussi le témoignage de Vitruve, *De Architectura,* Livre IX, préface, §§ 13-14 (« organica *mesolabi* ratione »).
15 Voir Knorr, W. R., *The Ancient Tradition of Geometric Problems.* Boston, Basel, Stuttgart, Birkhäuser, 1986, pp. 17-24.
16 Redites inutiles d'éléments de la deuxième partie; incompatibilités entre la lettre et les témoignages de Pappus, Théon de Smyrne et Plutarque; style banal; absence de contextualisation, peu probable de la part d'un fin lettré comme É. s'adressant à son royal patron …
17 Il est revenu sur ce même dossier, avec force détails, en particulier pour ce qui concerne les arguments terminologiques et stylistiques, dans Knorr, W. R., *Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry.* Boston, Basel, Stuttgart, Birkhauser, 1989, pp. 131-153.
18 Qu'il cite d'ailleurs explicitement dans son *Commentaire à la Mesure du cercle*. Voir Archimedes, *Opera Omnia,* III, 258.22-28 Heiberg.
19 Ainsi Proclus, *In Plat. Tim.,* 33.29—34.4 Diehl; Jean Philopon, *In Arstt. Anal. post.,* I. 7, *CAG,* XIII. 3, 102.12—105.4 Wallies.

ἱστορεῖ » pourrait être d'Ératosthène !), d'Eudoxe et de Ménechme. Proclus associe les solutions d'Archytas, de Ménechme et d'Ératosthène[20]. Il se peut qu'il ait écarté celle d'Eudoxe car, si l'on en croit Eutocius[21], le texte en était corrompu. Le passage contient d'ailleurs une indication intéressante : Eutocius oppose la préface (« ἐν προοιμίοις »; on comprend généralement celle d'Eudoxe) où il était indiqué que la solution utilisait des lignes courbes et la démonstration (« ἐν δὲ τῇ ἀποδείξει ») dans laquelle lesdites courbes n'apparaissaient pas (plus). Or il semble que les textes mathématiques grecs anciens n'aient été dotés de préface qu'à partir de l'époque hellénistique. Selon notre hypothèse, la préface en question serait celle qu'Ératosthène avait adjointe à son anthologie et le début de l'extrait d'Eutocius sur l'origine du problème proviendrait de la préface : il fait précisément référence à une solution d'Eudoxe par les courbes[22]. Le traité était dédié à l'un des Ptolémées[23].

Eutocius, ou l'un de ses prédécesseurs, l'aura désarticulée pour présenter les différentes solutions à titre individuel. C'est d'ailleurs ce que font la plupart des exégètes modernes ! La "lettre" serait donc constituée de morceaux pour la plupart authentiques (comme le pense Knorr), mais réarrangés et plus ou moins bien cousus ensemble. Quant à la description de l'offrande et de l'épigramme, je suppose qu'on les avait assez tôt associés au traité (pour les préserver), mais qu'ils n'en faisaient pas initialement partie.

b. le *Περὶ τῶν μεσοτῆτων*

Peut-être plus problématique encore est la mention, toujours par Pappus, dans la préface du Livre VII de sa *Collection,* d'un ouvrage d'Ératosthène semble-t-il différent, intitulé *Sur les Médiétés* (*Περὶ τῶν μεσοτήτων*). Le contexte est celui de la description d'un corpus d'ouvrages géométriques de haut niveau, communément appelé « Domaine de l'analyse », dont l'une des composantes les plus importantes est la théorie des lieux géométriques, classifiés eux aussi, et parallèlement aux problèmes, en trois catégories : plans, solides et grammiques. Les problèmes relatifs aux lieux solides requièrent donc l'usage de la très importante théorie des coniques[24]. Pappus énumère 12 titres, celui d'Ératosthène venant en dernier[25].

Première difficulté : leur total représente 32 Livres disent les manuscrits, mais l'addition des nombres qu'ils indiquent pour chacun des traités (en particulier 2 pour le *Sur les Médiétés*) donne 33 ! D'où la correction proposée pour le nombre total par E. Halley (et suivie par Hultsch). Cela dit, un peu plus loin Pappus, ou plus probablement un glosateur, précise :

---

[20] Dans le témoignage cité à la note précédente.

[21] Archimedes, *Opera Omnia,* III, 56.4-10 Heiberg.

[22] Cf. « φησιν μέν ἐν προοιμίοις διὰ καμπύλων γραμμῶν » (56.5 Heiberg) et « Εὔδοξος δὲ διὰ τῶν καλουμένων καμπύλων γραμμῶν » (90.7-8 Heiberg).

[23] Généralement on admet qu'il s'agit de Ptolémée III Évergète; Knorr essaie de défendre la thèse qu'il s'agirait de son fils, Ptolémée IV Philopator, et donc qu'Ératosthène aurait rédigé ce texte tardivement. Voir *Textual Studies, op. cit.,* pp. 144-145.

[24] Les problèmes et lieux "grammiques" sont caractérisés par le recours à des lignes (γραμμαί) courbes encore plus complexes.

[25] Pappus, *Collectio,* VII, 85.13-20 Jones = 636.18-25 Hultsch.

« En fait il y a dix [Livres] de lieux, certains sur les [lieux] plans, certains sur les [lieux] solides, certains sur les [lieux] grammiques et certains sur les [lieux] relatifs aux médiétés »[26].

Or, si l'on fait le total des nombres de la liste initiale pour les traités de lieux (*Lieux plans* d'Apollonius, *Lieux solides* d'Aristée, *Lieux à la surface* d'Euclide et l'écrit d'Ératosthène), on trouve 11 ! Halley (suivi par Hultsch) avait tout simplement omis l'adjectif numéral "δέκα" présent dans l'archétype de la tradition (ms Vatican. gr. 218) qu'a réintroduit Jones[27]. Ceci confirme qu'il y a très probablement une erreur dans la liste des nombres. Or certains des traités sont ultérieurement décrits par Pappus (ses descriptions vont jusqu'au traité des *Coniques*) et le nombre de leurs Livres est sûr. Par conséquent, l'incertitude ne peut concerner que le traité des *Lieux à la surface* d'Euclide ou l'écrit d'Ératosthène, tous deux initialement désignés comme composés de deux Livres. Jones a fait remarquer que le génitif dans le titre d'Euclide présuppose l'adjectif numéral substantivé. Le "δύο" accolé au *Περὶ τῶν μεσοτήτων* est donc probablement une erreur. Il en conclut d'une part qu'il faut garder le "32" des manuscrits et d'autre part que le mystérieux écrit d'Ératosthène ne comporterait qu'un Livre.

Mais de quoi s'agissait-il ? Le Livre VII de la *Collection* s'y réfère encore à deux reprises[28] et suggère qu'il portait sur des lieux géométriques définis en termes de médiétés. Si l'on en croit Jones, il semble même qu'un titre alternatif du genre *Lieux relatifs aux médiétés* (*Τόποι πρός μεσότητας*) soit envisageable. Mais l'information s'arrête là et l'ouvrage n'est cité par aucun autre auteur[29]. J'ajouterai que trois des quatre mentions concernées se trouvent dans des digressions jugées inauthentiques par l'éditeur Hultsch — ce qui n'implique cependant pas qu'elles soient fausses — lequel ne maintient en fait que la première, celle qui insère l'écrit comme le *dernier* de la liste des ouvrages censés composer le corpus de l'analyse. Or, cette insertion, à certains égards, contredit le début même de la préface de Pappus qui indiquait que trois hommes avaient composé ledit corpus : Euclide, Apollonius et Aristée l'Ancien. Ératosthène n'y était pas mentionné.

Peut-être convient-il donc de rester circonspect quant à l'existence d'un tel traité qui pourrait être le résultat d'une méprise. Il ne s'agissait évidemment pas du *Mésolabe,* du moins tel que nous l'avons décrit auparavant. Celui-ci mentionnait les sections coniques (à propos de la solution de Ménechme), des moyennes proportionnelles (μέσαι) en proportion (ἀναλογία), mais pas des médiétés (μεσοτήτες). Or les moyennes géométriques ne sont qu'un cas particulier de médiété et il ne faut donc pas confondre *ἀναλογία* et *μεσοτής,* ce qu'ont fait (et font encore) bon nombre d'auteurs[30]. Or il semble bien qu'Ératosthène lui-même soulignait la nécessité d'utiliser une

---

[26] Pappus, *Collectio,* VII, 97.18-20 Jones. Cf. 652.7-8 Hultsch.

[27] Il supplée <βιβλία>, à cause des pronoms relatifs neutres; il écarte "γένη", "εἶδη" car trois sortes de lieux seulement seraient présentées ensuite.

[28] Pappus, *Collectio,* VII, 107.7-10 Jones = 662.15-18 Hultsch; *ibid.,* 115.4-5 Jones = 672.4-6 Hultsch.

[29] Cela n'a évidemment pas empêché les mathématiciens de se livrer à des reconstructions habiles, mais totalement conjecturales, notamment celles de Tannery, Zeuthen, Van der Waerden. Heath reste circonspect.

[30] Les médiétés (μεσοτήτες) sont parfois appelées "moyennes" (μέσαι) (Archytas, DK 47 B 2) ou "proportions" (ἀναλογίαι). Dans son exposé, Nicomaque utilise "ἀναλογία" pour "médiété", quoiqu'il remarque, en introduisant la médiété géométrique qu'elle seule est appelée proportion au sens propre, puisqu'il y a bien identité de rapports entre les termes (voir *ibid.,* Ch. xxii, 122.11, 123. 20-22; Ch. xxiv, 126. 12-15 Hoche). Théon, citant Adraste (*Expositio,* L. II, § L, 106. 16-20 Hiller), insiste sur la différence entre les deux notions et signale l'abus de langage commis par

terminologie rigoureuse. C'est en tout cas ce que suggère l'une des citations du *Platonicos.* Avant d'en venir au plus discuté des écrits mathématiques d'Ératosthène, je rappellerai brièvement quelques informations concernant la théorie des médiétés.

c. la théorie mathématique des médiétés[31]

Le substantif "médiété (μεσοτής) désigne soit une suite de trois termes (A, B, C), soit le terme médian de cette progression, B. On peut supposer A > B > C. Pour ce terme médian, les auteurs anciens utilisent le plus souvent "μέσος, η, ον", adjectif substantivé que l'on peut traduire par "moyen(ne)". La théorie des médiétés nous est connue grâce à des exposés plutôt tardifs, notamment ceux dus à Nicomaque, Théon de Smyrne et Pappus[32]. Chez ces auteurs, les médiétés sont définies en comparant le rapport de deux des trois excès A — C, A — B, B — C avec le rapport de deux termes pris parmi A, B, C :

$$\frac{A-B}{B-C} = \frac{A}{A} \text{ (médiété arithmétique)}, \quad \frac{A-B}{B-C} = \frac{A}{B} \text{ (médiété géométrique)},$$

$$\frac{A-B}{B-C} = \frac{A}{C} \text{ (médiété harmonique)}, \quad \frac{A-B}{B-C} = \frac{C}{A} \text{ (médiété sous-contraire}^{33} \ldots$$

Un petit raisonnement combinatoire, l'exclusion des cas impossibles et des doublons montrent qu'il reste douze possibilités de médiétés; l'une d'elles implique A = B et C quelconque; il n'y a donc finalement que onze médiétés « intéressantes » à envisager. Nicomaque et Pappus en exposent seulement 10, correspondant à la Décade pythagoricienne. Théon mentionne qu'il y a douze médiétés mais n'explicite que les six premières et renvoie à une abondante littérature pythagoricienne pour les autres[34].

Tous ces auteurs sont unanimes sur un point : la découverte des médiétés a été progressive[35]. Théon et Pappus mettent les six premières médiétés sur le même plan; Nicomaque et Pappus les déclarent connues des Anciens, par opposition à quatre médiétés que l'on trouve

---

certains. Toutefois, lui-même, lorsqu'il a cité auparavant le musicien Thrasylle (*ibid.,* 85. 8-9 Hiller), a utilisé "ἀναλογίαι" pour désigner les trois médiétés fondamentales et n'a donc pas recherché l'exactitude terminologique. Pappus (*Collectio,* III, 70. 27-28 Hultsch) signale que ce qui est proportion est médiété, mais que la réciproque est fausse. Encore faudrait-il préciser "proportion continue". Dans son exposé, il réserve "proportion" à la médiété géométrique.

Un exemple récent : dans sa notice du *DPhA* (*op. cit. supra,* note 10), Fuentes Gonzalez écrit qu'une traduction arabe du *Περί μεσοτήτων* vient d'être éditée récemment [Muwafi, A. & Philippou, A. N., « An Arabic version of Eratosthenes *On mean proportionals* », *Journal for the History of Arabic Science,* 5 (1981), 147-165] qui permettra de trancher entre les diverses spéculations que l'on a faites au sujet de ce traité. C'est simplement faux : il s'agit seulement d'une traduction du passage d'Eutocius sur le mésolabe (prise de deux moyennes proportionnelles et non étude des médiétés) ! Ont été traduits la portion "lettre" et le résumé gravé sur la stèle; l'épigramme est mentionné, mais n'a pas été transmis.

[31] Je résume ici la notice que j'ai consacrée à la théorie des médiétés dans Euclide, *Les Eléments,* Volume 2 (L. V-IX), trad. et comm. par B. Vitrac. Paris, P.U.F., 1994, pp. 497-506.

[32] Nicomaque, *Intr. arithm.,* L. II, Ch. xxi-xxix, 119.19—147.2 Hoche; Théon, *Expositio,* L. II, §§ L-LII, 106.12—111.14 Hiller et §§ LIV-LXI, 113.9—119.16 Hiller; Pappus, *Collectio,* III, §§ xi-xxiii, 68.17—104.13 Hultsch. Jamblique dans sa paraphrase de Nicomaque et Proclus, dans son *Commentaire sur le* Timée, proposent également un certain nombre d'informations.

[33] Tableau complet dans Heath, *A History …, op. cit.,* Vol. I, p. 87.

[34] Théon, *Expositio,* L. II, § LX, 116.3-7 Hiller.

[35] Jamblique brosse même l'histoire de cette théorie, *in Nicom. Arithm. Introd. Liber,* 100.15—101.11 Pistelli.

seulement chez les auteurs récents. Dans leurs exposés, trois seulement de ces quatre nouvelles médiétés coïncident; les onze médiétés "intéressantes" ont donc été reconnues.

En résumé, du temps des (grands) Anciens, on connaissait trois médiétés seulement : l'arithmétique, la géométrique et l'harmonique; on les trouve chez Platon et dans le fragment 2 d'Archytas. Puis, on (Eudoxe ?) en découvrit trois autres et, point important pour nous, à l'époque d'Ératosthène, mentionné au moins comme point de repère par Jamblique[36], on connaissait exactement six médiétés. Il est tout à fait clair que c'est aussi le cas dans la ou les source(s) que Théon et Pappus ont utilisée(s). La définition combinatoire des médiétés présentée dans les exposés tardifs n'était donc pas la définition initiale et elle est clairement liée à la découverte des onze médiétés "intéressantes".

Quel en est le contexte d'application ? Si l'on suit nos auteurs tardifs, l'étude des trois premières médiétés a été développée par les mathématiciens de l'École pythagoricienne dans leur spéculation sur les intervalles musicaux et leurs déterminations numériques. Ce serait une théorie en quelque sorte arithmético-musicale. Les termes en sont des notes ou des nombres formant intervalles et rapports. Mais cette connexion n'épuise pas le sujet. Grâce à Pappus, nous savons que Théétète avait travaillé sur la classification des (droites) irrationnelles à l'aide des trois médiétés fondamentales et cela constitue clairement le socle de la classification du Livre X des *Éléments,* même si celle-ci est formulée un peu différemment[37]. Dans ce cas, il s'agissait de géométrie, ou d'une conjonction d'arithmétique et de géométrie. Au demeurant, la corrélation avec la musique n'est jamais faite par nos auteurs tardifs pour les médiétés autres que les trois premières. Les développements de la théorie relèvent donc certainement d'autres problématiques.

Quoi qu'il en soit, la théorie des médiétés apparaît comme une forme archaïque de la théorie des proportions telle qu'elle est exposée dans les livres V et VII des *Éléments*. En un sens, elle est plus générale, puisque seule la médiété géométrique relève de cette dernière théorie; mais elle est aussi plus particulière et plus élémentaire, puisqu'elle ne porte apparemment que sur des nombres, des (segments de) droites et des notes. Elles ont cependant un point commun extrêmement important : leur caractère pour ainsi dire *transgénérique* par rapport aux différentes sortes d'objets mathématiques ou de phénomènes mathématisables : nombres, grandeurs, sons, mouvements, poids …, vis-à-vis desquels ces deux théories constituent des sortes de métalangages portant sur les relations mutuelles qui prévalent entre lesdits objets.

d. le *Platonicos* : Théon de Smyrne, *Expositio* 2.3-12 Hiller

La première mention du *Platonicos* par Théon nous ramène au problème déliaque, celui de la duplication du cube :

---

36 *Ibid.,* 116.1-4 Pistelli : « Et on parle aussi des trois médiétés suivant les premières, celles qu'on utilisa aussi de Platon à Ératosthène et dont la découverte commença, comme nous l'avons dit, avec les mathématiciens Archytas et Hippase ». Hiller (*op. cit.,* 70) rapporte ce témoignage au *Platonicos*.

37 Voir Euclide, *Les Eléments,* Volume 3 (L. X), trad. et comm. par B. Vitrac. Paris, P.U.F., 1998, pp. 68-70.

« Ératosthène, dans le livre qui a pour titre *le Platonicien,* rapporte que les Déliens ayant interrogé l'oracle sur le moyen de se délivrer de la peste, le dieu leur ordonna de construire un autel double de celui qui existait déjà. Ce problème jeta les architectes dans un étrange embarras. Ils se demandaient comment on peut faire un solide double d'un autre. Ils interrogèrent Platon sur la difficulté. Celui-ci leur répondit que le dieu avait ainsi rendu l'oracle, non qu'il eût aucun besoin d'un autel double, mais pour reprocher aux Grecs de négliger l'étude des mathématiques et de faire peu de cas de la géométrie »[38].

On l'a donc tout naturellement rapprochée du récit contenu dans la lettre d'Eutocius, mais alors que celle-ci entreprenait de faire l'"histoire" du problème, Théon, dans le droit fil de l'introduction de son *Expositio,* retient seulement la valeur protreptique du récit et, de fait, le choix a quelque chose de paradoxal. Ladite introduction décrit les sciences mathématiques en s'inspirant fortement du célèbre programme platonicien du Livre VII de la *République*. On s'attend donc à un exposé en cinq parties : arithmétique, géométrie, stéréométrie, astronomie et musique. Or, l'*Expositio,* du moins en l'état dans lequel elle nous est parvenue, traite seulement d'arithmétique, de musique et d'astronomie, mais guère de géométrie. Pourquoi, dès lors, établir un lien entre le problème déliaque et Platon ?

S'agit-il tout simplement d'une réalité historique ? Ératosthène a-t-il inventé l'anecdote, par exemple pour rappeler aux Académiciens de son temps que Platon accordait une grande place aux sciences mathématiques dans la formation du philosophe, place que ses successeurs auraient négligée ? Ou bien l'a-t-il trouvée déjà toute prête parce qu'elle appartenait à l'arsenal publicitaire de l'Académie, dès le milieu du IV^e^ siècle, comme le pense Wilbur Knorr ? Mais pourquoi associer Platon avec ce qui va devenir le problème fondateur de la mécanique mathématique ? Ces questions ne sont pas faciles à trancher, mais ce n'est pourtant pas sans conséquences sur l'interprétation que l'on donnera de cette histoire et du rôle d'Ératosthène.

Si c'est à l'Académie qu'on doit cette association, on est conduit à penser que l'anecdote se poursuivait avec la critique des pratiques instrumentales associées à ce problème, critique que nous connaissons par Plutarque[39]. Knorr admet qu'Ératosthène a transmis l'ensemble de l'histoire mais, comme on le voit adopter un point de vue apparemment contraire dans la lettre d'Eutocius dont il a défendu l'authenticité[40], il lui faut admettre qu'Ératosthène a fait circulé deux versions du récit dans des écrits différents, l'un historico-mathématique (Eutocius), l'autre dramatico-philosophique, celle du *Platonicos,* que citeraient Théon de Smyrne et Plutarque, et dans laquelle Ératosthène se faisait l'écho de certaines critiques de la pratique géométrique que l'on trouve incontestablement

38 Traduction J. Dupuis, *Exposition des connaissances mathématiques utiles à la lecture de Platon*. Paris, 1892. Réimp. Bruxelles, Culture et Civilisation, 1966, p. 5.

39 Voir *Vie de Marcellus,* ch. 14, §§ 9-11; *Propos de tables,* L. VIII, Question 2, 718E7-F4. Dans son *Sur l'E de Delphes,* 6, 386 E, il rapporte lui aussi la valeur protreptique de l'oracle rendu aux Déliens, mais sans citer Ératosthène, ni faire état des critiques que Platon aurait, selon lui, adressées aux géomètres. Même chose dans *Sur le démon de Socrate,* 7, 579 A8-D3.

40 Cette divergence entre d'une part les témoignages de Théon de Smyrne et Plutarque, et, d'autre part, la lettre transmise par Eutocius (non mention de la pestilence qui a causé la consultation de l'oracle; adresse aux géomètres de l'Académie et non à Platon lui-même; éloge de l'effectivité et de l'utilité pratique du mésolabe) faisait partie des arguments des adversaires de l'authenticité.

dans le corpus des dialogues. C'est vouloir tout expliquer grâce aux sources hellénistiques, voire classiques, en dédouanant Plutarque mais aussi, par conséquent, en lui déniant toute initiative.

Ce dernier a bien pu élaborer la version "anti-mécanicienne" qu'il transmet, à moins qu'elle n'ait été constituée plus tôt, par contraste avec le récit du célèbre Bibliothécaire. Dans nos sources, plutôt tardives, elle apparaît liée à l'élaboration de la légende archimédienne et à la polémique qui s'ensuivit sur le statut de la science mécanique. Dans l'*E de Delphes,* on voit que l'anecdote est rapportée par l'ami Théon (!) non seulement pour encourager l'étude de la géométrie (expédiée en deux lignes), mais aussi pour promouvoir celle de la dialectique (pour se perfectionner aussi en divination !) mise à mal dans la précédente intervention du prêtre Nicandre. Dans l'écrit *Sur le démon de Socrate,* l'accent est mis sur les bénéfices à attendre du culte des Muses et de la philosophie en contraste avec les passions et les excès de la guerre. Bref, les prosateurs de l'époque impériale n'hésitent pas à réinterpréter diversement le même récit "initial" en fonction d'objectifs variés. Si l'on admet l'authenticité de la lettre transmise par Eutocius, on peut bien admettre qu'Ératosthène ait inventé la connexion entre Platon et le problème déliaque pour en cumuler les bénéfices : rappeler l'incitation platonicienne à étudier la géométrie et se donner le beau rôle dans l'histoire car il se présente comme le premier à pouvoir résoudre le problème de manière effective et utile.

e. le *Platonicos* : la seconde citation de Théon de Smyrne

La seconde citation du *Platonicos* est d'une nature complètement différente. Hiller est généreux dans le découpage de ce qu'il considère comme le premier (et le plus long) fragment ou témoignage. Je le diviserai en trois parties :

• Une discussion terminologique portant sur la nécessité de distinguer entre "logos" = rapport, et "diastêma" = intervalle[41]. Le propos est assez clair et suppose que cette distinction n'était pas toujours faite.

• Une définition et une discussion de la notion de "proportion" (*ἀναλογία*), dont il convient de distinguer deux espèces, la continue et la disjointe[42].

• La dernière portion, explicitement rapportée à Ératosthène[43], porte sur la notion de "principe", "cause première" et "élément", en envisageant ce que cela peut vouloir dire dans trois ordres de choses : la quantité (*τὸ ποσόν*), la grandeur (*τὸ πηλίκον*) et enfin les rapports et proportions.

L'identification et le découpage du témoignage sont justifiés par le fait que la partie médiane est encadrée par deux discussions explicitement rapportées à Ératosthène. En outre, Théon a déjà discuté des notions de "λόγος", de "ὅροι" et d'"ἀναλογία" en se plaçant sous

[41] *Expositio,* 81.17—82.5 Hiller : « Ἐρατοσθένης δὲ ἐν τῷ Πλατωνικῷ φησι, μὴ ταὐτον εἶναι διάστημα καὶ λόγον ... λόγον μὲν οὐ τὸν αὐτὸν ἔχει, διάστημα δὲ τὸ αὐτό ».

[42] *Expositio,* 82.6-21 Hiller : « ἀναλογία δ ἐστὶ πλειόνων λόγων ὁμοιότης ἢ ταυτότης ... ὁ δὲ αὐτὸς καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων λόγος ».

[43] *Expositio,* 82.22—84.6 Hiller : « ὁ δὲ Ἐρατοσθένης φησίν, ... αἴτιον δὲ τοῦ λεχθέτος, ὅτι διαστήματος ἄμοιρος ἰσότης, καθάπερ καὶ ἡ στιγμὴ μεγέθους ».

l'autorité du péripatéticien Adraste[44], et la présente redite trahit sans doute le recours à une nouvelle source, à moins que ce ne soit Adraste lui-même qui citait Ératosthène. De fait, pour chacune de nos trois parties, on peut trouver des indications chez d'autres auteurs qui confirment cette parenté.

Ainsi, pour la première, le témoignage de Porphyre, dans ses *Commentaires sur les* Harmoniques *de Ptolémée,* est précieux : bien que le *Platonicos* n'y soit pas nommé, l'argument et l'exemple sont les mêmes[45]. En outre il précise le contexte : il s'agirait de canonique ou théorie mathématique des intervalles musicaux. Alors que Théon, sous l'autorité d'Adraste, introduisait la discussion dans une formulation plus générale, non pas en parlant de "notes" ou de "sons", mais de "termes" (*ὅροι*), Porphyre commente les différentes modalités de la division du canon. Il n'a aucun mal à citer des textes fort célèbres qui ne respectent pas la distinction terminologique prônée par Ératosthène : le *Timée* de Platon (36 a6-b5), le célèbre fragment DK 47 B2 d'Archytas provenant d'un écrit intitulé *Sur la musique* et la *Division du canon* attribuée à Euclide. Porphyre s'inspire ici de traitements antérieurs, notamment celui d'un certain Panétius le Jeune[46], crédité par lui d'un écrit intitulé « *Au sujet des rapports et intervalles en géométrie et en musique* »[47], qui avait montré qu'Ératosthène lui-même, d'une certaine manière, avait utilisé "intervalle" en lieu et place de "rapport" ! Il se peut d'ailleurs bien que tout le problème soit relatif au contexte d'utilisation : les usages terminologiques de la géométrie et de la musique n'étaient peut-être pas tout-à-fait les mêmes, et on peut comprendre que les notes constituent des intervalles, même si ceux-ci se trouvent associés, par certains théoriciens, à des rapports entre nombres.

L'objectif de la seconde partie de notre fragment pourrait aussi bien être une clarification terminologique puisque seule l'*ἀναλογία* continue peut constituer un cas particulier de médiété : la médiété géométrique. Nous avons déjà vu que certains auteurs de l'époque impériale (Thrasylle, Nicomaque, Théon de Smyrne) appliquaient improprement le terme d'*ἀναλογίαι* pour désigner les μεσότητες. Mais le fait est que la discussion des deux formes de justices par Aristote, dans le Livre V de l'*Éthique à Nicomaque* [48] avait déjà pu induire une telle mise au point de la part d'Ératosthène. Pour renforcer l'idée que le paragraphe appartient au Cyrénaïque, on peut faire le rapprochement avec la citation explicite, contenue dans la Définition N°125. 1 attribuée à Héron d'Alexandrie[49], d'une sorte de commentaire d'Ératosthène sur la composition des rapports implicitement mise en œuvre dans les Définitions V. 9-10 des *Éléments* d'Euclide. On y retrouve cette thématique avec le même exemple numérique (9, 6, 4) qu'ici.

---

[44] *Expositio,* 73.16—74.14 Hiller.

[45] *Porph. in Ptol. Harm.,* 91.4—92.25 Düring.

[46] Probablement pour le distinguer du stoïcien Panétius de Rhodes.

[47] *Ibid.,* 65. 21-23

[48] *Eth. Nic.,* V, 1130 b30—1133 b28. Le Stagirite décrit ces deux formes de justice en les rapprochant de la célèbre théorie (politique) des deux égalités (arithmétique et géométrique, ou selon le mérite), elle-même mise en rapport avec la théorie mathématique des médiétés. Dans sa discussion, il introduit justement la distinction « continue \ disjointe » (1131 a29-b2) que nous voyons à l'œuvre ici. Voir Vitrac, B., « La Définition V. 8 des *Éléments* d'Euclide ». Copenhagen, *Centaurus,* 38 (1996), pp. 97-121.

[49] Heron, *Deff.,* 80.10-26 Heiberg.

La troisième partie est quelque peu cryptique, mais nous verrons que l'*Expositio* elle-même permet de comprendre de quoi il s'agit. A ce moment de l'exposé, Théon-Ératosthène se contente d'indiquer que l'"élément" principiel, indivisible dans son genre, est respectivement : l'unité, le point et l'égalité, mais il ajoute que le principe de génération ou de composition que cela implique n'est pas le même dans les trois ordres : l'addition pour l'unité et la quantité, le flux pour le point, la ligne, la surface et le solide. En ce qui concerne la modalité selon laquelle l'égalité (*i.e.* la raison d'égalité) est *l'élément* des rapports et des proportions, nous n'en saurons pas davantage pour l'instant. Deux choses méritent cependant d'être relevées :

— c'est précisément quand il discute de l'engendrement de la ligne par le flux d'un point que Sextus Empiricus, dans son *Contre les Géomètres* [50], cite Ératosthène;

— le lexique utilisé ici n'est pas anodin. Ainsi l'opposition du ποσόν et du πηλίκον, entre la quantité discrète qu'est le nombre et la grandeur géométrique continue — la même polarité, dite autrement, se trouvait déjà chez Aristote — est traditionnellement rapportée à Nicomaque dont elle fonde la classification des mathématiques. On aimerait bien savoir s'il s'agissait des termes utilisés par Ératosthène.

Hiller ne rattache pas le petit paragraphe qui suit au *Platonicos,* malgré (ou à cause de) sa référence à Platon, à l'*Épinomis* et à la thématique de l'existence d'un unique lien des sciences mathématiques qui résiderait dans la proportion[51]. Il a peut-être tort. Dans son *Commentaire au premier Livre des* Éléments *d'Euclide,* Proclus affirme[52] :

> « La proportion ne doit cependant pas être mise au rang d'un lien des mathématiques comme le croyait Ératosthène car elle est une des choses que l'on dit être commune aux mathématiques, et elle l'est en effet … Au reste, pour ceux qui s'en informent convenablement, la voie qui mène à ce lien part de beaucoup d'autres liens; mais la dialectique est un lien des sciences mathématiques supérieur à ce dernier … ».

Il se pourrait donc, comme le suggérait notre remarque précédente, que l'Auteur du *Platonicos,* à l'instar de ce que faisait Platon au Livre VII de la *République,* examinât à la fois ce qui constituait la *diversité* des sciences mathématiques — ce qui deviendra une classification chez Nicomaque —, et ce qui pouvait en assurer la *cohérence* en jouant le rôle de *lien* au niveau des mathématiques elles-mêmes : la théorie des proportions ou des médiétés (ἀναλογίαι). On se rappelle cependant que la réponse de Platon, pour la communauté des sciences mathématiques était davantage philosophique que technique. C'est d'ailleurs en substance celle que reprendra Proclus[53]. Si la proportion géométrique est bien qualifiée de « plus fort » des liens dans le *Timée,*

---

[50] *Adversus Mathematicos,* III, § 28, 113.7-14 Mau. Cette idée de la ligne engendrée par le flux d'un point se trouve également dans les *Definitiones* N°1-2, attribuées à Héron (resp. *Deff.,* 14.18-22 et 16.2-3 Heiberg), dont Ératosthène (non cité à cet endroit) est, comme nous l'avons vu, l'une des sources.

[51] *Expositio,* 84.7-14 Hiller.

[52] *In Euclidem I,* 43.22-25 et 44.7-10 Friedlein. Traduction P. Ver Eecke, pp. 37-38.

[53] Pappus, ou l'un de ses glosateurs (86.15-88.2 Hultsch), propose une synthèse des deux positions qu'il attribue au divin Platon : la proportion est à la fois l'unique lien de toutes les connaissances, la cause de la création et le lien de toutes les choses créées ! Ératosthène n'est pas mentionné, mais le contexte est celui de l'engendrement des médiétés que l'on peut certainement rattacher au Cyrénaïque (v. *infra*).

ce n'est pas à un niveau gnoséologique, mais cosmologique : ce lien prévaut, non pas entre les sciences, mais entre les constituants du corps du Monde.

II. extrapolations et spéculations

Ératosthène est encore cité explicitement quatre fois dans la suite de cette deuxième partie de l'*Expositio* [54], mais sans qu'il soit précisé qu'il s'agit toujours du même écrit. Un montage n'est pas à exclure, qu'il soit le fait de Théon lui-même ou d'Adraste d'Aphrodise, lequel semble bien avoir joué le rôle d'autorité intermédiaire.

a. engendrement mutuel des espèces de rapports : les règles dites d'Adraste

Selon Hiller, le *Platonicos* est bien cité une troisième fois dans ce qui constitue, selon sa numérotation, le deuxième fragment ou témoignage[55], au demeurant assez obscur. Il s'insère dans le cadre d'un assez long exposé sur les médiétés[56], explicitement repris à Adraste d'Aphrodise. Le § 51 commence avec un « il (dé)montre » (107.10 Hiller) que Hiller a raisonnablement rattaché à ce dernier. Il suffit en effet de voir le jeu d'alternances, à quelques lignes d'intervalles, entre : « il (dé)montre », « Ératosthène dit qu'il se dispensera des démonstrations » (107.23-24 Hiller), « Adraste (dé)montre … » (107.24 Hiller). En même temps "deiknusin" n'est pas "apodeiknusin" et dans la quatrième mention d'Ératosthène, omise par Hiller, il est dit que « celui-ci démontre (apodeiknusin) que … » (111.10 Hiller), mais il semble s'agir d'autre chose.

L'objet des "monstrations" du § 51 c'est l'affirmation, déjà évoquée au § 31, selon laquelle la raison ou rapport d'égalité est « cause première et principale et élément de tous les rapports et proportions ». C'est à partir de ce rapport qu'ils (ou elles) sont construit(e)s et c'est en lui qu'ils (ou elles) se résolvent. Il ne s'agit pas d'une généralité métaphysique sur l'Égal et l'Inégal, mais d'une procédure algorithmique dont le nom traditionnel est « règle d'Adraste » — précisément à cause du présent témoignage[57]. Il n'y a cependant aucun doute que la source d'Adraste lui-même était

[54] *Expositio,* 105.12-14; 107.15; 107.24; 111.10-12 Hiller. La première de ces quatre citations intervient dans un long excursus arithmologique consacré aux nombres qui entrent dans la Décade. Au sujet du nombre "huit", Théon compose un florilège de citations dont une d'Ératosthène évoquant l'harmonie de huit sphères autour de la Terre. Cette mention n'a pas de rapport avec notre sujet; je n'en parlerai pas davantage.

[55] *Expositio,* 107.15-24 Hiller. Voir Hiller, « Der Platonikos des Eratosthenes », p. 66. Dans son commentaire, il mentionne aussi la dernière citation (*Expositio,* 111. 10-12 Hiller), mais il n'en fait pas un fragment et ne dit à peu près rien sur sa signification.

[56] *Expositio,* 106.12—111.13 Hiller. Le caractère composite de la deuxième partie de l'*Expositio* se manifeste clairement au sujet des médiétés : le lecteur aura droit à trois traitements successifs (avec des lexiques divergents), manifestement repris à des sources différentes : 85.8-15 Hiller (d'après Thrasylle); 106.12—107.9 (Adraste); 113.11—119.16 (qui suit une source "pythagoricienne" non explicitement nommée et qui est apparentée à l'exposé de Nicomaque).

[57] Ladite procédure est également exposée (avec davantage de détails encore) par Nicomaque de Gérase (*Introd. arithm.,* L. I, Ch. XXIII, § 6—L. II, Ch. II, § 2, 65.17—75.14 Hoche), par Jamblique (*In Nic. Ar. intr. lib.,* 44.8—46.29 Pistelli), Pappus (*Collectio,* III, § XVIII, 88.19—90.7 Hultsch), Proclus (*In Plat. Tim.,* II, 18.29—20.9 Diehl) et Asclépius de Tralles (*In Nic. Ar. scholia,* I. 151—II. 4, 53-56 Tarán) = Philopon (*In Nic. Ar.,* I. 177—II. 11, 173-186 Giardina). Nicomaque n'indique aucune source, non plus qu'aucun de ses commentateurs. Au début de son (court) excursus, Proclus mentionne Nicomaque et Modératus.

Ératosthène. On peut aussi remarquer que si Adraste démontrait quelque chose comme l'affirme Théon, ce n'est pas le cas de ce dernier qui se contente d'exemplifier le procédé de manière détaillée. Cela suffit à le faire comprendre, mais pas à le valider. La démarche est la même chez Nicomaque, Jamblique et Proclus. Seul Pappus démontre (très simplement) un des présupposés de la procédure, à savoir que si (A, B, C) constitue une médiété géométrique, le triplet (A, A + B, A + 2B + C) est encore une médiété géométrique, ce que, précisément, Théon attribue à Adraste.

L'écriture algébrique moderne rend la chose assez évidente : si l'on part d'un triplet $(1, r, r^2)$, en progression géométrique de raison r, on construit le triplet $(1, r + 1, r^2 + 2r + 1) = [1, r + 1, (r + 1)^2]$, en progression géométrique de raison r + 1. La démonstration de Pappus procède à partir de manipulations des rapports introduites et justifiées dans le Livre V des *Éléments* d'Euclide :

inversion d'un rapport (Df. V. 13) : $(A, B) \mapsto (B, A)$;

composition d'un rapport (resp. Df. V. 14) : $(A, B) \mapsto (A + B : B)$;

séparation d'un rapport (Df. V. 15) : $(A, B) \mapsto (A - B : B)$[58].

Dès lors, si (A, B, C) est une médiété géométrique, on a par définition : A : B :: B : C; d'où par composition : A + B : B :: B + C : C (Eucl., *Él.,* V. 18). La proportion obtenue n'est pas continue, mais en utilisant Eucl., *Él.,* V. 12, on obtient :

A + B + B + C : B + C :: B + C : C, soit A + 2B + C : B + C :: B + C : C,

une nouvelle proportion continue en trois termes, ou « médiété géométrique », dont le rapport constitutif est le composé du rapport initial.

D'où la règle d'Adraste :

« Mais Adraste montre d'un façon tout-à-fait notable qu'étant proposés trois termes en n'importe quelle proportion [continue], si trois autres termes sont formés à partir de ceux-ci : l'un égal au premier, puis le composé du premier et du deuxième et le [composé] de : une fois le premier et deux fois le deuxième et le troisième, les termes ainsi pris seront à nouveau en proportion »[59].

Exemple : en partant du triplet (1, 1, 1) [rapport d'égalité], on obtient (1, 2, 4), triplet dans le rapport double, le premier des multiples. En itérant le procédé on obtient (1, 3, 9), triplet dans le rapport triple et ainsi de suite. Adraste-Théon fait également remarquer qu'avant d'appliquer la règle de formation du nouveau triplet, on peut inverser l'ordre des termes du triplet initial :

$$(A, B, C) \mapsto (C, B, A)$$

[ce qui revient à inverser le rapport $(A : B) \mapsto (B : A)$] et à lui associer le triplet :

$$(C, B + C, A + 2B + C).$$

Par exemple, en partant du triplet (1, 2, 4), on obtient, par inversion (4, 2, 1), puis (4, 6, 9), triplet dans le rapport hémiole (de 3 à 2)…

Non seulement on peut inverser le rapport, mais la procédure elle-même s'inverse également, comme Adraste-Théon l'explique au § LII : à une médiété géométrique (D, E, F), on associera (A, B, C), définie par A = D, B = E - D et C = F - (D + 2(E - D)). On vérifiera que l'on obtient une médiété géométrique dont le rapport constitutif, B : A :: E - D : D, est ce qu'Euclide

[58] En termes modernes, le composé d'un rapport (A / B) est (A / B) + 1 (cf. *supra,* r + 1), le séparé, (A / B) - 1.

[59] *Expositio,* 107.24—108.4 Hiller.

appelle le rapport séparé du rapport E : D. Et si on applique la règle d'Adraste à (A, B, C), on retrouve (D, E, F). En itérant le procédé de séparation, on aboutira, dit Théon, au rapport d'égalité (1 : 1) qui est bien l'élément de tout rapport et toute médiété géométrique.

La double règle d'Adraste [directe : (A, B, C) $\mapsto$ (D = A, E = A + B, F = A + 2B + C) et converse : (D, E, F) $\mapsto$ (A = D, B = E — D, C = F — (D + 2(E — D))], ses "deux" modalités d'application — à un rapport ou à son inverse —, permettent donc de décrire de manière générative et ordonnée la classification (et la nomenclature) des rapports numériques en dix espèces que l'on trouve chez les auteurs néo-Pythagoriciens. Et c'est de cette manière qu'il faut comprendre les assertions de Nicomaque, Théon, Pappus et Proclus quand, manifestement à la suite d'Ératosthène, ils disent que le *rapport identique* est l'*élément* des rapports numériques et proportion, qu'à partir de lui, selon une loi de production simple, tout rapport est engendré, et qu'en lui, il se résout[60].

b. une source antérieure : le *Περὶ μεσοτήτων* d'Ératosthène ?

Une anomalie commune aux exposés de Nicomaque et Théon de Smyrne doit être relevée car elle confirme, s'il en était besoin, qu'ils ne sont pas originaux, mais procèdent d'une source commune. L'un et l'autre introduisent les règles d'Adraste pour décrire de manière génétique la classification des rapports numériques, autrement dit les couples de nombres (A, B). Or ils formulent leurs règles pour trois nombres (A, B, C) en progression continue, ce qui est totalement inutile. La raison de cette anomalie est certainement que la source commune en question[61] portait, non pas sur l'engendrement des rapports de nombres, mais sur celui des différentes médiétés géométriques, dans n'importe quel rapport donné. Or, c'est précisément ce que l'on observe dans le Livre III de Pappus : le cadre de son exposé est explicitement celui des médiétés et, ainsi que nous l'avons déjà vu, il est le seul à donner une justification démonstrative de la règle d'Adraste (Prop. III. 17). Il se contente de suggérer l'engendrement des différents rapports numériques en

---

[60] On peut observer qu'il en est de même dans la procédure dite d'anthyphérèse (ou algorithme d'Euclide) appliquée à un couple de nombres car toute anthyphérèse numérique se laisse décrire comme une série de manipulations successives, d'abord une ou des séparations, puis une inversion, puis une ou des séparations, puis une inversion … jusqu'à parvenir au rapport identique (a : a). Il y a donc une certaine correspondance avec ce que j'ai appelé la règle d'Adraste converse, fondée elle aussi sur la séparation d'un rapport. Cf. Euclide, *Les Eléments,* Volume 2 (L. V-IX), trad. et comm. par B. Vitrac. Paris, P.U.F., 1994, pp. 492-493.

[61] En fait il se pourrait même que Nicomaque fasse partie des sources de Théon. Mais ce dernier en a d'autres. Que leurs exposés soient apparentés se voit quand on compare les exemples qu'ils donnent pour la génération des rapports multiples, épimores et les plus simples des épimères et multiplépimores: ce sont les mêmes. Cf. Théon, *Expositio,* 107.24—110.18 Hiller et Nicomaque, *Introd. arithm.,* Livre I, Ch. 23, §§ 8-14, 66.8—69.10 Hoche. Là où Nicomaque enchaîne avec d'autres exemples plus complexes (*Ibid.,* § 16, 69.13—70.15 Hoche), Théon affirme qu'il est inutile d'allonger le discours (110.18 Hiller). Nicomaque poursuit avec une petite tirade sur la notion d'élément que Théon avait exposée plus tôt (mais les explications sont un peu différentes). Ensuite nos deux auteurs en viennent à l'inversion de la règle d'Adraste. Cf. Théon, *Expositio,* 110.19—111.9 Hiller et Nicomaque, *Introd. arithm.,* Livre II, Ch. 2, 74.16—75.26 Hoche. Il fait alors explicitement le lien avec la psychagogie platonicienne du *Timée* et introduit de nouveaux développements sur la génération des hémioles et épitrites dont Théon s'est dispensé. A certains égards cette portion de l'*Expositio* apparaît donc comme une sorte d'abrégé de l'exposé nicomaquéen. Mais il y a aussi des éléments qui se trouvent chez Théon et pas chez Nicomaque, notamment les références à Adraste et à Ératosthène. Cette source commune pourrait aussi être Modératus, cité par Proclus (voir note 57 *supra*).

mentionnant les premiers exemples (multiples et épimores)[62] là où Théon, et plus encore Nicomaque, proposaient de très longs développements. Mais sa version a un autre mérite : il montre comment engendrer en outre les *autres* médiétés : médiété harmonique, sous-contraire, cinquième médiété…, dixième médiété, à partir de la médiété géométrique. Autrement dit, la raison d'égalité n'est pas seulement la cause première et l'élément de tous les rapports, et donc de toutes les médiétés géométriques, elle l'est aussi de toutes les médiétés.

On pourrait penser qu'il s'agit là d'un développement tardif, dû à Pappus lui-même qui a tout de même une certaine compétence mathématique. Je crois que cela n'est que partiellement vrai et, d'ailleurs il s'en explique lui-même : son exposé porte sur dix médiétés, autrement dit, il inclut les 4 médiétés des "Modernes" dont parle Jamblique, celles que l'on a ajoutées après Ératosthène. Mais il reconnaît clairement que, ce faisant, il complète un exposé antérieur[63], lequel établissait donc une généalogie du même genre pour les six premières médiétés. Pappus s'est probablement contenté d'y ajouter ce qui concerne ses médiétés 7 à 10[64].

L'exposé antérieur dont nous venons de parler pourrait être dû à Ératosthène[65]. C'est, me semble-t-il, ce que suggère la mention d'Ératosthène quelque peu cryptique que Théon a insérée à la fin de son exposé sur les règles d'Adraste :

> « Et Ératosthène démontre que toutes les figures (τὰ σχήματα πάντα) également sont construites à partir de certaines proportions en commençant la construction à partir de l'identité et les résolvant dans l'identité. A ce sujet, il n'est pas nécessaire d'en dire quoi que ce soit maintenant »[66].

L'assertion n'a pas manqué d'intriguer les commentateurs, d'autant que la suite du texte, probablement corrompu, les a induits en erreur.

A cet endroit en effet, sous l'intertitre *Περὶ σχημάτων,* on trouve un très court exposé géométrique concernant le point, la ligne, les dimensions et une esquisse de classifications des figures[67], avant que l'exposé concernant les médiétés ne reprenne et clôture la Partie II consacrée,

---

62 *Pappus,* III, 88.19—90.7 Hultsch.

63 *Pappus,* III, 70.9-15 Hultsch : « Il y a lieu de traiter de ces trois médiétés en premier lieu …, de traiter ensuite des trois autres qui leur sont opposées d'après les Anciens; enfin il y a lieu de traiter des quatre médiétés qu'on rencontre chez les auteurs récents d'après leurs préceptes à ce sujet, et d'exposer la manière dont chacune de ces médiétés peut être trouvée au moyen de la proportion géométrique; de telle sorte que la démonstration que nous nous proposons de donner *ait une portée plus étendue* ». Trad. P. Ver Eecke, pp. 51-52; c'est moi qui souligne.

64 Dans ses Prop. 25-27 qui portent sur les médiétés 8 à 10 (*Collectio,* III, 96.17—100.18 Hultsch). Mais comme on le voit dans son tableau récapitulatif (*Ibid.,* p. 102), la même règle de transformation vaut pour les médiétés 7 et 10, à savoir (A, B, C) → (D, E, F), avec D = A + B + C, E = A + B, C = A.

65 Pour quelle raison Nicomaque et Théon (ou leur source commune) ont-ils désolidarisé leurs exposés des règles d'Adraste de celui qu'ils consacrent aux médiétés (Cf. Nicomaque, *Introd. arithm.,* Livre II, Ch. XXI-XXIX; Théon, *Expositio,* Livre II, 113.9—119.21 Hiller) ? Elle est perceptible chez l'auteur de l'*Introduction arithmétique*. Exposer lesdites règles au moment où il explique les médiétés revenait évidemment à reconnaître la primauté de la médiété géométrique, principe de toutes les autres, pour parler comme Ératosthène, Adraste et Pappus. Or Nicomaque a décidé de soutenir l'idée que c'est à la médiété arithmétique qu'il faut accorder la préséance (Nicomaque, *Introd. arithm.,* Livre II, Ch. XXII), comme il l'avait fait, dès le début de son ouvrage, pour l'arithmétique vis-à-vis des autres sciences mathématiques (Théon ne fait rien de tel, du moins en ce qui concerne les médiétés). C'est peut-être également ce choix qui a conduit Nicomaque à ne pas inclure les dérivations des autres médiétés à partir de la géométrique dans son exposé.

66 Théon, *Expositio,* 111.10-13 Hiller.

67 Théon, *Expositio,* §§ 53-54, 111.14—113.8 Hiller.

ne n'oublions pas à la musique ! Comme nous l'avons déjà vu, Théon envisageait probablement de consacrer un livre à la géométrie. Mais, dans l'état actuel du texte, celui-ci n'existe pas. Il se peut que la petite portion du Livre II que je viens de mentionner soit le témoin, mutilé, de son existence antérieure.

Quoi qu'il en soit, sa présence a induit les commentateurs à comprendre le terme "σχήματα" dans la citation d'Ératosthène comme renvoyant aux figures géométriques. Si l'exposé sur les médiétés n'avait pas été interrompu, cela n'aurait probablement pas été le cas. Cela conduit par exemple Klaus Geus, à la suite de Van der Waerden et Wolfer, à croire que Théon fait ici allusion aux coniques[68] et donc à l'ouvrage auquel la liste du Livre VII de Pappus fait allusion, le *Περὶ μεσοτήτων,* que Geus n'hésite pas à identifier au *Platonikos* ou à une partie de celui-ci[69]. La première assertion est éminemment improbable, ne serait-ce que parce qu'aucun mathématicien grec n'a jamais appelé les coniques "σχήματα" : ce sont des sections, des lignes ou des lieux, selon le contexte, jamais des "figures".

L'interprétation que je propose est qu'ici Théon fait allusion à l'engendrement des différents *types* ou *figures de médiétés* — en l'occurrence cinq des six médiétés connues du temps d'Ératosthène — à partir de certaines médiétés géométriques, et donc, par voie de conséquence, à leur dérivation ultime à partir de l'égalité ou du rapport d'égalité, comme nous l'avons vu faire chez Pappus.

Pour résumer, il me semble à peu près assuré qu'il a existé un exposé d'Ératosthène assez complet sur les notions de rapport, de proportion et de médiété. Le propos était terminologique, classificatoire et algorithmique. Peut-être marquait-il les différences que l'on observait selon les spécialités, notamment en arithmétique et en canonique, dans l'usage des termes. Sans doute en méditant sur l'algorithme d'anthyphérèse, décomposable en manipulations plus simples : séparations et inversions de rapports, il montrait comment engendrer, grâce à une règle très simple, toutes les médiétés géométriques dans un rapport donné, d'une manière récursive et ordonnée. Il établissait que l'on pouvait même engendrer, par des combinaisons linéaires des termes, les cinq autres médiétés alors reconnues. Cela lui permettait de justifier la thèse d'apparence métamathématique selon laquelle l'égalité ou le rapport d'égalité est le principe premier et générateur de tout rapport et de toute proportion et médiété.

Si l'on accepte cette reconstruction, on pourra, d'une manière il est vrai quelque peu spéculative, réévaluer l'histoire du crible par laquelle nous avons commencé et ce, en deux étapes : (**i**) déjà comme le suggère l'exposé de Nicomaque indépendamment de toute hypothèse, le crible ne servait pas seulement à déterminer les nombres premiers, mais différentes catégories de nombres (peut-être ceux de la forme p^n, avec p premier et/ou ceux de la forme p.q.r… avec p, q, r,

68 Geus, K., *Eratosthenes von Kyrene*. Studien zur hellenistischen Kultur- und Wissenschaftsgeschichte. Münchener Beiträge zur Papyrusforschung und antiken Rechtsgeschichte. Heft 92. München, Verlag C.H. Beck, 2002, p. 168.
69 *Ibid.*, pp. 190-191.

premiers distincts, catégories thématisées explicitement dans le Livre IX des *Éléments* d'Euclide), ainsi qu'à mettre en évidence la coprimarité pour les couples de (petits) nombres[70].

(**ii**) La suite du Chapitre 13 du Livre I de Nicomaque dans lequel est exposée cette utilisation du crible se poursuit précisément par l'exposé de l'algorithme d'anthyphérèse (§§ 11-13), appelé ici "antaphérèse". Il se pourrait donc que l'ensemble dudit chapitre — et pas seulement le § 2 — doive beaucoup à Ératosthène, soucieux d'abord d'exhiber une certaine quantité d'exemples relevant de différentes catégories de nombres, y compris des couples de nombres premiers entre eux — ce que permet le crible —, puis de donner un critère universel pour juger de la coprimarité, voire de la nature du rapport, pour deux nombres donnés grâce à l'anthyphérèse.

Conclusions

Qu'un tel écrit soit intitulé *Περὶ μεσοτήτων* n'aurait rien d'étonnant. Qu'il s'agisse d'une portion du *Platonicos,* comme le veut Geus, est possible, mais il me semble probable que son insertion ultérieure dans le Domaine de l'analyse est le résultat d'une confusion[71]. Le fait que nos sources principales à son sujet soient médio- ou néo-platoniciennes suggère évidemment que l'objectif d'Ératosthène était, comme le leur, de discuter de ces médiétés en connexion avec Platon. Si nous admettons qu'il s'agit d'une portion du *Platonicos,* nous augmentons évidemment la probabilité de cette hypothèse. Peut-on être plus précis ?

Les différentes informations que l'on peut collecter chez Nicomaque, Théon de Smyrne, Porphyre, Pappus et Proclus, mais aussi ce que l'on observe chez Platon lui-même, conduisent à penser qu'Ératosthène devait tout particulièrement discuter le *Timée,* peut-être le Livre VII de la *République*. On peut aussi penser à l'*Épinomis,* mentionné par l'auteur de la remarque qui enchaîne immédiatement avec le fragment 1 d'Ératosthène dans l'*Expositio,* sans doute Théon (celui-ci, au début de son ouvrage, se réfère à deux reprises à ce dialogue comme à un écrit platonicien), peut-être Ératosthène lui-même ! A moins que la prise en compte de ce dialogue ne soit le résultat de la division ultérieure de la tradition exégétique quant à son authenticité : comme Théon de Smyrne, Nicomaque l'admettait, mais Proclus le considérait comme inauthentique. Ce n'est peut-être pas sans rapport avec son rejet de la thèse ératosthénienne qui pose l'ἀναλογία comme "lien" de l'ensemble des mathématiques[72].

Nous avons vu que le problème déliaque dont Ératosthène avait fait l'histoire dans son *Mésolabos* était aussi évoqué dans le *Platonicos* (Hiller, frgt N°3). Ceci pourrait également

[70] Sur cette interprétation, voir Euclide, *Les Eléments,* Volume 2 (L. V-IX), trad. et comm. par B. Vitrac. Paris, P.U.F., 1994, pp. 478-481.

[71] On pourrait imaginer que le titre d'une partie était quelque chose comme « Τρόποι τῶν μεσοτήτων », confondu ensuite avec « Τόποι πρὸς μεσοτήτας ». Pure spéculation.

[72] Bien entendu, cela ne l'empêche pas, dans son *Commentaire au Timée* et en accord avec Platon, d'affirmer que la médiété géométrique est le lien par excellence. Plus loin, il précise même que les trois médiétés fondamentales sont autant de principes d'unification de l'Âme. V. *in Tim.,* II, 198. 29—200. 21 Diehl. Cf. également l'attribution de ladite thèse à Platon par Pappus (*supra* note 53), ce qui veut peut-être simplement dire qu'il acceptait l'*Épinomis* comme un écrit authentiquement platonicien.

confirmer que le *Timée* en était bien l'un des objets de discussion. Là aussi, une remarque de Proclus pourrait constituer un indice supplémentaire. En 31 b4-c4, Platon entreprend de justifier l'emploi, par le Démiurge, de quatre constituants simples pour construire le corps du monde dans un argument plutôt problématique.

Les exégètes, anciens et modernes, n'ont pas manqué d'exercer leur sagacité sur ce passage, notamment sur la séquence (32 b2-3) :

« τὰ δὲ στερεὰ μιά μὲν οὐδέποτε, δύο δὲ ἀεὶ μεσότητες συναρμόττουσιν »,

qui contient une assertion, fausse en première lecture, sur le nombre de médiétés requis entre deux solides. Grâce au commentaire de Proclus, nous savons que différentes interprétations du passage avaient été proposées dès l'Antiquité, les unes arithmétiques, d'autres géométriques, d'autres mixtes, pour essayer de "sauver" Platon. Le Diadoque mentionne la solution mixte d'un certain Démocrite le platonicien qui critiquait ceux qui, avant lui, s'étaient égarés dans une explication du passage en termes de duplication du cube[73]. Il ne précise malheureusement pas à qui il pensait. Il pourrait s'agir d'Ératosthène, cité immédiatement à la suite par Proclus.

Bien sûr, une sorte de réflexe conditionné a pu se constituer dans les écoles philosophiques de l'Antiquité tardive qui faisait que, dès que la duplication du cube était mentionnée, le nom d'Ératosthène lui était associé. Mais il se peut aussi que l'association fonctionnait autrement, directe, entre le *Timée* et le *Platonicos* : Porphyre fait lui aussi une connexion de ce genre (entre le *Timée* et Ératosthène) à propos de la discussion terminologique; Nicomaque relie la règle dite d'Adraste (que j'ai essayé de rattacher à l'hypothétique *Περὶ μεσοτήτων*) et la psychagogie platonicienne du *Timée*.

Cela dit, quand bien même ce serait le cas, il ne s'agissait probablement pas d'un commentaire à ce seul dialogue de Platon, éventuellement limité à la discussion des passages controversés. La question de l'unité des mathématiques — qui n'apparaît pas vraiment dans le *Timée* — semble avoir été importante pour l'Auteur du *Platonicos*. Pour cette raison, nous avons retrouvé la thématique des médiétés et des moyennes proportionnelles dans plusieurs de ses travaux, arithmétiques, musicaux et géométriques. Quant à l'attitude qu'il faut supposer de la part d'Ératosthène vis-à-vis de Platon et/ou de l'Académie, je dois confesser qu'elle m'échappe un peu. Le choix du titre — s'il est bien de lui — pourrait faire penser à une référence, voire à une révérence, mais, au-delà du souci commun de rechercher l'unité des mathématiques, les caractéristiques de son activité dans ces disciplines, sa préoccupation d'effectivité, algorithmique mais aussi pratique, ne me semblent pas très consonantes avec la philosophie platonicienne des mathématiques telle qu'elle transparaît dans les Dialogues.

[73] Ce qui est peut-être la moins mauvaise solution. Voir Vitrac, B., « Les mathématiques dans le Timée de Platon : le point de vue d'un historien des sciences ». *Études platoniciennes,* vol. II. Coordonné par J.-F. Pradeau. Paris, Les Belles-Lettres, 2006, pp. 11-78.